ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю. М. Волин, Г. М. Островский

(Москва)

Рассмотрим задачу оптимизации последовательности реакторов.

Пусть каждый из реакторов описывается системой уравнений (см. [1])

$$\frac{\partial x_i}{\partial l} = f_i(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad\qquad \frac{\partial y_j}{\partial t} = \varphi_j(x, y) \qquad (j = 1, \ldots, p) \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — векторная переменная, характеризующая состояние системы в данном сечении реактора (концентрации веществ, температура, давление и т. д.), $y = (y_1, \ldots, y_p)$ — векторная переменная, характеризующая состояние катализатора, l — текущая длина реактора, t — астрономическое время.

Пусть требуется максимизировать выход одной из компонент, например x_1, за время цикла T. Управляющими переменными являются некоторые из переменных x_i (например x_i при $i = n_1, \ldots, n$) на входе в каждый из реакторов. Легко видеть, что математически эта задача может быть выражена следующим образом.

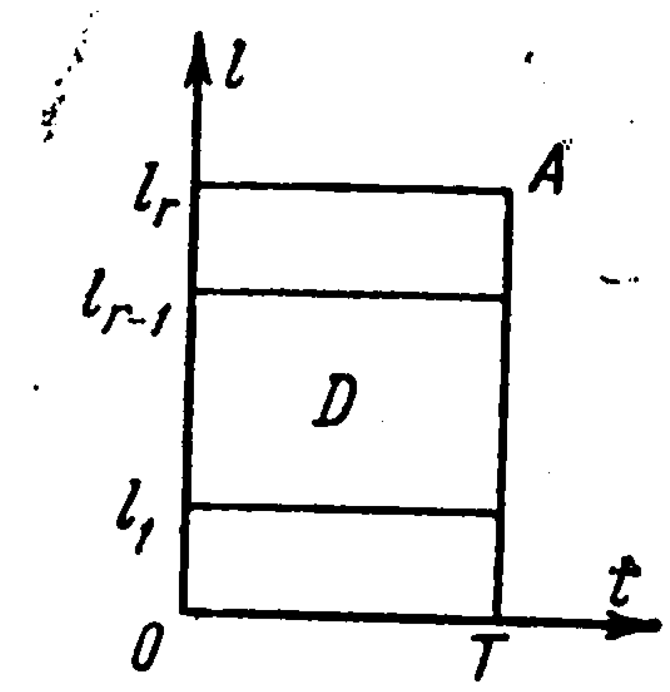
Рассмотрим в плоскости l, t прямоугольник O, L, A, T (будем называть его областью D) (фиг. 1). Пусть отрезок $[0, L]$ разбит точками $l_1, \ldots, l_{r-1}$ на r частей. Концевые точки отрезка будем обозначать через l_0 и l_r соответственно. Точки $l_0, \ldots, l_r$ соответствуют началам и концам реакторов. Внутри каждого прямоугольника

$$D_\alpha \ (l_\alpha \leqslant l \leqslant l_{\alpha+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \ \alpha = 0, \ldots, r-1)$$

переменные $x_i\,(l, t)$ удовлетворяют системе (1). На прямых $l = l_\alpha$ переменные $x_i\,(l, t)$ $(i = 1, \ldots, n_1 - 1)$ непрерывны

$$x_i\,(l_\alpha - 0, t) = x_i\,(l_\alpha + 0, t)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, r-1; \ i = 1, \ldots, n_1 - 1) \tag{2}$$



а переменные $x_i\,(l, t)$ $(i = n_1, \ldots, n)$ могут иметь разрывы.

Функции $x_i\,(l_\alpha + 0, t)$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1; \ i = n_1, \ldots, n)$ имеют физический смысл распределенных параметров управления. Предполагается, что эти функции кусочно непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы как функции t. При $l = l_0$ и $t = t_0$ выполняются соотношения

$$x_i\,(l_0, t) = x_{i0}\,(t) \qquad (i = 1, \ldots, n_1 - 1) \tag{3}$$

$$y_j\,(l, 0) = y_{j0}\,(l) \qquad (j = 1, \ldots, p) \tag{4}$$

Функции $x_{i0}\,(t)$, $y_{j0}\,(l)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемыми.

Из сделанных предположений следует, что внутри каждого из прямоугольников D_α переменные $x_i(l, t)$ могут иметь разрывы только вдоль линий $t = \mathrm{const}$, а $y_j\,(l, t)$ непрерывны.

