8. Пусть дополнительная сила представлена в виде

$$F_r = \gamma(\varphi)\, r^{-3}, \qquad F_\varphi = \delta(\varphi)\, r^{-3} \tag{8.1}$$

где между функциями $\gamma(\varphi)$ и $\delta(\varphi)$ предположена зависимость

$$\gamma(\varphi) = \frac{d\delta(\varphi)}{d\varphi} - 2\frac{\delta^2(\varphi)}{p(\varphi)} - p(\varphi), \qquad p(\varphi) = 2\int \delta(\varphi)\, d\varphi \tag{8.2}$$

Второе уравнение (7.2) принимает интегрируемый вид

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{du}{d\varphi} + \frac{\delta(\varphi)}{p(\varphi)} u\right] = \frac{k}{p(\varphi)} \tag{8.3}$$

Следовательно, система (7.2) интегрируется в квадратурах. Если считать в (7.2) заданной функцию $p(\varphi)$ и положить $F_r = \gamma(\varphi)\, r^{-2}$, $F_\varphi = 0.5\, r^{-3}\, dp\, /\, d\varphi$, то второе уравнение (7.2) принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{d\ln p}{d\varphi}\right) + u = \frac{k - \gamma(\varphi)}{p(\varphi)} \tag{8.4}$$

Функцию $p(\varphi)$ можно выбрать так, чтобы уравнение (8.4) интегрировалось.

Используя произвольные функции и постоянные, входящие в выражение дополнительной силы, можно применять рассмотренные случаи для приближенного изучения движения и в других случаях задания дополнительной силы **F**.

Поступила 20 V 1964

ЛИТЕТАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Валеев К. Г. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения материальной точки под действием ньютоновой силы и дополнительных возмущающих сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Ю. А. Архангельский (Москва)

Как известно, уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = -Mg\,(y_0\gamma'' - z_0\gamma') + \frac{3g}{R}(C - B)\,\gamma'\gamma'', \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \tag{0.1}$$
$$(ABC,\ pqr,\ \gamma\gamma'\gamma'',\ x_0y_0z_0)$$

приведены к квадратурам в настоящее время только в двух случаях [1-3]

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0; \qquad A = B, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0 \tag{0.2}$$

для которых существует четвертый алгебраический интеграл [4,5].

В работе [6] было показано, что отыскание всех случаев, когда общее решение уравнений (0.1) однозначно, не приводит к новым случаям, а сводится к исследованию общего решения в двух случаях (0.2).

Следовательно, выяснение однозначности общего решения в указанных двух случаях (0.2) приводит к выяснению возможности существования общей теоремы [7]: четвертый алгебраический интеграл системы (0.1) существует в тех и только тех случаях, в которых имеются однозначные на всей плоскости переменного t общие решения для $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$. Ниже доказывается однозначность общего решения уравнений (0.1) и остальных шести направляющих косинусов во втором случае (0.2).

1. В рассматриваемом случае, являющемся аналогом случая Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, уравнения движения

$$\begin{gathered} dp\,/\,dt - mqr = -(\alpha + au)\gamma', \quad u = \gamma'' \\ dq\,/\,dt + mpr = (\alpha + au)\gamma, \qquad dr\,/\,dt = 0 \\ d\gamma\,/\,dt = r\gamma' - qu \qquad (pqr,\ \gamma\gamma'\ u) \end{gathered} \tag{1.1}$$

имеют четыре независимых первых интеграла

$$p^2 + q^2 - 2\alpha u - au^2 = h, \quad p\gamma + q\gamma' - bu = k, \quad r = r_0, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 + u^2 = 1 \qquad (1.2)$$

$$\alpha = -Mgz_0 / A, \quad m = (A - C) / A, \quad a = 3gm / R, \quad b = (m - 1) r_0$$

Переходя к полярным координатам ρ и σ

$$p = \rho \cos \sigma, \qquad q = \rho \sin \sigma, \qquad \rho^2 = h + 2\alpha u + au^2 \qquad (1.3)$$

получим уравнения для определения u и σ [3]

$$(du / dt)^2 = (1 - u^2) \rho^2 - (k + bu)^2 \equiv \Phi (u) \qquad (1.4)$$

$$d\sigma / dt = - r_0 + (L_1 u + L_2) / \rho^2, \; L_1 = ak - \alpha b, \quad L_2 = \alpha k - bh$$

Из первого уравнения (1.4) следует, что u находится из обращения эллиптического интеграла и вместе с производной выражается в однозначных функциях времени.

