АСИМПТОТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАВИХРЕННОЙ СТРУИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. П. Иванилов

(Москва)

В работе рассматривается поведение осесимметричных завихренных струй на больших расстояниях от места истечения. В некоторых случаях оказывается возможным появление поверхностных волн (периодического расширения и сужения струи). Аналогичный факт для плоских струй отмечался в [1,2].

1. Если ввести в рассмотрение функцию тока ψ, то, взяв в качестве независимых переменных величины (x, ψ, θ) и за искомую функцию величину y, где x — расстояние по оси симметрии, y — расстояние до оси симметрии, θ — полярный угол, получим для осесимметричных течений идеальной несжимаемой жидкости систему [3]

$$u_x = \frac{1}{yy_\psi}, \qquad u_y = -\frac{y_x}{yy_\psi}, \qquad u_\theta = \frac{1}{y}\,\Phi(\psi) \tag{1.1}$$

$$\frac{y}{y_\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{yy_\psi}\right) + \frac{y_x}{y_\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{y_x}{y_\psi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\psi}\right) + \Phi\Phi' - y^2F' = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{2y^2}\left(\frac{1+y_x^2}{y_\psi^2} + \Phi^2\right) - F + \frac{p}{\rho} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь u_x, u_y, u_θ — компоненты вектора скорости, F и Φ — произвольные функции одного переменного ψ, характеризующие удельную энергию и закрученность потока. Граничные условия будут следующими. На оси струи

$$y = 0, \qquad \psi = 0 \tag{1.4}$$

Если рассматривать движение в безразмерных переменных, приняв в качестве единиц измерения некоторую характерную толщину струи h и величину $\psi_0 = Q / 2\pi$, где Q — расход жидкости, то на свободной поверхности будем иметь $\psi = 1$. Кроме того, давление на поверхности струи постоянно, и без ограничения общности можно считать $p = 0$. Тогда (1.3) дает

$$\frac{1+y_x^2}{y_\psi^2} + \Phi^2 - 2y^2F = 0 \quad \text{при } \psi = 1 \tag{1.5}$$

2. На больших расстояниях от места истечения можно считать, что струя имеет форму кругового цилиндра. Для такого течения искомые величины не зависят от x

$$y = t(\psi), \qquad u_x = u(\psi) \tag{2.1}$$

Для определения функций u и t из (1.2) и (1.3) имеем систему

$$u = \frac{1}{tt_\psi}, \qquad uu' - F' + \frac{\Phi\Phi'}{t^2} = 0, \qquad t(1) = 1, \qquad t(0) = 0 \tag{2.2}$$

Интегрируя второе уравнение (2.2), получим

$$\frac{u^2}{2} - F + \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{t^2} + \int_1^t \frac{\Phi^2}{t^3}\,dt = 0 \tag{2.3}$$

Из (1.3) и (2.8) давление определяется формулой

$$p = -\int_t^1 \frac{\Phi^2}{t^3}\,dt \tag{2.4}$$

Отсюда вытекает следующее заключение. В незакрученной струе ($\Phi \equiv 0$) давление постоянно. В закрученной струе давление на оси струи всегда меньше давления на ее периферии. Это подтверждается образованием воронок в центре струи.

В центре струи скорость u_θ и давление могут обращаться в бесконечность; в частности, при $\Phi(0) \neq 0$. Такие потоки назовем потоками с осевыми вихрями. Для $\Phi=\text{const}$, $u = 0$ и $F' = 0$ имеем прямолинейный шнуровой вихрь.

