О КАТАНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. П. Бычков

(Москва)

Задача о катании твердого тела, ограниченного поверхностью, по другой неподвижной поверхности рассматривалась в работах многих ученых. Но прежде всего следует отметить исследования [1-7], которые содержат почти все основные результаты, полученные в этой задаче в настоящее время. В данной работе, выполненной методом Воронца, для случая катания тела вращения[1] по поверхности вращения указаны некоторые новые случаи интегрируемости.

1. Введем системы прямоугольных осей координат $Ox_1x_2x_3$ и $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; $\mathbf{i}_1^1$, $\mathbf{i}_2^1$, $\mathbf{i}_3^1$ — единичные векторы осей), неизменно связанных соответственно с твердым телом и с поверхностью — основанием (все системы координат в работе — левые). Это позволяет определять положение тела координатами x_{10}^1, x_{20}^1, x_{30}^1 точки O в осях $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ и углами Эйлера φ, ψ, θ (чистое вращение, прецессия, нутация) между введенными осями. Проекции вектора скорости $\mathbf{v}_0$ точки O и вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на оси $Ox_1x_2x_3$ обозначим через k, l, m и p, q, r.

Далее, вводя для точек поверхности S, ограничивающей твердое тело, радиус-вектор ρ с началом в точке O и гауссовы координаты q^1, q^2, будем задавать ее уравнение в виде

$$\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\varrho}(q^1, q^2) \qquad (\boldsymbol{\varrho} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3) \tag{1.1}$$

а коэффициенты первых двух квадратичных форм обозначать через a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22} (для простоты полагаем, что координатные линии поверхностей являются линиями кривизны). В точке касания M к поверхности S присоединим подвижной репер Mq^1q^2n с единичными векторами, направленными по касательным к координатным линиям и нормали,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\boldsymbol{\varrho}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\boldsymbol{\varrho}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}(\boldsymbol{\varrho}_1 \times \boldsymbol{\varrho}_2) \quad \left(\boldsymbol{\varrho}_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\boldsymbol{\varrho}\right) \tag{1.2}$$

и укажем проекции вектора ρ на оси этого репера

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\rho\frac{\partial\rho}{\partial q^1}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\rho\frac{\partial\rho}{\partial q^2}, \quad \varepsilon \quad (\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{1.3}$$

Введем еще девять косинусов углов между осями $Ox_1x_2x_3$ и Mq^1q^2n при помощи соотношений

$$\mathbf{i}_k = l_{1k}\mathbf{e}_1 + l_{2k}\mathbf{e}_2 + l_{3k}\mathbf{e}_3 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Все сказанное здесь для поверхности S, ограничивающей твердое тело, имеет место и для поверхности — основания S^1 (соответствующие величины обозначаются теми же буквами, но с индексом). Далее, следуя Воронцу, будем определять положение тела обобщенными координатами q^1, q^2, q_1^1, q_1^2, ϑ (первые четыре величины — гауссовы координаты точки M, а ϑ — угол между осями q^1 и q_1^2 в той же точке).

Для проекций угловой скорости тела ω на оси подвижного репера Mq^1q^2n получаем следующие выражения[2] (здесь и в дальнейшем верхний и нижний знаки отве-

---

[1] Здесь под телом вращения понимается твердое тело, ограниченное поверхностью вращения, ось которой проходит через центр инерции и есть ось динамической симметрии тела.

[2] Первые слагаемые в этих выражениях являются проекциями угловой скорости осей $Ox_1x_2x_3$ относительно осей Mq^1q^2n на те же оси Mq^1q^2n, их обозначаем ниже σ_1, τ_1, n_1.

чают случаям $e_3 = e_3^1$ и $e_3 = -e_3^1$ соответсвенно):

$$\sigma = -\frac{b_{22}}{\sqrt{a_{22}}}\,q^{2\cdot} \pm \frac{b_{22}^1}{\sqrt{a_{22}^1}}\,q_1^{2\cdot}\sin\vartheta - \frac{b_{11}^1}{\sqrt{a_{11}^1}}\,q_1^{1\cdot}\cos\vartheta$$

$$\tau = \frac{b_{11}}{\sqrt{a_{11}}}\,q^{1\cdot} - \frac{b_{11}^1}{\sqrt{a_{11}^1}}\,q_1^{1\cdot}\sin\vartheta \mp \frac{b_{22}^1}{\sqrt{a_{22}^1}}\,q_1^{2\cdot}\cos\vartheta \qquad (1.4)$$

$$n = \frac{1}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q^2}\,q^{1\cdot} - \frac{\partial a_{22}}{\partial q^1}\,q^{2\cdot}\right) \mp \frac{1}{2\sqrt{a_{11}^1 a_{22}^1}}\left(\frac{\partial a_{11}^1}{\partial q_1^2}\,q_1^{1\cdot} - \frac{\partial a_{22}^1}{\partial q_1^1}\,q_1^{2\cdot}\right) - \frac{d\vartheta}{dt}$$