Оптимальную задачу можно теперь сформулировать следующим образом. Найти такие функции $x_i\,(l_\alpha + 0, t)$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1; \ i = n_1, \ldots, n)$, чтобы интеграл

$$I = \int_0^T x_1\,(l_r, t)\,dt \tag{5}$$

принял максимальное значение. Отметим, что по оптимизации систем с распределенными параметрами выполнен ряд работ [2-4]. Здесь будут получены необходимые условия экстремума функционала (5) и рассмотрен один из приближенных методов нахождения оптимальных значений управляющих переменных.

Рассмотрим вместо интеграла (5) функционал

$$I^* = \int_0^T x_1(l_r, t)\,dt + \sum_{\alpha=0}^{r-1} \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_{il} - f_i(x, y)) + \sum_{j=1}^p \mu_j (y_{jt} - \varphi_j(x, y))\Big] dl\,dt$$

$$\left(x_{il} = \frac{\partial x_i}{\partial l},\quad y_{jt} = \frac{\partial y_j}{\partial t}\right) \tag{6}$$

Здесь $\lambda_i = \lambda_i(l, t)$ — пока совершенно произвольные функции, а на $\mu_j = \mu_j(l, t)$ наложено лишь ограничение непрерывности по t.

Если функции x_i, y_j в каждом прямоугольнике D_α ($\alpha = 0, \ldots, r-1$) удовлетворяют системе (1), то интеграл (6) будет равен интегралу (5) при любых $x_i(l_\alpha + 0, t)$ ($\alpha = 0, \ldots, r-1$; $i = n_1, \ldots, n$).

Пусть при

$$x_i(l_\alpha + 0, t) = x_i^*(l_\alpha + 0, t) \qquad (\alpha = 0, \ldots, r-1; \quad i = n_1, \ldots, n)$$

функционал I^* принимает максимальное значение. Проварьируем $x_i^*(l_\alpha + 0, t)$. Имеем

$$X_i(l_\alpha + 0, t) = x_i^*(l_\alpha + 0, t) + \delta x_i(l_\alpha + 0, t) \tag{7}$$

Для того чтобы найти вариацию функционала (6), найдем сначала вариацию следующего функционала

$$I_\alpha = \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \int_0^T F(z_1, \ldots, z_m, z_{1l}, \ldots, z_{ml}, z_{1t}, \ldots, z_{mt})\,dl\,dt \tag{8}$$

Здесь (9)

$$F = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_{il} - f_i) + \sum_{j=1}^p \mu_j (y_{jt} - \varphi_j), \qquad z_i = \begin{cases} x_i, & i = 1, \ldots, n \\ y_{i-n}, & i = n+1, \ldots, n+p = m \end{cases}$$

Пусть $z_i^*(l, t)$ соответствуют экстремальным функциям $x_i^*(l_\alpha + 0, t)$.

Вариация управляющих переменных (7) вызовет вариацию функций $z_i^*(l, t)$

$$Z_i(l, t) = z_i^*(l, t) + \eta_i(l, t) \tag{10}$$

Будем предполагать, что внутри каждого из прямоугольников D_α переменные $\eta_i(l, t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, причем выполняются условия

$$|\eta_i| < \varepsilon, \quad |\eta_{il}| < \varepsilon, \quad |\eta_{it}| < \varepsilon \tag{11}$$

Найдем вариацию функционала (8) при $z_i(l, t) = z_i^*(l, t)$

$$\delta I_\alpha = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} (F(z_i^* + \eta_i,\ z_{il}^* + \eta_{il},\ z_{it}^* + \eta_{it}, l, t) - $$
$$- F(z_i^*, z_{il}^*, z_{it}^*, l, t))\,dl\,dt,$$

Разложив в ряд Тейлора первый подынтегральный член и оставив лишь члены первого порядка малости, получим

$$\delta I_\alpha = \delta I' + \delta I'' + \delta I''', \qquad \delta I' = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial z_i} \eta_i\,dl\,dt$$

$$\delta I'' = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial z_{il}} \eta_{il}\,dl\,dt, \qquad \delta I''' = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial z_{it}} \eta_{it}\,dl\,dt \tag{12}$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая непрерывность $\mu_j(l, t) = \partial F / \partial z_{n+j,\,t}$ по t, получим

$$\delta I'' = \int_0^T \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_{il}} \Big|_{l=l_{\alpha+1}-0} \eta_i (l_{\alpha+1} - 0, t) - \right. \tag{13}$$

$$\left. - \frac{\partial F}{\partial z_{il}} \Big|_{l=l_\alpha+0} \eta_i (l_\alpha + 0, t) \, dt - \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{il}} \right) \eta_i \, dl \, dt$$

$$\delta I''' = \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_{it}} \Big|_{t=T} \eta_i (l, T) - \frac{\partial F}{\partial z_{it}} \Big|_{t=0} \eta_i (l, 0) \right) dl - \tag{14}$$

$$- \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{it}} \right) \eta_i \, dl \, dt$$