Выпишем еще решение, соответствующее незавихренной струе $F' = \Phi = 0$. В принятых безразмерных переменных оно имеет вид

$$u = 2, \quad t = (\psi)^{1/2}, \quad F = 2, \quad \Phi = 0, \quad p = 0 \tag{2.5}$$

3. В дальнейшем удобно считать независимой переменной $t = t(\psi)$ и положить

$$y = t + z(t, x) \tag{3.1}$$

Уравнение для $z(t, x)$ и граничные условия (1.3) — (1.5) запишутся [1]

$$\frac{z - tz_t}{1 + z_t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{t + z}{1 + z_t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{u(z + tz_t + zz_t)}{(t + z)(1 + z_t)} + \frac{z_x}{1 + z_t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{utz_x}{1 + z_t} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\frac{utz_x}{1 + z_t} - \frac{2zt + z^2}{ut}F_t' = 0, \quad z(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{u^2(-2z_t - z_t^2 + z_x^2)}{(1 + z_t)^2} - 2(2z + z^2)F_0 - 2F_1 = 0 \quad \text{при } t = 1$$

4. Линеаризация уравнений и граничных условий (3.2) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^2tz_t) - \left(\frac{u^2}{t} - 2F'\right)z = -u^2tz_{xx}, \; z(x, 0) = 0, \; z_t + \frac{2F}{u^2}z = 0 \text{ при } t = 1 \tag{4.1}$$

Будем искать собственные функции (4.1) методом разделения переменных. Положим $z = T(t)X(x)$, получим

$$LT \equiv \frac{d}{dt}(u^2tT') + \left[\mu u^2t - \left(\frac{u^2}{t} - 2F'\right)\right]T = 0$$

$$T(0) = 0, \qquad T'(1) + \frac{2F(1)}{u^2(1)}T(1) = 0 \tag{4.2}$$

$$X'' - \mu X = 0 \tag{4.3}$$

Имея полный набор собственных функций задачи (4.1), можно получить в линейной постановке решение задачи о струе при заданном распределении скоростей в двух сечениях струи (одном для полуограниченной струи). Поведение струи зависит от характера спектра краевой задачи (4.2).

Если все собственные значения μ задачи (4.2) положительны, то, как видно из (4.3), полуограниченная струя либо неограниченно расширяется вниз по потоку (если она расширялась в некоторой точке, достаточно удаленной от места истечения), либо будет сужаться, асимптотически стремясь принять цилиндрическую форму. Влияние условий на выходе экспоненциально затухает вниз по потоку. Асимптотика свободной поверхности струи при $x \to \infty$ в случае дискретного спектра имеет вид

$$y = 1 + C\exp(-\sqrt{\mu_0}x) + O(\exp(-\sqrt{\mu_1}x)) \qquad (\mu_1 > \mu_0 > 0)$$

Показатель экспоненциального сужения струи равен, таким образом, $\sqrt{\mu_0}$, где μ_0 — наименьшее положительное собственное значение [2] задачи (4.2).

Волновых режимов, как видно из (4.3), в потоках, для которых все собственные значения (4.2) положительны, не возникает. Наличие же в спектре отрицательных собственных значений приводит к появлению волновых режимов. Каждое отрицательное собственное число будет играть роль критического числа[3]. Решения, соответствующие положительным собственным значениям, довольно быстро убывают, и на больших расстояниях от места истечения форма струи будет определяться отрицательным спектром задачи (4.2). Если отрицательный спектр конечен, то он не может существен

[1] Здесь произведена замена $F(1) = F_0(1) + F_1$; $F_0(1)$ — соответствует струе, имеющей форму кругового цилиндра. Две струи с одинаковым распределением скоростей (u) и завихренности (F' и Φ) в некотором сечении имеют разную удельную энергию F в зависимости от формы свободной поверхности струи. Из дальнейшего будет следовать, что $F_1 = O(z^2)$.

[2] Как будет показано ниже, в случае, когда F' и u^2 — мероморфные функции t (с особой точкой при $t = 0$), спектр задачи (4.2) дискретен.

[3] В плоском безвихревом потоке аналогичную роль играет число $c / \sqrt{gh}$ (c — скорость распространения волны, g — ускорение силы тяжести, h — глубина потока).

но изменить форму струи, вызывая лишь синусоидальные изменения формы ее поверхности. Если же отрицательный спектр неограничен, то форма струи может быть весьма разнообразной.