Уравнения неголономной связи в этой задаче будут (1.5)

$$\sqrt{a_{11}^1}\,q_1^{1\cdot} = \pm\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot}\sin\vartheta \mp \sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}\cos\vartheta, \qquad \sqrt{a_{22}^1}\,q_1^{2\cdot} = \sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot}\cos\vartheta + \sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}\sin\vartheta$$

причем формулы (1.4), используя эти соотношения, можно записать так:

$$\sigma = -\Delta_{12}\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot} - \Delta_{22}\sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}, \qquad \tau = \Delta_{11}\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot} + \Delta_{21}\sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}$$

$$n = -\vartheta^{\cdot} + \Delta_1\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot} - \Delta_2\sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}$$

где

$$\Delta_{11} = \frac{b_{11}}{a_{11}} \mp \frac{b_{11}^1}{a_{11}^1}\sin^2\vartheta \mp \frac{b_{22}^1}{a_{22}^1}\cos^2\vartheta, \qquad \Delta_{22} = \frac{b_{22}}{a_{22}} \mp \frac{b_{22}^1}{a_{22}^1}\sin^2\vartheta \mp \frac{b_{11}^1}{a_{11}^1}\cos^2\vartheta$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \mp\left(\frac{b_{22}^1}{a_{22}^1} - \frac{b_{11}^1}{a_{11}^1}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial\lg a_{11}}{\partial q^2} - \frac{\sin\vartheta}{2\sqrt{a_{22}^1}}\,\frac{\partial\lg a_{11}^1}{\partial q_1^2} \pm \frac{\cos\vartheta}{2\sqrt{a_{11}^1}}\,\frac{\partial\lg a_{22}^1}{\partial q_1^1}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\,\frac{\partial\lg a_{22}}{\partial q^1} \mp \frac{\sin\vartheta}{2\sqrt{a_{11}^1}}\,\frac{\partial\lg a_{22}^1}{\partial q_1^1} - \frac{\cos\vartheta}{2\sqrt{a_{22}^1}}\,\frac{\partial\lg a_{11}^1}{\partial q_1^2}$$

Уравнения движения твердого тела, ограниченного поверхностью, по другой неподвижной поверхности при условии, что точка O — центр инерции, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta}{\partial n} - (n-n_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + M(\xi\tau-\eta\sigma)\sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot} = P_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + (n-n_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} - (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta}{\partial n} - M(\xi\tau-\eta\sigma)\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot} = P_2 \qquad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n} + (\sigma-\sigma_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - (\tau-\tau_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} +$$

$$+ M\varepsilon\left(\sqrt{a_{11}}\,q^{1\cdot}\sigma + \sqrt{a_{22}}\,q^{2\cdot}\tau\right) - M\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial q^1}\,q^{1\cdot} + \rho\frac{\partial\rho}{\partial q^2}\,q^{2\cdot}\right)n = P_3$$

$$P_\alpha = \frac{\Delta_{\alpha 2}}{\sqrt{a_{11}}\,R}\frac{\partial U}{\partial q^1} - \frac{\Delta_{\alpha 1}}{\sqrt{a_{22}}\,R}\frac{\partial U}{\partial q^2} + \frac{1}{R}(\Delta_{\alpha 2}\Delta_1 + \Delta_{\alpha 1}\Delta_2)\frac{\partial U}{\partial\vartheta} \pm \qquad (\alpha = 1, 2)$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a_{11}^1}\,R}(\Delta_{\alpha 2}\sin\vartheta + \Delta_{\alpha 1}\cos\vartheta)\frac{\partial U}{\partial q_1^1} + \frac{1}{\sqrt{a_{22}^1}\,R}(\Delta_{\alpha 2}\cos\vartheta - \Delta_{\alpha 1}\sin\vartheta)\frac{\partial U}{\partial q_1^2}$$

$$P_3 = -\frac{\partial U}{\partial\vartheta} \qquad (1.7)$$

Здесь Θ—кинетическая энергия, выведенная с учетом уравнений связи (1.5), U—силовая функция, $R = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2$.

Полагая, что оси $Ox_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции, и обозначая через A, B, C главные центральные моменты инерции, получаем

$$2\Theta = M\rho^2(\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - M(\xi\sigma + \eta\tau + \varepsilon n)^2 +$$
$$+ A(\sigma l_{11} + \tau l_{21} + n l_{31})^2 + B(\sigma l_{12} + \tau l_{22} + n l_{32})^2 + C(\sigma l_{13} + \tau l_{23} + n l_{33})^2 \quad (1.8)$$

Далее находим, что косинусы углов оси Ox_1 с осями $O_1x_1^1$, $O_1x_2^1$, $O_1x_3^1$ суть (вид соответствующих косинусов для осей Ox_2, Ox_3 получается отсюда заменой величин l_{11}, l_{21}, l_{31} на l_{12}, l_{22}, l_{32} и l_{13}, l_{23}, l_{33}) (1.9)

$$l_{31}(\pm l_{3k}^1) + l_{21}(\mp l_{1k}^1 \cos\vartheta + l_{2k}^1 \sin\vartheta) + l_{11}(\pm l_{1k}^1 \sin\vartheta + l_{2k}^1 \cos\vartheta) \quad (k = 1, 2, 3)$$

