О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЛЕБАНИЯМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. Х. Харасахал

(Алма-Ата)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_s / dt = f_s(t, x_1, \ldots, x_m) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

Здесь $f_s(t, x_1, \ldots, x_m)$ — квазипериодические относительно t функции с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Следовательно, f_s будут диагональными [1] функциями от периодических функций $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ с периодами ω_k по переменным u_k, т. е. $f_s(t, x_1, \ldots, x_m) = \Phi_s(t, \ldots, t, x_1, \ldots, x_m)$.

Наряду с системой (1) рассматривается система

$$\frac{\partial x_s}{\partial u_1} + \frac{\partial x_s}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial u_n} = \Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

Вопрос о существовании и единственности решений системы (2) рассмотрен в [2]. Там же показано, что периодическое решение системы (2) порождает на диагонали $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = t$ квазипериодическое решение системы (1). Кроме этих квазипериодических решений, система (1) может иметь еще такие квазипериодические решения, которые порождаются непериодическими решениями системы (2). Такие решения не рассматриваются.

Применяя к системе (2) анализ, предложенный Н. П. Еругиным для обыкновенных уравнений [3], можно установить, используя диагональ $u_k = t$, что, если система (1) имеет квазипериодическое решение $\varphi_k(t)$ с частотным базисом γ, то либо функции f_s будут квазипериодическими относительно t с частотным базисом, соизмеримым с γ, либо они становятся квазипериодическими с частотным базисом γ после замены x_k на φ_k; в этом случае функции f_s могут, вообще говоря, и не быть квазипериодическими, или они будут квазипериодическими с частотным базисом β, не соизмеримым с частотным базисом γ.

Определение 1. Пусть $(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$ — фиксированная точка. Будем говорить, что система функций $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ $(s = 1, \ldots, m)$ зависит решающим образом от переменных $u_1, \ldots, u_n$ в точке $(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$, если хоть одна из функций $h_s(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$ не является постоянной [4].

Совокупность функций $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ $(s = 1, \ldots, m)$ зависит от переменных $u_1, \ldots, u_n$ решающим образом, если она зависит от этих переменных решающим образом во всякой точке $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$.

Пусть Q обозначает множество тех точек $(x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ)$, в которых система функций $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ не зависит от переменных u_k решающим образом. Методом, указанным в [4], можно доказать следующее: пусть функции Φ_s системы (2) — периодические по переменным u_k соответственно с периодами ω_k. Пусть $x_s = \psi_s(u_1, \ldots, u_n)$ — периодическое решение системы (2) с периодами δ_k и пусть числа δ_k/ω_k иррациональны. Тогда $(\psi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \psi_m(u_1, \ldots, u_n)) \in Q$ для любой точки $(u_1^\circ, \ldots, u_n^\circ)$ (в частности, и для точек $(u_1^\circ, \ldots, u_n^\circ)$, лежащих на диагонали).

Следствие 1. Если система функции $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ зависит решающим образом от переменных $u_1, \ldots, u_n$ и если $x_s = \psi_s(u_1, \ldots, u_n)$ — периодическое решение системы (2) периодов $\delta_1, \ldots, \delta_n$, то числа δ_k / ω_k рациональны.

Следствие 2. Если функции $f_s(t)$ в системе (I) зависят решающим образом от переменного t, то частотные базисы функций f_s и функций φ_s, — решений системы (1), соизмеримы.

В дальнейшем будем считать, что функции $\Phi_s(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$ зависят решающим образом от переменных $u_1, \ldots, u_n$.

Пусть E_n — евклидово пространство величин $u_1, \ldots, u_n$. Вектор z с компонентами $x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_m = x_m(u_1, \ldots, u_n)$, где $x_k(u_1, \ldots, u_n)$ — вещественные непрерывные функции будем называть точкой m-мерного метрического пространства N, метрику которого определим формулой

$$\rho(z_1, z_2) = \sup\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{i1} - x_{i2})^2\right)^{1/2}$$

Здесь x_{i1} и x_{i2} — компоненты векторов z_1 и z_2 соответственно. Заметим, что всякое решение уравнений (2) есть точка пространства N. Пусть при помощи формул

$$y_k(u_1, \ldots, u_n) = F_k(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_n)) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

каждая точка $P(x_1, \ldots, x_m)$ пространства N однозначно преобразуется в другую его точку $P_1(y_1, \ldots, y_m)$. В этом случае будем говорить, что формулы (3) определяют точечное преобразование T пространства N самого в себя [5].

$$P_1 = TP \tag{4}$$

Точка P_2 получается из точки P путем двукратного преобразования T^2, если $P_2 = TP_1 = T(TP)$. Аналогичное преобразование, состоящее в k-кратном последовательном применении преобразования T, обозначим через T^k.

Определение 2. Точку P^* будем называть неподвижной точкой преобразования T, если преобразование T переводит точку P^* в себя, т. е.

$$TP^* = P^* \quad \text{или} \quad x_k^*(u_1, \ldots, u_n) = F_k(x_1^*(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_m^*(u_1, \ldots, u_n)) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

Назовем ε-окрестностью точки $P^*(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ совокупность точек $P(x_1, \ldots, x_m)$, для которых $\rho(P, P^*) < \varepsilon$.

Неподвижную точку P^* назовем асимптотически устойчивой в малом, если для любой точки P, принадлежащей достаточно малой ε-окрестности P^*, выполняется условие $\rho(T^kP, P^*) < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $\max \varepsilon_k \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Неподвижная точка P^* называется неустойчивой, если для некоторого $\varepsilon > 0$ в любой, сколь угодно малой окрестности точки P^* есть точки P, которые при последовательном применении к ним преобразования T выходят за пределы ε-окрестности неподвижной точки P^*.