После подстановки (13) и (14) в (12) имеем

$$\delta I_\alpha = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} - \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{il}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z_{it}} \right) \right) \eta_i \, dl \, dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_{il}} \Big|_{l=l_{\alpha+1}-0} \eta_i (l_{\alpha+1} - 0, t) - \frac{\partial F}{\partial z_{il}} \Big|_{l=l_\alpha+0} \eta_i (l_\alpha + 0, t) \, dt + \right.$$

$$+ \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_{it}} \Big|_{t=T} \eta_i (l, T) - \frac{\partial F}{\partial z_{it}} \Big|_{t=0} \eta_i (l, 0) \right) dl \tag{15}$$

При помощи (9) отсюда получаем

$$\delta I_\alpha = \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \left[\sum_{s=1}^n \left(- \frac{\partial \lambda_s}{\partial l} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \lambda_i - \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} \mu_j \right) \delta x_s (l, t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^p \left(- \frac{\partial \mu_q}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_q} \lambda_i - \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_q} \mu_j \right) \delta y_q (l, t) \right] dl \, dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=0}^n [\lambda_i (l_{\alpha+1} - 0, t) \, \delta x_i (l_{\alpha+1} - 0, t) - \lambda_i (l_\alpha + 0, t) \, \delta x_i (l_\alpha + 0, t)] \, dt +$$

$$+ \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \sum_{j=1}^p [\mu_j (l, T) \, \delta y_j (l, T) - \mu_j (l, 0) \, \delta y_j (l, 0)] \, dl \tag{16}$$

Следовательно,

$$\delta I^* = \int_0^T \delta x_1 (l_r, t) \, dt + \sum_{\alpha=0}^{r-1} \int_0^T \int_{l_\alpha}^{l_{\alpha+1}} \left[\sum_{s=1}^n \left(- \frac{\partial \lambda_s}{\partial l} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \lambda_i - \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} \mu_j \right) \times \right.$$

$$\times \delta x_s (l, t) + \sum_{q=1}^p \left(- \frac{\partial \mu_q}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_q} \lambda_i - \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_q} \mu_j \right) \times$$

$$\times \delta y_q (l, t)] \, dl \, dt + \sum_{\alpha=0}^{r-1} \int_0^T \sum_{i=1}^n [\lambda_i (l_{\alpha+1} - 0, t) \times$$

$$\times\, \delta x_i (l_{\alpha+1} - 0, t) - \lambda_i (l_\alpha + 0, t)\, \delta x_i (l_\alpha + 0, t)]\, dt +$$

$$+ \int_{l_0}^{l_r} \sum_{j=1}^{p} [\mu_j (l, T)\, \delta y_j (l, T) - \mu_j (l, 0)\, \delta y_j (l, 0)]\, dl \tag{17}$$

Выберем теперь функции λ_s $(s = 1, \ldots, n)$, μ_q $(q = 1, \ldots, p)$ удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_s}{\partial l} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \lambda_i - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} \mu_j \qquad (s = 1, \ldots, n) \\ \frac{\partial \mu_q}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_q} \lambda_i - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_q} \mu_j \qquad (q = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{18}$$

Будем, кроме того, предполагать, что на прямых

$$l = l_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, r-1), \qquad \lambda_s (l_\alpha - 0, t) = \lambda_s (l_\alpha + 0, t) = \lambda_s (l_\alpha, t) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

а на границе области D при $l = l_\alpha$ и $t = T$ выполняются равенства

$$\lambda_1 (l_r, t) = 1, \qquad \lambda_s (l_r, t) = 0 \qquad (s = 2, \ldots, n), \qquad \mu_q (l, T) = 0 \qquad (q = 1, \ldots, p) \tag{20}$$

При таком выборе λ_s, μ_q двойной интеграл в (17) обращается в нуль. Заметив также, что в силу (2) — (4)

$$\delta x_i (l_\alpha - 0, t) = \delta x_i (l_\alpha + 0, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, r-1;\ i = 1, \ldots, n_1 - 1) \tag{21}$$

$$\delta x_i (l_0, t) = \delta y_j (l, 0) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n_1 - 1;\ j = 1, \ldots, p) \tag{22}$$