Выражения координат центра инерции в осях $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ будут

$$x_{k0}^1 = x_k^1 - [(\pm l_{1k}^1 \sin\vartheta + l_{2k}^1 \cos\vartheta)\,\xi +$$
$$+ (\mp l_{1k}^1 \cos\vartheta + l_{2k}^1 \sin\vartheta)\,\eta + (\pm l_{3k}^1)\,\varepsilon] \quad (k = 1, 2, 3) \qquad (1.10)$$

2. Теперь перейдем к рассмотрению некоторых задач о катании тела вращения, ограниченного поверхностью вращения

$$x_1 = u\cos v, \qquad x_2 = u\sin v, \qquad x_3 = f(u)$$

по другой поверхности вращения

$$x_1^1 = u_1\cos v_1, \qquad x_2^1 = u_1\sin v_1, \qquad x_3^1 = f^1(u_1)$$

в которых силовая функция имеет вид $U(u, \vartheta, u_1)$. Такой случай имеет место: (1) если на тело действует сила тяжести, а ось $O_1x_3^1$ направлена по вертикали, а также (2) если на тело действуют силы, результирующая которых направлена от центра инерции к точке O_1 оси симметрии поверхности-основания и зависит только от расстояния между этими точками.

Первой рассмотрим задачу для тела, ограниченного сферой. Уравнения сферы в осях $Ox_1x_2x_3$ имеют вид (l — координата геометрического центра относительно оси Ox_3)

$$x_1 = R\sin u\cos v, \qquad x_2 = R\sin u\sin v, \qquad x_3 - l = R\cos u \qquad (2.1)$$

На основании этих уравнений получаем формулы

$$a_{11} = R^2, \quad a_{22} = R^2\sin^2 u, \quad b_{11} = -R, \quad b_{22} = -R\sin^2 u$$
$$l_{13} = -\sin u, \quad l_{23} = 0, \quad l_{33} = \cos u, \quad \rho^2 = R^2 + 2lR\cos u + l^2 \qquad (2.2)$$
$$\xi = -l\sin u, \qquad \eta = 0, \qquad \varepsilon = R + l\cos u \qquad (2.3)$$

Используя формулы (2.2), (2.3), выражение кинетической энергии запишем в виде

$$2\Theta = [A + M(R^2 + l^2 + 2Rl\cos u)]\,\tau^2 + [M(R + l\cos u)^2 + C\sin^2 u +$$
$$+ A\cos^2 u]\,\sigma^2 + 2\,[(A - C)\cos u + Ml(R + l\cos u)]\sin u\,\sigma n +$$
$$+ [C\cos^2 u + (A + Ml^2)\sin^2 u]\,n^2 \qquad (2.4)$$

Теперь выведем уравнения движения (1.6) тела вращения, ограниченного сферой, по любой неподвижной поверхности [1].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + (\tau + u^{\cdot})\frac{\partial\Theta}{\partial n} - (n + v^{\cdot}\cos u)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - MlR\sin^2 u\,\tau v^{\cdot} = P_1$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + (n + v^{\cdot}\cos u)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} - (\sigma - v^{\cdot}\sin u)\frac{\partial\Theta}{\partial n} + MlR\sin u\,\tau u^{\cdot} = P_2$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n} + (\sigma - v^{\cdot}\sin u)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - (\tau + u^{\cdot})\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + M(R + l\cos u)(Ru^{\cdot}\sigma + R\sin u\,v^{\cdot}\tau) +$$
$$+ MlR\sin u\,n u^{\cdot} = P_3 \qquad (2.5)$$

[1] Если в катящемся теле вокруг оси Ox_3 с постоянной скоростью ω' вращается ротор, центр инерции которого лежит в центре инерции тела, то к правым частям уравнений (1.6) добавляются члены (M, A, B, C — масса и моменты инерции всей системы, C' — момент инерции ротора относительно оси Ox_3, $\varkappa = C'\omega'$):

$$\varkappa(nl_{23} - \tau l_{33}), \ \varkappa(\sigma l_{33} - nl_{13}), \qquad \varkappa(\tau l_{13} - \sigma l_{23})$$

Положим, что поверхность-основание будет тоже сферой, уравнения которой в осях $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ суть

$$x_1^1 = R_1 \sin u_1 \cos v_1, \qquad x_2^1 = R_1 \sin u_1 \sin v_1, \qquad x_3^1 = R_1 \cos u_1 \tag{2.6}$$

и для которой на основании проделанных выше вычислений (2.2) имеют место аналогичные формулы

$$\begin{gathered} a_{11}^1 = R_1^2, \quad a_{22}^1 = R_1^2 \sin^2 u_1, \quad b_{11}^1 = -R_1, \quad b_{22}^1 = -R_1 \sin^2 u_1 \\ l_{13}^1 = -\sin u_1, \quad l_{23}^1 = 0, \quad l_{33}^1 = \cos u_1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Если катящееся тело вогнутой (выпуклой) стороной ограничивающей сферы касается выпуклой (вогнутой) стороны сферы-основания, имеет место равенство $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^1$ (ниже излагается именно этот случай); а если указанные поверхности касаются выпуклыми сторонами, имеет место равенство $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3^1$.