Вместо величин p и q рассмотрим, на основании (1.3), функцию $W = \rho e^{i\sigma}$. Для доказательства того, что W является однозначной функцией времени (откуда вытекает и однозначность p и q), покажем, что функция $W_1 = e^{ir_0 t} W$ является однозначной функцией величин u и du/dt. Для этого достаточно исследовать в окрестности особых точек поведение функции W_1, представляя ее при помощи (1.4) в виде

$$W_1 = \rho e^{i\sigma_1}; \qquad \sigma_1 = \int F_1 (u)\, du, \qquad F_1 (u) = \frac{L_1 u + L_2}{\rho^2 \sqrt{\Phi (u)}} \qquad (1.5)$$

и разлагая полиномы ρ^2 и $\Phi (u)$ на множители

$$\rho^2 = a (u - \lambda_1) (u - \lambda_2), \qquad \Phi (u) = - a (u - \mu_1) (u - \mu_2) (u - \mu_3) (u - \mu_4) \quad (1.6)$$

Так как для доказательства однозначности общего решения уравнений (1.1) достаточно доказать однозначность решения при отсутствии у полинома $\Phi (u)$ кратных корней, то в дальнейшем будем полагать все μ_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ различными.

2. В зависимости от соотношений между корнями полиномов λ_j, μ_l $(j = 1, 2;$ $l = 1, 2, 3, 4)$, значения которых $u = \lambda_j$, $u = \mu_l$ являются особыми точками функции W_1, могут представиться пять случаев.

1°. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_j \neq \mu_l$. В этом случае из (1.4) следует

$$(L_1 u + L_2) \rho^{-2} = \sum_{j=1}^{j=2} {}^1/_2 (k + b\lambda_j) (u - \lambda_j)^{-1}, \qquad \Phi^{-1/2}(\lambda_j) = i\varepsilon (k + b\lambda_j)^{-1}$$

$$k + b\lambda_j \neq 0, \qquad \operatorname{res} [F_1 (u)]_{u=\lambda_j} = {}^1/_2\, i\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1, \; j = 1, 2) \qquad (2.1)$$

Из формул (1.5), (1.6), (2.1) получаем, что точки $u = \lambda_j$ являются устранимыми особыми точками, и в окрестности этих точек функция W_1 — однозначная функция u.

В окрестности каждой из точек μ_l $(l = 1, 2, 3, 4)$ будем иметь на основании первого уравнения (1.4) (2.2)

$$F_1 (u) = \xi_l^{-1/2} f_1 (\xi_l); \qquad \sigma_1 = \xi_l^{1/2} f_2 (\xi_l) = \Phi^{1/2} (u) f_3 (\xi_l) = f_3 (\xi_l) (du / dt) \; (\xi_l = u - \mu_l)$$

Здесь и в дальнейшем $f_s (\eta)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ — голоморфные функции η. Из формул (1.5) и (2.2) следует, что в окрестности точек $u = \mu_l$ функция W_1 является однозначной функцией u и du / dt. Так как в остальных случаях доказательства аналогичны, укажем только отличие их от первого.

2°. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda \neq \mu_l$. В точке $u = \lambda$ получим

$$(L_1 u + L_2) \rho^{-2} = (k + \lambda b) (u - \lambda)^{-1}, \qquad \Phi^{-1/2} (\lambda) = i\varepsilon (k + \lambda b)^{-1} \qquad (2.3)$$

$$k + \lambda b \neq 0, \qquad \rho^2 = a (u - \lambda)^2, \quad \operatorname{res} [F_1 (u)]_{u=\lambda} = i\varepsilon, \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad (2.4)$$

3°. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 \neq \mu_s$ $(s = 2, 3, 4)$. В этом случае на основании первого уравнения (1.4) имеем $b^2 + k^2 \neq 0$.

