НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

К. Г. Валеев, Г. Н. Щеглов (Ленинград)

Рассматриваются некоторые случаи задания сил, дополнительных к ньютоновой, при которых уравнения движения интегрируются в квадратурах.

1. При выводе уравнений движения имеем систему уравнений

$$d^2\mathbf{r} / dt^2 = -k\mathbf{r} / r^3 + \mathbf{F} \qquad (k = \mathrm{const}, \ r = |\mathbf{r}|) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad d\mathbf{r} / dt = \mathbf{r}_0^{\cdot}, \quad t = t_0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки M с единичной массой; $\mathbf{F}$ — сила, дополнительная к ньютоновой. Центр притяжения находится в точке O.

Рассматривается случай плоского движения. Сила $\mathbf{F}$ лежит в плоскости движения. Введем полярную систему координат r,φ с полюсом в точке O, φ — угол, отсчитываемый от некоторого неподвижного направления.

В полярной системе координат уравнения движения (1.1) имеют вид [1]

$$r^{\cdot\cdot} - r\varphi^{\cdot 2} = -k/r^2 + F_r, \quad r\varphi^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\varphi^{\cdot} = F_\varphi \qquad (r^{\cdot} = dr/dt) \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$r = r_0, \quad r^{\cdot} = r^{\cdot}_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot}, \quad t = t_0 \tag{1.4}$$

Здесь F_r и F_φ — проекции силы $\mathbf{F}$ на направления r и φ соответственно. Введем отношение α и β проекций дополнительной силы к ньютоновой силе

$$\alpha = F_r r^2 k^{-1}, \quad \beta = F_\varphi r^2 k^{-1} \tag{1.5}$$

Делаем замену переменных в уравнениях (1.3), положив

$$u = r^3\varphi^{\cdot 2}k^{-1} - 1, \qquad v = r^2 r^{\cdot}\varphi^{\cdot}k^{-1} \tag{1.6}$$

и переходим к новой независимой переменной φ.

Для u, v, в силу (1.3) и (1.6), получаем систему уравнений

$$du / d\varphi = -v + 2\beta, \qquad dv / d\varphi = u + \alpha + \beta v / (1 + u) \tag{1.7}$$

Эта система уравнений особенно удобна для применения приближенных асимптотических методов. Введем еще переменные x, y

$$x = kr^{-3}\varphi^{\cdot -2}, \qquad y = r^{\cdot}r^{-1}\varphi^{\cdot -1} \tag{1.8}$$

В силу системы (1.3) для x, y находим систему уравнений, принимая φ за независимую переменную

$$dx/d\varphi = xy - 2\beta x^2, \qquad dy/d\varphi = 1 - x(1 - \alpha) - \beta xy + y^2 \tag{1.9}$$

Переменная y имеет простой геометрический смысл $y = \operatorname{ctg}\theta$, где θ — угол между вектором $\mathbf{r}$ и скоростью $\mathbf{r}^{\cdot}$. Переменные u, v и x, y связаны простой зависимостью

$$u = x^{-1} - 1, \qquad v = yx^{-1} \tag{1.10}$$

Если системы (1.7) или (1.9) будут проинтегрированы, то решение системы (1.3) найдется в квадратурах. Далее рассматривается несколько частных случаев.

2. Пусть проекции дополнительной силы к ньютоновой имеют вид

$$F_r = \frac{k}{r^2}\,\omega\left(\frac{k}{r^3\varphi^{\cdot 2}}\right), \qquad F_\varphi = m\frac{kr^{\cdot}}{r^3\varphi^{\cdot}}, \qquad m = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Здесь $\omega(x)$ — произвольная интегрируемая функция от x.