Уравнения связей (1.5) в этой задаче записываются в виде

$$R_1 u_1^{\bullet} = R u^{\bullet} \sin \vartheta - R \sin u v^{\bullet} \cos \vartheta, \qquad R_1 \sin u_1 v_1^{\bullet} = R u^{\bullet} \cos \vartheta + R \sin u v^{\bullet} \sin \vartheta \tag{2.8}$$

Выражения проекций угловой скорости тела на оси подвижного репера (1.4) принимают форму

$$\sigma = -\frac{R - R_1}{R_1} \sin u v^{\bullet}, \qquad \tau = \frac{R - R_1}{R_1} u^{\bullet}, \qquad n = -\cos u v^{\bullet} + \cos u_1 v_1^{\bullet} - \vartheta^{\bullet} \tag{2.9}$$

Наконец, силовая функция силы тяжести (для определенности ось $O_1x_3^1$ направим вертикально вниз), согласно (1.10), (2.3), (2.7), выглядит здесь так:

$$U = Mg\, [(R_1 - R - l \cos u) \cos u_1 - l \sin u \sin u_1 \sin \vartheta] \tag{2.10}$$

а силовая функция «центральных сил» с центрами O и O_1, как показано в работе [2], есть функция одной координаты u.

Перейдем теперь непосредственно к вопросу об интегрировании системы уравнений (2.5), (2.8), (2.9) в случае, когда силовая функция заданных сил зависит только от одной координаты u («центральные силы»). Изучение этого вопраса можно провести в два этапа: сначала определить величины u, v, σ, τ, n, а затем рассмотреть задачу об определении остальных переменных u_1, v_1, ϑ. Допустим, что центр инерции лежит в геометрическом центре сферы, ограничивающей тело. При таком предположении вопрос об отыскании величин u, v, σ, τ, n сводится к интегрированию двух уравнений

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(A - C) \sin 2u \frac{dn}{du} + (MR^2 + A\cos^2 u + C \sin^2 u) \frac{d\sigma}{du} + \\ + \left\{ [MR^2 + (A - C)\cos^2 u] \left(1 - \frac{R}{R_1}\right) + A \cos^2 u + C \sin^2 u \right\} n + \\ + \left[\frac{1}{2}(A - C)\left(\frac{R}{R_1} - 2\right) \sin 2u + (A + MR^2) \operatorname{ctg} u\right] \sigma = \varkappa \left(1 - \frac{R}{R_1}\right) \cos u \\ (A \sin^2 u + C \cos^2 u) \frac{dn}{du} + \frac{1}{2}(A - C) \sin 2u \frac{d\sigma}{du} - \\ - \left\{\frac{1}{2} \sin 2u \left(\frac{R}{R_1} - 2\right) n - \left[\sin^2 u \left(\frac{R}{R_1} - 1\right) + \cos^2 u\right] \sigma\right\} (A - C) = \varkappa \left(1 - \frac{R}{R_1}\right) \sin u \end{gathered} \tag{2.11}$$

которые получаются из первого и третьего уравнений системы (2.5) (их разделили на $u^{\bullet}$ и преобразовали).

Сложив первое уравнение (2.11), умноженное на $-\operatorname{tg} u$, со вторым уравнением, получим уравнение

$$-(MR^2 + C)\left(\operatorname{tg} u \frac{d\sigma}{du} + \sigma\right) + C \frac{dn}{du} + \left[\left(\frac{R}{R_1} - 1\right) MR^2 - C\right] \operatorname{tg} u\, n = 0$$

а сложив второе уравнение, умноженное на $\operatorname{tg} u$, с первым уравнением,— уравнение

$$(MR^2+A)\frac{d\sigma}{du}+\left[\left(\frac{R}{R_1}-1\right)(A-C)\operatorname{tg} u+(MR^2+A)\operatorname{ctg} u\right]\sigma+$$
$$+A\operatorname{tg} u\frac{dn}{du}+\left[\left(\frac{R}{R_1}-1\right)(C-A-MR^2)+A\right]n=\left(1-\frac{R}{R_1}\right)\frac{\varkappa}{\cos u}$$

Они преобразуются заменой переменных

$$\xi=\sin u,\qquad \eta=\sin u\sigma,\qquad \zeta=\cos un \tag{2.12}$$

к такому виду

$$-(MR^2+C)\frac{d\eta}{d\xi}+C\frac{d\zeta}{d\xi}+\left(\frac{R}{R_1}-1\right)MR^2\,\frac{\xi}{1-\xi^2}\zeta=0$$
$$(MR^2+A)\frac{d\eta}{d\xi}+\left(\frac{R}{R_1}-1\right)(A-C)\frac{\xi}{1-\xi^2}\eta-A\frac{d\zeta}{d\xi}+$$
$$+\left(1-\frac{R}{R_1}\right)(MR^2+A-C)\frac{\xi}{1-\xi^2}\zeta+A\frac{1}{1-\xi^2}\left(\frac{d\zeta}{d\xi}+\frac{\xi}{1-\xi^2}\zeta\right)=\varkappa\left(1-\frac{R}{R_1}\right)\frac{\xi}{1-\xi^2}$$