приходим к следующему выражению для вариации функционала I

$$\delta I = \delta I^* = -\sum_{\alpha=1}^{r-1} \int_0^T \sum_{i=n_1}^{n} (\delta x_i (l_\alpha + 0, t) - \delta x_i (l_\alpha - 0, t))\, \lambda_i (l_\alpha, t)\, dt -$$

$$- \int_0^T \sum_{i=n_1}^{n} \delta x_i (l_0, t)\, \lambda_i (l_0, t)\, dt \tag{23}$$

Легко показать [5], что $\delta I = 0$ на экстремали функционала I. Отсюда в силу независимости вариаций $\delta x_i (l_\alpha + 0, t)$ $(\alpha = 0, \ldots, r-1;\ i = n_1, \ldots, n)$ имеем

$$\lambda_i (l_\alpha, t) = 0 \qquad (\alpha = 0, \ldots, r-1;\ i = n_1, \ldots, n) \tag{24}$$

Таким образом, задача свелась к совместному решению систем дифференциальных уравнений в частных производных (1) и (18) с граничными условиями (2) — (4), (19), (20), (24). Граничные условия заданы как на границе области D, так и внутри.

Полученные условия будут необходимыми. Вопрос о том, будут ли они также и достаточными, должен решаться в каждом конкретном случае, исходя из физического смысла задачи.

Чтобы избежать решения достаточно трудной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных, поступим следующим образом. Проварьируем только одну из функций $x_i (l_\alpha + 0, t)$, например $x_k (l_\gamma, t) = x_{k\gamma} (t)$, на переменную $\delta x_{k\gamma} (t)$. Поставим задачу — найти удобное для вычислений выражение для вариации функционала (5).

Так как варьируется только $x_{k\gamma} (t)$, то в формулу (23) надо подставить

$$\delta x_i (l_\alpha + 0, t) = \begin{cases} \delta x_k (l_\gamma + 0, t), & i = k, \alpha = \gamma \\ 0, & i \neq k \text{ или } \alpha \neq \gamma \end{cases} \tag{25}$$

Вариация влияет только на последующие состояния, а не на предыдущие, поэтому $\delta x_i(l_\alpha - 0, t) = 0$ при $\alpha \leqslant \gamma$.

Отсюда формула (23) примет вид

$$\delta I = \sum_{i=n_1}^{n} \int_0^T \sum_{\alpha=\gamma+1}^{r-1}{}' \delta x_i (l_\alpha - 0, t) \lambda_i (l_\alpha, t)\, dt - \int_0^T \delta x_k (l_\gamma + 0, t) \lambda_k (l_\gamma, t)\, dt \tag{26}$$

Однако пользоваться формулой (26) для вычисления вариации неудобно: в этом случае понадобилось бы находить вариации $\delta x_i (l_\alpha - 0, t)$ $(\alpha = \gamma + 1, \ldots, r - 1)$. Поэтому пойдем несколько другим путем. Введем новые переменные $v_{i\alpha}(t)$ следующим образом:

$$v_{i\alpha}(t) = x_i (l_\alpha + 0, t) - x_i (l_\alpha - 0, t), \quad v_{i0}(t) = x_i (l_0, t) \tag{27}$$

$$(\alpha = 1, \ldots, r - 1;\ i = n_1, \ldots, n)$$

и будем искать не $x_i (l_\alpha + 0, t)$, а переменные $v_{i\alpha}(t)$. Легко видеть, что если известны $v_{i\alpha}(t)$, то при помощи (27) можно найти величины $x_i (l_\alpha + 0, t)$, и наоборот (для этого нужно один раз решить систему (1)).

Из (27) имеем

$$\delta x_i (l_\alpha + 0, t) - \delta x_i (l_\alpha - 0, t) = \delta v_{i\alpha}(t) \tag{28}$$

Подставим (28) в (23)

$$\delta I = - \sum_{i=n_1}^{n} \int_0^T \sum_{\alpha=0}^{r-1} \lambda_i (l_\alpha, t)\, \delta v_{i\alpha} dt \tag{29}$$

Переменные $v_{i\alpha}(t)$ независимы, поэтому, если варьируется только переменная $v_{k\gamma}(t)$, то $\delta v_{i\alpha} = 0$ ($i \neq k$ или $\alpha \neq \gamma$). Отсюда получим

$$\delta I = - \int_0^T \lambda_k (l_\gamma, t)\, \delta v_{k\gamma}\, dt \tag{30}$$