Уравнения (1.9) имеют вид

$$\frac{dx}{d\varphi} = xy - 2myx^2, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = 1 - x(1 - \omega(x)) + y^2(1 - mx) \tag{2.2}$$

общий интеграл выражается в виде

$$\frac{y^2(1 - 2mx)}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \int \frac{\omega(x)}{x^3}\,dx = C \tag{2.3}$$

Найдем решение в частном случае. Уравнения (2.2) допускают частное решение

$$x = 0.5\, m^{-1}, \qquad y = 2g \operatorname{tg} g\, (\varphi + C_1), \qquad g^2 = 0.25—0.125\, m^{-1}\, (1 - \omega\, (0.5\, m^{-1})) \tag{2.4}$$

Из (1.8), интегрируя, находим

$$r = C_2\, (y^2 + 4g^2) = 4C_2 g^2 \cos^{-2} g\, (\varphi + C_1)$$

$$t = 8g^2 \sqrt{0.5\, C_2{}^3 k^{-1} m^{-1}}\, \{0.5 \sin g\, (\varphi + C_1) \cos^{-2} g\, (\varphi + C_1) +$$

$$+ 0.5 \ln \operatorname{tg}\, (0.5\, g\, (\varphi + C_1) + 0.25\, \pi)\} \tag{2.5}$$

Движение происходит по разматывающейся спирали, имеющей асимптоту. Аналогично рассматривается случай отрицательной и нулевой правой части в g^2.

Уравнения (1.3) интегрируются в элементарных функциях в частном случае

$$m = 0.5, \qquad \omega\, (x) \equiv 0, \qquad C = -1, \qquad x_0 \neq 1, \qquad y_0 \neq 0$$

$$y_0{}^2\, (1 - x_0) + 1 - 2x_0 + x_0{}^2 = 0 \tag{2.6}$$

3. Рассматривается частный случай задания дополнительной силы $\mathbf{F}$

$$F_r = kr^{-2}\, \omega\, (\varphi), \qquad F_\varphi = mr\varphi^{\cdot 2}, \qquad m = \text{const} \tag{3.1}$$

Здесь $\omega\, (\varphi)$ — произвольная интегрируемая функция φ.

Уравнения (1.7) принимают вид

$$du/d\varphi = 2mu - v + 2m, \qquad dv/d\varphi = u + mv + \omega\, (\varphi) \tag{3.2}$$

и интегрируются в квадратурах как линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Произведем интегрирование в простом частном случае

$$\omega\, (\varphi) \equiv 0, \qquad v = \frac{2m}{1 + 2m^2}, \qquad u = -\frac{2m^2}{1 + 2m^2} \tag{3.3}$$

Из (1.6) находим значения r, t, выраженные через φ

$$d\, (\ln r) = [v/(1 + u)]\, d\varphi = 2m d\varphi, \qquad r = C_1 e^{2m\varphi}$$

$$\varphi^{\cdot 2} = k\, (1 + u)\, r^{-3}, \qquad t = \sqrt{C_1{}^3\, (1 + 2m^2)\, k^{-1}}\, (3m)^{-1}\, e^{3m\varphi} + C_2 \tag{3.4}$$

Движение происходит по логарифмической спирали. В общем случае можно доказать, что неподвижным точкам системы (1.7) или (1.9) соответствует движение точки M по логарифмической спирали.

4. Рассматривается случай задания дополнительной силы

$$F_r = \frac{k\, (n + 1)}{r^2} - r\varphi^{\cdot 2}, \qquad F_\varphi = \frac{km\varphi^{\cdot}}{rr^{\cdot}} \tag{4.1}$$

где числа n, m предполагаются произвольными. Из уравнений (1.9) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\, (x\, (n - m) + y^2)}{xy^2 - 2mx^2} \tag{4.2}$$

Замена $u = y^2$ приводит это уравнение к однородному. После интегрирования получаем интеграл уравнения (4.2)

$$x^{-2} y^{-2m/n}\, (2nx + y^2)^{(m+n)/n} = C_1{}^2 \tag{4.3}$$

Уравнения (1.3) полностью интегрируются в интересном частном случае

$$m > 0, \qquad n = -m, \qquad x^{-2}\, y^{-2} = C_1{}^2, \qquad C_1 > 0, \qquad y = C_1 x^{-1} \tag{4.4}$$

Первое уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2m}{C_1}\, (\lambda^3 - x^3), \qquad \lambda = (C_1{}^2\, (2m)^{-1})^{1/3} \tag{4.5}$$

Из (4.5) находим

$$\varphi = \frac{C_1}{2m} \left(\frac{1}{6\lambda^2} \ln \frac{x^2 - \lambda x + \lambda^2}{(x - \lambda)^2} + \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - \lambda}{\lambda \sqrt{2}} \right) + C_2 \tag{4.6}$$