Делая еще одну замену $x=1-\xi^2$, из первого уравнения находим соотношение

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{C}{MR^2+C}\frac{d\zeta}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right)\frac{MR^2}{MR^2+C}\frac{\zeta}{x} \tag{2.13}$$

а второе уравнение приводим к виду

$$(MR^2+A)\,x\frac{d\eta}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right)(A-C)\,\eta-Ax\frac{d\zeta}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right)(MR^2+A-C)\,\zeta+$$
$$+A\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{1}{2}\frac{\zeta}{x}\right)=\frac{1}{2}\varkappa\left(\frac{R}{R_1}-1\right)$$

Продифференцировав его по x, а затем подставив сюда соотношение (2.13), получим уравнение класса Фукса [8,9] с тремя особыми точками $a'=0$, $b'=-m$, $c'=\infty$ $(A\neq C)$

$$x^2(m+x)\frac{d^2\zeta}{dx^2}-x\left(\frac{1}{2}m-x\right)\frac{d\zeta}{dx}+\left(\frac{1}{2}m-k^2x\right)\zeta=0$$
$$\left(m=\frac{A(MR^2+C)}{MR^2(C-A)},\ k=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right)\right).$$

Сравнивая его с общим уравнением такого типа в форме Папперица [8,9]

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a'}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-b'}\right)\frac{d\zeta}{dx}+$$
$$+\left[\frac{(a'-b')\alpha\alpha'}{x-a'}+\frac{(b'-a')\beta\beta'}{x-b'}+\gamma\gamma'\right]\frac{\zeta}{(x-a')(x-b')}=0$$

находим, что

$$\alpha=1,\quad \beta=0,\quad \gamma=k,\quad \alpha'={}^1/_2,\quad \beta'=-{}^1/_2,\quad \gamma'=-k$$

Это позволяет написать искомое решение в виде

$$P\left\{\begin{matrix}0 & -m & \infty & \\ 1 & 0 & k & x\\ {}^1/_2 & -{}^1/_2 & -k & \end{matrix}\right\}=xP\left\{\begin{matrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1+k & (-x/m)\\ -{}^1/_2 & -{}^1/_2 & 1-k & \end{matrix}\right\}$$

Отсюда следует, что функция ζ выглядит так:

$$\zeta=\cos^2 u\left\{C_1F\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right),\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right);\ \frac{3}{2};\ -\frac{\cos^2 u}{m}\right]+\right.$$
$$\left.+C_2\frac{1}{\cos u}F\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right),\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}-1\right);\ \frac{1}{2};\ -\frac{\cos^2 u}{m}\right]\right\}$$

а в случае $R_1=\infty$ (сфера-основание вырождается в плоскость)

$$\zeta=\cos u\left[C_1\cos u\left(1+\frac{\cos^2 u}{m}\right)^{-1/2}+C_2\right]$$

Теперь, учитывая известное соотношение

$$\frac{d}{dy}F(a,b;c;y)=\frac{ab}{c}F(a+1,\ b+1;\ c+1;\ y)$$

при помощи равенства (2.13) можно определить величины η и σ, как функции переменной u. После чего, подставив выражения n и σ в интеграл живых сил, задачу об определении переменной u, как функции времени, сведем к квадратуре. А это значит, что первый этап интегрирования системы (2.5), (2.8), (2.9) по существу пройден.

3. Далее перейдем к рассмотрению задач, подобных тем, какие изучал Нётер [4], и также принадлежащих к указанному выше типу. А именно, будем предполагать, что движущееся тело есть «однородный шар». В этом случае формулы (2.2) не изменяются, формулы (2.3) записываются так:

$$\rho^2=R^2,\qquad \xi=0,\qquad \eta=0,\qquad \varepsilon=R \tag{3.1}$$

а выражение кинетической энергии принимает вид

$$2\Theta=(A+MR^2)(\sigma^2+\tau^2)+An^2 \tag{3.2}$$

Учитывая соотношения (1.4), (2.2), (3.1), на основании формул (1.6) получим уравнения движения «однородного шара» по любой неподвижной поверхности

$$\begin{gathered}(MR^2+A)\,\sigma^{\cdot}+(\tau+u^{\cdot})An-(n+v^{\cdot}\cos u)(MR^2+A)\,\tau=P_1\\ (MR^2+A)\,\tau^{\cdot}+(n+v^{\cdot}\cos u)(MR^2+A)\,\sigma-(\sigma-v^{\cdot}\sin u)An=P_2\\ n^{\cdot}-(u^{\cdot}\sigma+\sin uv^{\cdot}\tau)=P_3\end{gathered}\tag{3.3}$$

Рассмотрим решение задачи о движении этого тела под действием силы тяжести по поверхности параболоида вращения[1]; схема решения аналогичной задачи в случае любой поверхности вращения будет такой же, как в данной частной задаче.