Решение $Z(u_1, \ldots, u_n) = \{x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_n)\}$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию

$$z_{01}(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n) = \{x_1(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n), \ldots, x_m(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n)\}$$

будем обозначать через $z(u_1, \ldots, u_n, u_1^\circ, z_{01})$.

Вектор-функция $z(u_1, \ldots, u_n, u_1^\circ, z_{01})$ будет непрерывна по совокупности переменных, и основные ее свойства выражаются равенствами

$$z(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n, u_1^\circ, z_{01}) \equiv z_{01} \tag{5}$$
$$z(u_1^{(2)}, u_2, \ldots, u_n, u_1^{(1)}, z(u_1^{(1)}, u_2, \ldots, u_n, u_1^\circ, z_{01})) = z(u_1^{(2)}, u_2, \ldots, u_n, u_1^\circ, z_{01})$$

Допустим, что каждое решение системы (2) определено по u_1 на промежутке $[0, \omega_1]$. Тогда формулу

$$T(z_{01}) = z(\omega_1, u_2, \ldots, u_n, 0, z_{01})$$

будем называть оператором Пуанкаре — Андронова T_1 преобразования гиперплоскости $u_1 = 0$ в себя [6]. Периодическое по u_1 с периодом ω_1 решение $z(u_1, \ldots, u_n, 0, z_{01})$ системы (2) удовлетворяет равенству

$$z(\omega_1, u_2, \ldots, u_n, 0, z_{01}) = z_{01}$$

т. е. начальное условие, определяющее периодическое решение,— это неподвижная точка оператора Пуанкаре—Андронова. Пусть, наоборот, z_{01} — неподвижная точка оператора T_1. Тогда из равенства (5) вытекает, что

$$z(u_1 + \omega_1, u_2, \ldots, u_n, 0, z_{01}) = z(u_1 + \omega_1, u_2, \ldots, u_n, \omega_1, z(\omega_1, u_2, \ldots, u_n, 0, z_{01})) =$$
$$= z(u_1 + \omega_1, u_2, \ldots, u_n, \omega_1, z_{01}) \tag{6}$$

Но из периодичности правых частей системы (2) относительно u_1 следует, что

$$z(u_1 + \omega_1, u_2, \ldots, u_n, \omega_1, z_{01}) = z(u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, z_{01})$$

Поэтому из (6) вытекает, что $z(u_1, \ldots, u_n, 0, z_{01})$ — периодическое по u_1 решение системы (2). Подобным же образом можно рассмотреть операторы Пуанкаре — Андронова $T_2, \ldots, T_n$.

Следовательно, для того чтобы система (2) имела периодическое решение $z_j(u_1, \ldots, u_n, u_j^\circ, z_{0j})$ по переменному u_j с периодом ω_j, необходимо и достаточно, чтобы оператор T_j имел неподвижные точки. Положим

$$z_j(u_1^0, u_2, u_1, \ldots, u_n u_1, u_j^\circ, z_{0j}) = \varphi_j(u_2, \ldots, u_1)$$

Пусть операторы $T_1, T_2, \ldots, T_n$ имеют неподвижные точки и $\varphi_j = \varphi$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда периодические решения z_j с периодом ω_j по переменному u_j сливаются (в силу единственности) в одно решение z системы (2), периодическое по всем переменным $u_1, \ldots, u_n$ соответственно с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы система (1) имела квазипериодическое решение, порождаемое периодическим решением системы (2), необходимо и достаточно, чтобы операторы $T_1, \ldots, T_n$ имели неподвижные точки и $\varphi_j = \varphi$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Пусть $\sigma > 0$ — выбранное малое число. Обозначим через v_σ множество тех точек пространства E_n, которые находятся в σ-окрестности диагонали $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$. Пусть $M(u_1, \ldots, u_n)$ — некоторая точка из множества v_σ. Если какая-либо координата $u_j \to \infty$, то для того чтобы точка M оставалась при этом в v_σ, нужно, чтобы и все остальные координаты $u_k \to \infty$.

Определение. Решение $z(u_1, \ldots, u_n) = \{x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_n)\}$ системы (2) с начальными условиями $x_i(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n)$ будем называть асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $r > 0$, что для всякого другого решения $y(u_1, \ldots, u_n)$ системы (2) с начальными условиями

$$y_i(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n) = x_i(u_1^\circ, u_2, \ldots, u_n) + \delta_i(u_2, \ldots, u_n)$$

где $\| \delta \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}\| < r$ (норма в смысле метрики в N), при всех конечных значениях $u_1, \ldots, u_n$ из множества v_σ имеет место

$$\| y(u_1, \ldots, u_n) - z(u_1, \ldots, u_n)\| < \varepsilon$$

и одновременно

$$\| y(u_1, \ldots, u_n) - z(u_1, \ldots, u_n)\| \to 0 \qquad \text{при } u_j \to 0$$

с условием, что $(u_1, \ldots, u_n) \in v_\sigma$.

Можно показать, что, в области v_σ имеет место не только соответствие между периодическими решениями и неподвижными точками преобразований T_j, но и соответствие между их устойчивостями. Именно из устойчивости по Ляпунову периодического решения системы (2) следует устойчивость неподвижных точек, и, обратно (поскольку периоды решения кратны периодам системы (2)), из устойчивости неподвижных точек преобразований следует устойчивость по Ляпунову соответствующего периодического решения.

Поступила 25 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. Гостехиздат, 1953.
2. Харасахал В. Х. О квазипериодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. Курцвейль Я. и Вейвода О. О периодических и почти-периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Чехосл. матем. ж., 1955, т. 5, 80.
5. Неймарк Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1958, № 1.
6. Красносельский М. А. Векторные поля на плоскости. Физматгиз, 1963.