Из уравнений (4.4), (4.5) следует, что при возрастании φ переменные x, y стремятся к постоянным значениям

$$x \to \lambda, \qquad y = C_1 \lambda^{-1}, \qquad \varphi \to \infty \tag{4.7}$$

Траектория точки M будет приближаться к некоторой логарифмической спирали,

$$r = C \exp\, \{C_1 \lambda^{-1} \varphi\}\, (1 + o\, (1)) \qquad (\varphi \to \infty) \tag{4.8}$$

Принимая x за независимую переменную, интегрируем уравнения (1.8)

$$r = C_3 x \frac{1}{(\lambda^3 - x^3)^{1/3}}, \qquad t = \frac{C_1^2 C_3}{3m} \frac{\sqrt{C_3}}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{\lambda^3 - x^3}} + C_4 \tag{4.9}$$

Исключая из (4.6), (4.9) величину φ, при $x \to \lambda$ находим C в (4.8)

$$C = C_3 3^{-1/3} \exp(-\pi / 6 \sqrt{3}) \tag{4.10}$$

5. Если в уравнениях (1.9) величины α, β имеют вид

$$\alpha = 1 + a + by^2x^{-1} - x^{-1}, \quad \beta = my^{-1} \qquad (a, b, m = \text{const}) \tag{5.1}$$

то уравнения (1.9) имеют интеграл

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^l \left(2\alpha + (2\beta + 1) \frac{y^2}{x}\right)^s \frac{1}{x} = C, \qquad l = -\frac{m}{\alpha}, \qquad s = \frac{\alpha + m(2\beta + 1)}{\alpha(2\beta + 1)} \tag{5.2}$$

Если в уравнениях (1.9) положить

$$\alpha = 1 + m^{-1}y^2x^{-1} - x^{-1}, \qquad \beta = \text{const}, \quad m = \text{const} \tag{5.3}$$

то получим интеграл системы (1.9)

$$xy^{-2}(yx^{-1} + \beta m)^{2+m} = C \tag{5.4}$$

При определенном выборе постоянных в (5.1), (5.3) уравнения (1.3) интегрируются до конца. Например, возьмем в (5.3) $m = -2$. Уравнения (1.9) принимают вид

$$dx/d\varphi = xy - 2\beta x^2, \qquad dy/d\varphi = -y^2 - \beta xy \tag{5.5}$$

и имеют очевидное решение

$$x = [2\beta\varphi + C_1]^{-1}, \qquad y = 0 \tag{5.6}$$

Из (1.8) находим r, t

$$r = r_0 = \text{const}, \qquad t = \sqrt{r_0^3 k^{-1}}\, \beta^{-1}(2\beta\varphi + C_1) \tag{5.7}$$

Движение совершается по круговой орбите; для радиальной составляющей дополнительной силы F_r находим выражение

$$F_r = kr_0^{-2}(1 - C_1 - 2\beta\varphi) \tag{5.8}$$

6. Рассматривается частный случай задания дополнительной силы $\mathbf{F}$

$$F_r = \frac{k}{r^2}\omega(u, v), \qquad F_\varphi = \frac{k}{2r^2} v \tag{6.1}$$

где u, v определены (1.6), а $\omega(u, v)$ — произвольная функция u, v. Уравнения (1.7) интегрируются в квадратурах. Найдем решение в частном случае

$$F_r = \alpha kr^{-2}, \qquad F_\varphi = -{}^1/_2\, r^{\cdot}\varphi^{\cdot}, \qquad \alpha = \text{const} \tag{6.2}$$

Из (1.7) найдем (6.3)

$$u = C_1, \qquad v = a \operatorname{tg}(b\varphi + C_2); \qquad a^2 = 2(C_1 + \alpha)(1 + C_1) > 0, \qquad b = 0.5\, a(1 + C_1)^{-1}$$

Из (1.6) находим выражение для r

$$d(\ln r) = [v / (1 + u)]\, d\varphi, \qquad r = C_3 \cos^{-2}(b\varphi + C_2) \tag{6.4}$$

Траектория совпадает с траекторией, определяемой формулой (2.6). Время t определяется по формуле, аналогичной (2.5). Движение происходит по разматывающейся спирали. При этом для F_φ находим выражение через φ

$$F_\varphi = 0.5\, ka\, C_3^{-2} \sin(b\varphi + C_2) \cos^3(b\varphi + C_3) \tag{6.5}$$

При приближении к асимптоте, когда $b\varphi + C_2 \to {}^1/_2\,\pi$, составляющая $F_\varphi \to 0$.