5. Краевая задача (4.2) — это задача Штурма — Лиувилля для самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Легко показать, что все его собственные значения действительны. При $F' \leqslant 0$ все они строго положительны, и волновых режимов в струе не возникает. Отрицательные собственные числа (волновые режимы) могут иметь место только при $F' > 0$ (удельная энергия возрастает от центра к периферии струи). Если μ не есть собственное значение однородной краевой задачи (4.2), то неоднородная краевая задача

$$LT = \Phi_1(t, x), \qquad T(0) = 0, \qquad T'(1) + \frac{2F(1)}{u^2(1)} T(1) = \Phi_2(x) \tag{5.1}$$

всегда разрешима, если же $\mu = \mu_n$ — собственное число (кратное единице), то условием разрешимости краевой задачи (5.1) будет

$$\int_0^1 \Phi_1(x, t)\, T_n(t)\, dt - u^2(1)\, T_n(1)\, \Phi_2(1) = 0 \tag{5.2}$$

где $T_n(t)$ — собственная функция задачи (4.2), соответствующая собственному значению $\mu = \mu_n$.

Для струи с осевым вихрем удельная энергия F на оси струи может обращаться в бесконечность [1]. Поэтому будем считать, что u^2 и F' — мероморфные функции, которые в окрестности $t = 0$ разлагаются в ряды Лорана

$$u^2 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k, \qquad F' = \sum_{k=m}^{\infty} f_k t^k \qquad (a_n > 0)$$

(m и n могут быть отрицательными).

Приведем без доказательства следующие результаты. Спектр задачи (4.2) дискретен. Если $m < n - 1$, то при $f_m < 0$ (удельная энергия от оси струи убывает) отрицательных собственных значений конечное число, при $f_m > 0$ спектр содержит бесконечно много отрицательных собственных значений. Если $m \geqslant n - 1$, то, обозначая $c = {}^1/_4\,(n^2 + 3) - 2f_{n-1} / a_n$, имеем при $c \geqslant -{}^1/_4$ конечное число отрицательных собственных значений, при $c < -{}^1/_4$ спектр неограничен в обе стороны. (Последнее возможно лишь для потоков, в которых продольная скорость u_x на оси струи обращается в бесконечность.) Требование $T(0) = 0$ дает еще условие $2f_{n-1} / a_n \leqslant 1$.

6. Уравнения (3.2) позволяют определить волны малой амплитуды на поверхности завихренной труи. То, что вихри могут являться причиной возникновения волн, было замечено М. А. Лаврентьевым и Н. Н. Моисеевым [2, 4]. Волны возникают на поверхности струи в случае, когда (4.2) имеет отрицательные собственные значения. На очень больших расстояниях от места истечения экспоненциально затухающими членами можно пренебречь, и струя будет иметь выраженный волновой профиль. Рассмотрим конкретный пример

$$u = 2, \qquad \psi = t^2, \qquad \Phi = 2\alpha, \qquad F = -k(1 - t^2) + 2\alpha^2 + 2 \tag{6.1}$$

Уравнения и граничные условия § 2 удовлетворены. При $\alpha = k = 0$ получим незавихренную струю (2.5). Уравнение (4.1) для данного случая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(tz_t) - \left(\frac{1}{t} - kt\right) z + tz_{xx} = 0 \tag{6.2}$$

Подстановка $z = e^{-\mu x} T(t)$ дает для определения T (6.3)

$$\frac{1}{t}(tT')' + \left[(k + \mu^2) - \frac{1}{t^2}\right] T = 0, \qquad T(0) = 0, \qquad T'(1) + (\alpha^2 + 1)\, T(1) = 0$$

---

[1] Например, для кругового вихря с распределением

$u_x = 0, \quad \Phi = p_0 + p_1 t, \quad u_\theta = p_0 / t + p_1, \quad F' = -p_0 p_1 / t^2 - p_1^2 / t, \quad p_0 = \Gamma / 2\pi.$