Параболоид-основание задан в осях $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ уравнениями

$$x_1^1=u_1\cos v_1,\qquad x_2^1=u_1\sin v_1,\qquad x_3^1=-\frac{1}{2p}u_1^2 \tag{3.4}$$

Отсюда выводим формулы

$$\begin{gathered}a_{11}^1=\frac{p^2+u_1^2}{p^2},\quad a_{22}^1=u_1^2,\quad b_{11}^1=-\frac{1}{\sqrt{p^2+u_1^2}},\quad b_{22}^1=-\frac{u_1^2}{\sqrt{p^2+u_1^2}}\\ l_{13}^1=-\frac{u_1}{\sqrt{p^2+u_1^2}},\quad l_{23}^1=0,\quad l_{33}^1=\frac{p}{\sqrt{p^2+u_1^2}}\end{gathered}\tag{3.5}$$

Если тело вогнутой (выпуклой) стороной ограничивающей сферы касается выпуклой (вогнутой) стороны параболоида, имеет место равенство $e_3=e_3^1$ (ниже излагается именно этот случай). Уравнения связей имеют здесь вид

$$\frac{\sqrt{p^2+u_1^2}}{p}u_1^{\cdot}=Ru^{\cdot}\sin\vartheta-R\sin uv^{\cdot}\cos\vartheta,\qquad u_1v_1^{\cdot}=Ru^{\cdot}\cos\vartheta+R\sin uv^{\cdot}\sin\vartheta \tag{3.6}$$

Для проекций угловой скорости тела на оси подвижного репера получаем

$$\begin{gathered}\sigma=-\frac{Ru_1^2}{\sqrt{p^2+u_1^2}\,(p^2+u_1^2)}\sin\vartheta\cos\vartheta u^{\cdot}-\\ -\left[-\sin u+\frac{R\sin u}{\sqrt{p^2+u_1^2}\,(p^2+u_1^2)}(p^2+u_1^2\sin^2\vartheta)\right]v^{\cdot}\\ \tau=\left[-1+\frac{R}{\sqrt{p^2+u_1^2}\,(p^2+u_1^2)}(p^2+u_1^2\cos^2\vartheta)\right]u^{\cdot}+\frac{R\sin u\,u_1^2}{\sqrt{p^2+u_1^2}\,(p^2+u_1^2)}\sin\vartheta\cos\vartheta v^{\cdot}\\ n=-\cos uv^{\cdot}+\frac{p}{\sqrt{p^2+u_1^2}}v_1^{\cdot}-\vartheta^{\cdot}\end{gathered}\tag{3.7}$$

[1] В работе [4] не точка касания, а центр тяжести движется по параболоиду вращения.

А силовая функция силы тяжести [1], согласно (3.1), (3.5), записывается так:

$$U = Mgx_{30}^1 = -Mg\left(\frac{1}{2p}u_1^2 + \frac{Rp}{\sqrt{p^2+u_1^2}}\right) \tag{3.8}$$

Отсюда на основании (1.7) находим

$$P_1 = f(u_1)\cos\vartheta, \qquad P_2 = f(u_1)\sin\vartheta, \quad P_3 = 0$$

Теперь приступим непосредственно к интегрированию системы уравнений (3.3), (3.6), (3.7). Прежде всего отметим соотношения, полученные из формул (3.6), (3.7)

$$\tau\cos\vartheta - \sigma\sin\vartheta = u_1\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+u_1^2}} - \frac{1}{R}\right)v_1^\bullet$$

$$\tau\sin\vartheta + \sigma\cos\vartheta = \frac{\sqrt{p^2+u_1^2}}{p}\left(\frac{p^2}{\sqrt{p^2+u_1^2}(p^2+u_1^2)} - \frac{1}{R}\right)u_1^\bullet$$

Затем сложим первое уравнение (3.3), умноженное на $-\sin\vartheta$, со вторым уравнением (3.3), умноженным на $\cos\vartheta$, и преобразуем эту сумму при помощи формул (3.6), (3.7) и указанных соотношений, в результате получим уравнение ($A = Mk^2$)

$$u_1\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{p^2+u_1^2}}\right)\frac{p^2+u_1^2}{p}\frac{dv_1^\bullet}{du_1} +$$

$$+2\left(-\frac{1}{R} + \frac{p^2}{\sqrt{p^2+u_1^2}(p^2+u_1^2)}\right)\frac{p^2+u_1^2}{p}v_1^\bullet - \frac{k^2}{R^2+k^2}n = 0$$