7. В качестве переменных в системе (1.3) примем

$$u = r^{-1}, \qquad p = r^4\varphi^{\cdot 2} \tag{7.1}$$

за аргумент возьмем угол φ.

Для u, p находим уравнения, совпадающие с уравнениями (2.2) в работе [2]

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{2}{u^3} F_\varphi, \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{p} - \frac{1}{u^2 p} F_r - \frac{1}{u^3 p} F_\varphi \frac{du}{d\varphi} \tag{7.2}$$

Далее указаны новые случаи интегрируемости уравнений (7.2).

8. Пусть дополнительная сила представлена в виде

$$F_r = \gamma(\varphi)\, r^{-3}, \qquad F_\varphi = \delta(\varphi)\, r^{-3} \tag{8.1}$$

где между функциями $\gamma(\varphi)$ и $\delta(\varphi)$ предположена зависимость

$$\gamma(\varphi) = \frac{d\delta(\varphi)}{d\varphi} - 2\frac{\delta^2(\varphi)}{p(\varphi)} - p(\varphi), \qquad p(\varphi) = 2\int \delta(\varphi)\, d\varphi \tag{8.2}$$

Второе уравнение (7.2) принимает интегрируемый вид

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{du}{d\varphi} + \frac{\delta(\varphi)}{p(\varphi)}u\right] = \frac{k}{p(\varphi)} \tag{8.3}$$

Следовательно, система (7.2) интегрируется в квадратурах. Если считать в (7.2) заданной функцию $p(\varphi)$ и положить $F_r = \gamma(\varphi)\, r^{-2}$, $F_\varphi = 0.5\, r^{-3}\, dp\,/\,d\varphi$, то второе уравнение (7.2) принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{d\ln p}{d\varphi}\right) + u = \frac{k - \gamma(\varphi)}{p(\varphi)} \tag{8.4}$$

Функцию $p(\varphi)$ можно выбрать так, чтобы уравнение (8.4) интегрировалось.

Используя произвольные функции и постоянные, входящие в выражение дополнительной силы, можно применять рассмотренные случаи для приближенного изучения движения и в других случаях задания дополнительной силы **F**.

Поступила 20 V 1964

ЛИТЕТАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Валеев К. Г. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения материальной точки под действием ньютоновой силы и дополнительных возмущающих сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Ю. А. Архангельский (Москва)

Как известно, уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = -Mg\,(y_0\gamma'' - z_0\gamma') + \frac{3g}{R}(C - B)\,\gamma'\gamma'', \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \tag{0.1}$$
$$(ABC,\ pqr,\ \gamma\gamma'\gamma'',\ x_0y_0z_0)$$

приведены к квадратурам в настоящее время только в двух случаях [1-3]

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0; \qquad A = B, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0 \tag{0.2}$$

для которых существует четвертый алгебраический интеграл [4,5].

В работе [6] было показано, что отыскание всех случаев, когда общее решение уравнений (0.1) однозначно, не приводит к новым случаям, а сводится к исследованию общего решения в двух случаях (0.2).

Следовательно, выяснение однозначности общего решения в указанных двух случаях (0.2) приводит к выяснению возможности существования общей теоремы [7]: четвертый алгебраический интеграл системы (0.1) существует в тех и только тех случаях, в которых имеются однозначные на всей плоскости переменного t общие решения для $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$. Ниже доказывается однозначность общего решения уравнений (0.1) и остальных шести направляющих косинусов во втором случае (0.2).

1. В рассматриваемом случае, являющемся аналогом случая Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, уравнения движения

$$\begin{aligned} dp\,/\,dt - mqr &= -(\alpha + au)\gamma', \qquad u = \gamma'' \\ dq\,/\,dt + mpr &= (\alpha + au)\gamma, \qquad dr\,/\,dt = 0 \\ d\gamma\,/\,dt &= r\gamma' - qu \qquad (pqr,\ \gamma\gamma'\ u) \end{aligned} \tag{1.1}$$