В окрестности точки $u = \mu_1$ будем иметь

$$F_1 (u) = \xi_1^{-3/2} f_4 (\xi_1); \qquad \sigma_1 = \xi_1^{-1/2} f_5 (\xi_1) = \Phi^{-1/2} (u) f_6 (\xi_1) = f_6 (\xi_1) (du / dt)^{-1} \quad (2.5)$$

$$\rho = \xi_1^{1/2} f_7 (\xi_1) = \Phi^{1/2} (u) f_8 (\xi_1) = (du / dt) f_8 (\xi_1) \qquad (\xi_1 = u - \mu_1) \qquad (2.6)$$

4°. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$. В этом случае $b = k = 0$ и из первой формулы (1.4) и формулы (1.5) следует, что $\sigma_1 = \text{const}$, а ρ в окрестности точек $u = \lambda_j$ $(j = 1, 2)$ будет иметь вид (2.6).

5°. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \mu_1$. На основании формул (2.3) разложение в окрестности точки $u = \lambda$ будет иметь вид (2.5).

Таким образом, величины $p, q, r, \gamma'' = u$ являются однозначными функциями времени, и на основании уравнений (1.1) этим же свойством обладают γ и γ'.

3. Покажем теперь, что остальные шесть направляющих косинусов будут также однозначными функциями времени. Для этого, вводя обычным образом углы Эйлера θ, φ, ψ, достаточно показать [8], что будут однозначными выражения

$$\cos\varphi\cos\psi, \quad \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi\sin\theta, \quad \cos\psi\sin\theta \tag{3.1}$$

Из формул для величин $\gamma, \gamma', \gamma''$

$$\gamma = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma'' = \cos\theta$$

являющихся по доказанному однозначными функциями времени, следует

$$\sin\varphi = V_1\sin\theta, \qquad \cos\varphi = V_2\sin\theta \tag{3.2}$$

Здесь и далее V_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — однозначные функции времени.

Вместо выражений $\sin\theta\sin\psi$ и $\sin\theta\cos\psi$ рассмотрим функцию

$$W_2 = \sqrt{1 - u^2}e^{i\psi} \tag{3.3}$$

где ψ на основании (1.2) будет определяться из уравнения

$$d\psi \,/\, dt = (k + bu) \,/\, (1 - u^2) \tag{3.4}$$

и покажем, что W_2 — однозначная функция времени. Для этого достаточно показать, представляя величину ψ на основании первой формулы (1.4) и формулы (3.4) в виде

$$\psi = \int F_2(u)\,du, \qquad F_2(u) = \frac{k + bu}{(1 - u^2)\sqrt{\Phi(u)}} \tag{3.5}$$

что W_2 будет однозначной функцией величин u и $du \,/\, dt$. Доказательство отличается от проведенного для функции W_1 тем, что в формулах первого, третьего и четвертого случая предыдущего пункта вместо λ_1 и λ_2 надо подставить 1 и -1, σ_1 — заменить на ψ, ρ — на $\rho_1 = (1 - u^2)^{1/2}$, $F_1(u)$ — на $F_2(u)$, L_1 — на b, L_2 — на k.

Следовательно, W_2 является однозначной функцией времени и

$$\sin\psi = V_3\sin\theta, \qquad \cos\psi = V_4\sin\theta \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.2) и (3.6) следует, что выражения (3.1), а с ними и остальные шесть направляющих косинусов будут однозначными функциями времени.

Таким образом, для выяснения возможности существования указанной выше теоремы остается исследовать однозначность общего решения в первом случае (0.2) при условии $A \neq B$ (при $A = B$ однозначность общего решения вытекает из полученных выше результатов).

Поступила 3 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. K o b b G. Sur le probléme de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Bull. Soc. math., 1895, vol. 23.
2. Х а р л а м о в а Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. СО АН СССР, 1959, № 6.
3. Б е л е ц к и й В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
4. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. 26, вып 6.
5. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об алгебраических интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
6. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
7. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об алгебраических и однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
8. А п п е л ь П. Теоретическая механика, т. 2. Физматгиз, 1960.