Используя те же формулы (3.6), (3.7), третье уравнение (3.3) представим так:

$$\frac{dn}{du_1} = -\frac{u_1^3}{pR(p^2+u_1^2)}v_1^\bullet$$

Делая здесь замену $x = p(p^2+u_1^2)^{-1/2}$, из второго уравнения находим

$$v_1^\bullet = \frac{R}{p}\frac{x^3}{1-x^2}\frac{dn}{dx}, \qquad \frac{dv_1^\bullet}{dx} = \frac{R}{p}\left[\frac{x^3}{1-x^2}\frac{d^2n}{dx^2} + \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}\frac{dn}{dx}\right] \tag{3.9}$$

первое уравнение записываем в виде

$$\frac{1-x^2}{x}\left(1-\frac{R}{p}x\right)\frac{p}{R}\frac{dv_1^\bullet}{dx} - \frac{2}{x^2}\left(1-\frac{R}{p}x^3\right)\frac{p}{R}v_1^\bullet - \frac{k^2}{R^2+k^2}n = 0$$

А исключая из последнего уравнения при помощи соотношений (3.9) величины $v_1^\bullet$, $dv_1^\bullet/dx$, получаем для определения функции n следующее уравнение класса Фукса [8, 9]:

$$\left(x-\frac{p}{R}\right)x^2\frac{d^2n}{dx^2} + \left(3x-\frac{p}{R}\right)x\frac{dn}{dx} + \frac{p}{R}a^2n = 0 \qquad \left(a^2 = \frac{k^2}{R^2+k^2}\right)$$

Его решение имеет вид

$$n = x^a\left[C_1F(2+a, a; 1+2a; y) + C_2y^{-2a}F(2-a, -a; 1-2a; y)\right] \qquad (y = Rp^{-1}x)$$

Вторая искомая функция $v_1^\bullet$ определяется теперь из первого соотношения (3.9). Далее заметим, что в случае движения тела, ограниченного сферой, по любой поверхности при помощи формул (1.4), (1.5) можно вывести равенство

$$\sigma^2 + \tau^2 = u_1^{\bullet 2}\left(\frac{a_{11}^1}{R^2} + \frac{(b_{11}^1)^2}{a_{11}^1} \pm 2\frac{b_{11}^1}{R}\right) + v_1^{\bullet 2}\left(\frac{a_{22}^1}{R^2} + \frac{(b_{22}^1)^2}{a_{22}^1} \pm 2\frac{b_{22}^1}{R}\right) \tag{3.10}$$

Затем подставим это равенство и найденные ранее функции n и $v_1^\bullet$ в интеграл живых сил. Отсюда находим, что задача об отыскании переменной u_1 (как функции времени) сводится к квадратуре.

[1] Рассматривается случай движения тела по вогнутой стороне параболоида, здесь ось $O_1x_3^1$ направлена вертикально вниз.

Остается определить еще переменные u, v, ϑ. Но из уравнений связей (1.5) и формул (1.4) для случая движения тела, ограниченного сферой, по любой поверхности получаем три уравнения

$$
\begin{gathered}
Ru^{\cdot} = \pm \sqrt{a_{11}^1}\, u_1^{\cdot} \sin\vartheta + \sqrt{a_{22}^1}\, v_1^{\cdot} \cos\vartheta \\
R\sin u v^{\cdot} = \mp\sqrt{a_{11}^1}\, u_1^{\cdot}\cos\vartheta + \sqrt{a_{22}^1}\, v_1^{\cdot}\sin\vartheta \qquad (3.11)\\
\vartheta^{\cdot} = -n \mp \frac{1}{2\sqrt{a_{11}^1 a_{22}^1}}\left(\frac{\partial a_{11}^1}{\partial v_1} u_1^{\cdot} - \frac{\partial a_{22}^1}{\partial u_1} v_1^{\cdot}\right) - v^{\cdot}\cos u
\end{gathered}
$$

т. е. здесь имеем такую ситуацию, какая была изучена Воронцом. Кстати, в этой задаче есть много общего с предыдущей, в частности, здесь координаты u_1, v_1 и u, v, ϑ определяются так же, как во втором параграфе определялись координаты u, v и u_1, v_1, ϑ (соответственно).

Изложим теперь другой пример того же типа (простой, но интересный) — задачу о движении тяжелого «однородного шара» по неподвижной сфере.

Действуя здесь так же, как и в задаче с параболоидом, на основании (3.3), (2.8), (2.9) [1] находим уравнения

$$
\pm (MR^2 + A)\frac{R \mp R_1}{R}\left[\frac{d}{dt}(v_1^{\cdot}\sin u_1) + u_1^{\cdot} v_1^{\cdot}\cos u_1\right] - Anu_1^{\cdot} = 0, \qquad n = \text{const} \qquad (3.12)
$$

Умножим первое из них на $\sin u_1$ и проинтегрируем произведение, это дает соотношение ($A = Mk^2$, $\varkappa$ — постоянная)

$$
v_1^{\cdot}\sin^2 u_1 = \beta - b\cos u_1 \qquad (3.13)
$$

$$
\left(\beta = \frac{\varkappa R}{M(R^2 + k^2)(R \mp R_1)}, \quad b = \pm\frac{k^2 R n}{(R^2 + k^2)(R \mp R_1)}\right)
$$