Общее решение (6.2) имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\mu_n x} + B_n e^{-\mu_n x}) J_1 (\sqrt{\mu_n^2 + k}\, t), \qquad t = \psi^{1/2}, \qquad \mu_n^2 = s_n^2 - k \tag{6.4}$$

Здесь J_1 — функция Бесселя, s_n — положительный корень уравнения

$$sJ_1'(s) + (\alpha^2 + 1) J_1(s) = 0 \tag{6.5}$$

Коэффициенты A_n и B_n можно определить, зная распределение скоростей ($z = g_i(t)$) в двух сечениях струи при $x = x_0$ и $x = x_1$.

Волны возникают на поверхности струи при $\mu_m < 0$ ($k > s_m^2$) и имеют длину

$$\lambda_m = 2\pi / \sqrt{k - s_m^2}$$

Если же $k < s_0^2$, где s_0 — наименьший корень (6.5), то для неограниченно протяженной струи нужно положить $A_n = 0$, B_n определяются из распределения $z = g_0(t)$ в некотором сечении струи. Для достаточно больших $x = x_0$ можно получить асимптотическое представление формы струи, составив в (6.4) только член, соответствующий наименьшему из корней s_0. Свободная поверхность с большой степенью точности описывается, таким образом, уравнением [1]

$$y = 1 + B \exp(-\sqrt{s_0^2 - k}\, x)$$

Для незавихренной струи $\alpha = k = 0$ и, кроме того, (6.5) упрощается до $J_0(s) = 0$, что совпадает с результатом, полученным в [6], где детально рассмотрено несколько примеров конкретного задания Φ и F в случае, когда спектр задачи 4.2) положителен (волны на поверхности струи отсутствуют).

7. Одним из интересных случаев волновых режимов на поверхности струи являются длинные волны. Для длинных волн можно получить асимптотическое решение задачи (3.2), используя методику [1]. Она применима к данному случаю, если (4.2) имеет $\mu = 0$ собственным числом. Изменяя закрученность потока, можно всегда добиться этого. Действительно, при $\mu = 0$ и заданных u^2 и F', взяв в качестве T_0 частное решение (4.2), удовлетворяющее первому граничному условию, можем подобрать $F(1)$ так, тобы выполнялось и второе условие. В самом деле, изменим закрученность Φ на величину Φ_1 так, чтобы не изменить u и F'. Для этого достаточно потребовать $1 + 2\Phi / \Phi_1 = C \exp(-\Phi_1^2)$. Это уравнение имеет корень при любом C. Можно сказать поэтому, что закрученность потока является причиной изменения формы струи. В случае, рассмотренном в п. 6, $\mu = 0$ является собственным числом задачи (4.2), если положить $k = s^2$.

Введем в задачу (3.2) малый параметр, положив $\xi = \sqrt{\varepsilon}\, x$, и будем разыскивать $z(\xi, t)$ в виде ряда по степеням ε

$$z = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k z_k(\xi, t), \qquad F(1) = F_0(1) + \varepsilon^2 F_1$$

Величина ε характеризует отклонение энергии F от энергии цилиндрической струи F_0. Для первого приближения получим

$$z_1 = C(\xi)\, T_0(t) \tag{7.1}$$

Здесь $T_0(t)$ — собственная функция задачи (4.2), соответствующая собственному числу $\mu = 0$.

Для второго приближения имеем

$$L(z_2) = \Phi_1(z_1), \qquad z_2(0) = 0, \qquad z_2'(1) + \frac{2F_0(1)}{u^2(1)} z_2(1) = \Phi_2(z_1) \tag{7.2}$$

Здесь

$$\Phi_1(z) = -u^2 t z_{\xi\xi} + g(z), \quad \Phi_2(z) = {}^3/_2 z_t^2 - \frac{z^2}{u^2} F_0 - \frac{1}{u^2} F_1$$

$$g(z) = -\frac{z^2}{t} F_t' + 3tz_t^2 uu' + \frac{u^2}{t^2}(-z^2 - tzz_t + 2tz_t^2 + 3t^3 z_t z_{tt}) \tag{7.3}$$

---

[1] Аналогичный прием для плоской незавихренной струи дает для показателя экспоненциального сужения струи значение $s_0 = \pi$, как это следует из формул Митчела — Жуковского [3]

Подставляя в (7.3) величины z_1 из (7.1), получим из условия разрешимости (5.2) неоднородной краевой задачи уравнение, определяющее C (ξ).