Сведем теперь рассматриваемую задачу к оптимальной задаче с конечным числом переменных. Для этого разобьем интервал $[0, T]$ на s частей числами $t_1, \ldots, t_{s-1}$. Будем считать, что M выбрано достаточно большим и все функции $v_{i\alpha}(t)$ аппроксимированы кусочно-постоянными функциями, которые внутри интервалов $[t_q, t_{q+1}]$ принимают значения $v_{i\alpha}^q$. Теперь величина I превращается в функцию конечного числа $((n - n_1 + 1)\, rs)$ переменных $v_{i\alpha}^q$ $(\alpha = 0, \ldots, r - 1;\ i = n_1, \ldots, n;$ $q = 0, \ldots, s - 1)$

$$I_1 = I_1(v_{i\alpha}^q) \tag{31}$$

и для ее максимизации могут быть использованы методы нелинейного программирования. Если например, используется метод градиента, то последовательные приближения искомых величин $v_{i\alpha}^q$ подсчитываются по формуле [6]

$$(v_{i\alpha}^q)^{j+1} = (v_{i\alpha}^q)^j + h \frac{\partial I_1}{\partial v_{i\alpha}^q} \tag{32}$$

где j — номер итерации.

Отсюда возникает задача вычисления всех производных

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i\alpha}^q} \qquad (\alpha = 0, \ldots, r - 1;\ i = n_1, \ldots, n;\ q = 0, \ldots, s - 1)$$

на каждой итерации. Используя (30), найдем удобную формулу для вычисления этих производных. Для этого проварьируем ординату $v_{k\gamma}^q$ на $\delta v_{k\gamma}^q$. Из формулы (30) получим

$$\delta I = - \int_{t_q}^{t_{q+1}} \lambda_k (l_\gamma, t)\, \delta v_{k\gamma}^q\, dt \tag{33}$$

Отсюда, так как $\delta v_{k\gamma}^q = \mathrm{const}$ при $t_q \leqslant t \leqslant t_{q+1}$, легко получить выражение для производной

$$\frac{\partial I}{\partial v_{k\gamma}^q} = \frac{\delta I}{\delta v_{k\gamma}^q} = -\int\limits_{t_q}^{t_{q+1}} \lambda_k(l_\gamma, t)\,dt \qquad \begin{pmatrix} \gamma = 0, \ldots, r-1 \\ k = n_1, \ldots, n \\ q = 0, \ldots, s-1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Таким образом, для того чтобы найти все производные для итерации, необходимо проделать следующее

1. Решить систему (1) в области D с граничными условиями (2) — (4) и

$$x_i(l_\alpha + 0, t) = [x_i(l_\alpha + 0, t)]^j \qquad (\alpha = 1, \ldots, r-1;\ i = n_1, \ldots, n)$$

где индекс j — номер итерации, а $[x_i(l_\alpha + 0, t)]^j$ — значения управляющих функций $x_i(l_\alpha + 0, t)$, найденные на предыдущей, j-й итерации.

2. Найденные значения $x_i(l, t)$, $y_j(l, t)$ запомнить в достаточно большом числе точек области D.

3. Решить систему (18) с граничными условиями (19), (20), используя запомненные значения $x_i(l, t)$, $y_j(l, t)$.

4. Одновременно с решением системы (18) при помощи формулы (34) вычислить значения производных $\partial I / \partial v_{k\gamma}^q$.

Таким образом, для проведения одной итерации требуется один раз решить систему (1) и один раз систему (18).

Отметим, что для системы (1) граничные условия заданы только на отрезках $l = \mathrm{const}$ или $t = \mathrm{const}$. Поэтому ее решение не представит больших затруднений, например при помощи метода прямых.

То же самое относится и к системе (19), только при ее решении будем двигаться по обоим координатам «назад» от $l = l_r$ до $l = l_0$ и от $t = T$ до $t = 0$.

Осуществление итерации при помощи формул (32) обеспечивает сходимость последовательности приближений, по крайней мере, к локальному максимуму. В случае, если предполагается наличие нескольких локальных максимумов, то для нахождения глобального максимума может быть эффективно применен один из глобальных методов поиска [7], так как наиболее трудоемкую часть этих методов составляет вычисление компонентов градиента оптимизируемой функции.

Поступила 2 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Froment G. F., Bishoff K. B. Non-steady state behavior of fixed bed catalitic reactors due to catalist fouling. Chem. Engng. Sci., 1961, vol. 16, p. 189.
2. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 10.
3. Егоров А. И. Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Лурье К. А. Задача Майера—Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. Гостехиздат, М., 1950.
6. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959.
7. Бочаров И. Н., Фельдбаум А. А. Автоматический оптимизатор для поиска минимального из нескольких минимумов (глобальный оптимизатор). Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 3.