Введем обозначения γ и p посредством соотношений

$$\gamma = -{}^1/_2 \int_0^1 u^2 t T_\bullet^2 dt, \qquad \pm 3\gamma p^2 = \int_0^1 g(T_\bullet) T_\bullet dt - \left(\frac{6F_\bullet^2}{u^4} - F_\bullet\right) T_\bullet^3 (1)$$

($\gamma < 0$, T_0 (1), не ограничивая общности, можно принять положительным, и знак в левой части подбирается по знаку правой). Кроме того, выберем F_1 удовлетворяющим соотношению $T_0 (1) F_1 = \mp 4\gamma p^2$.

Для определения C (ξ) будем иметь уравнение

$$2C'' \pm 3p^2C^2 \mp 4p^2 = 0 \tag{7.4}$$

имеющее решение

$$C = \pm 2 \operatorname{Cn}^2 (p\xi, 1 / \sqrt{2})$$

Возвращаясь к старым переменным, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ получим

$$y = 1 \pm 2\varepsilon T_0 (t) \operatorname{Cn}^2 (p \sqrt{\varepsilon} x, 1 / \sqrt{2}) \tag{7.5}$$

Свободная поверхность получится, если в (7.5) положить $t = 1$.

Таким образом, получено однопараметрическое семейство течений; параметр течения связан с амплитудой волны a соотношением $\varepsilon = a / 2T_\bullet (1)$. (Отметим, что для гравитационных волн в плоском случае имелось двупараметрическое семейство течений [1,2].) Длина волны, если под ней понимать расстояние между двумя соседними горбами (впадинами), определяется формулой

$$\lambda = \frac{1}{p\sqrt{\varepsilon}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx \frac{1.85}{p\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{или} \quad \lambda \approx \frac{1.85}{p}\left(\frac{2T_\bullet(1)}{a}\right)^{1/2} \tag{7.6}$$

Сравнивая (7.8) с условием, определяющим F_1, видим, что если в качестве характерного размера выбрана минимальная] толщина струи (верхний знак), то $F_1 > 0$, т. е. удельная энергия волнового течения больше удельной энергии параллельного течения с теми же F', u^2 и толщиной струи. Если в качестве характерного размера выбрать максимальную толщину струи, то $F_1 < 0$, и удельная энергия волновой струи меньше. Различие удельных энергий имеет порядок a^2.

При $p = 0$ уравнение (7.4) не имеет периодических решений. Это не означает, однако, что не существует режимов течения, отличных от тривиальных. В этом случае решение (3.2) следует искать по дробным степеням ε, применяя методику [7].

Автор признателен В. Б. Лидскому и Н. Н. Моисееву за любезные консультации.

Поступила 7 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Асимптотические методы в задачах о движении жидкости со свободными границами. Тр. Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 135—144.
2. Моисеев Н. Н. К теории волн в завихренной жидкости. ПМТФ, 1960, № 3, стр. 81—89.
3. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, 1958.
4. Сунь Цао. О волнах на поверхности равномерно завихренной жидкости. ПМТФ, 1960, № 2.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
6. Reizzner H. Achialsimmetrishe, freie Flüssigkeitsstruhlen mit schwasher Kontraktion. Z. angew. Math. und Mesh., B. 12, H. 1, S. 25—35.
7. Тер-Крикоров А. М., Треногин В. А. Существование и асимптотика решений типа уединенной волны для одного класса нелинейных эллиптических уравнений. Матем. сб., 1963, т. 62(104), № 3, стр. 264—274.