Далее, используя (2.8) — (2.10), (3.2), интеграл живых сил запишем так:

$$
u_1^{\cdot 2} + v_1^{\cdot 2}\sin^2 u_1 = \alpha - a\cos u_1 \qquad (3.14)
$$

$$
\left(\alpha = \frac{2h - An^2}{M}\frac{R^2}{(R^2 + k^2)(R \mp R_1)^2}, \quad a = \pm\frac{2R^2 g}{(R^2 + k^2)(R \mp R_1)}\right)
$$

а исключая отсюда при помощи соотношения (3.13) величину $v_1^{\cdot}$ и делая затем замену $x = \cos u_1$, получим

$$
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (\alpha - ax)(1 - x^2) - (\beta - bx)^2
$$

Стоящий в правой части полином третьей степени принимает положительные значения при $x = -\infty$, отрицательные при $x = \pm 1$ и положительные при некоторых значениях x, лежащих между -1 и $+1$, так как в самом движении u_1 имеет действительные значения, т. е. он имеет корни

$$
-\infty < e_3 < -1 < e_2 < e_1 < 1
$$

Полагая, как обычно, $x = e_1 + (e_2 - e_1)\omega^2$, приводим рассматриваемое уравнение к виду

$$
\pm\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{a(e_3 - e_1)}\,dt \qquad \left(k^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}\right)
$$

Итак, задача о нахождении переменной x свелась к обращению эллиптического интеграла, и на основании этого уравнения можно написать

$$
x = e_1 + (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{a(e_3 - e_1)}\, t\right)
$$

Переменная v_1 определяется теперь из соотношения (3.13).

Отметим, что интегралы (3.12) — (3.14), которые допускают уравнения этой задачи, имеют тот же вид, что и классические интегралы задачи о вращении твердого

[1] При $e_3 = -e_3^1$ подразумеваются другие формулы.

тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа [10] (стр. 176), причем при $R_1 = 0$ (задача вырождается в упомянутой выше случай Лагранжа) из геометрических соображений и соотношений (3.11) — (3.14) находим ($e_3 = -e_3^1$): $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, $n = -r$, $u_1 = \theta$, $v_1 = \psi$, $\vartheta = \varphi$.

Используя уравнения (3.13), (3.14), нетрудно показать, как будет выглядеть кривая, описанная точкой касания на неподвижной сфере ([10], стр. 178) между параллелями $x = e_1$ и $x = e_2$. Можно проследить и глубже аналогию в этих задачах (в задаче о движении тела в случае Лагранжа и в задаче о катании «однородного шара»). В частности, если во второй задаче при $t = 0$ имеют место равенства $u_{10}^{\cdot} = 0$, $v_{10}^{\cdot} = 0$, $n_0 \neq 0$, $u_{10} \neq 0$, то получим знакомое частное решение, детальное описание которого проходит без осложнений ([10], стр. 181).

Далее, в случае касания поверхностей выпуклыми сторонами займемся вопросом об устойчивости частного решения

$$u_1^{\cdot} = 0, \qquad v_1^{\cdot} = 0, \qquad n = n_0, \qquad \sin u_1 = 0, \qquad \cos u_1 = -1$$

Устойчивость будем рассматривать по отношению к переменным

$$u_1^{\cdot}, \qquad \sin u_1 v_1^{\cdot}, \qquad n, \sin u_1, \qquad \cos u_1$$

полагая в возмущенном движении

$$u_1^{\cdot} = \xi, \quad \sin u_1 v_1^{\cdot} = \eta, \quad n = n_0 + \zeta, \quad \sin u_1 = \beta, \quad \cos u_1 = -1 + \delta$$

Сначала отметим, что в этой задаче существуют первые интегралы

$$(MR^2 + A)\left(\frac{R + R_1}{R}\right)^2 (u_1^{\cdot 2} + \sin^2 u_1 v_1^{\cdot 2}) + An^2 - 2Mg\,(R + R_1)\cos u_1 = 2h$$

$$(MR^2 + A)\,\frac{R + R_1}{R}\,(\sin u_1 v_1^{\cdot})\sin u_1 - An\cos u_1 = \varkappa$$

$$\sin^2 u_1 + \cos^2 u_1 = 1, \qquad n = n_0$$

Отсюда нетрудно получить первые интегралы V_1, V_2, V_3, V_4 и для уравнений возмущенного движения.

Теперь для определения достаточного условия устойчивости построим по методу Четаева функцию Ляпунова в форме связки интегралов [11]

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - [Mg\,(R + R_1) + An_0\lambda]\,V_3 + \mu V_4^2 -$$

$$-2\,(An_0 + A\lambda)\,V_4 = (MR^2 + A)\left(\frac{R + R_1}{R}\right)^2 \xi^2 + (MR^2 + A)\left(\frac{R + R_1}{R}\right)^2 \eta^2 +$$

$$+ 2\lambda\,(MR^2 + A)\,\frac{R + R_1}{R}\,\eta\beta - [Mg\,(R + R_1) + An_0\lambda]\,\beta^2 + (A + \mu)\,\zeta^2 -$$

$$-2\lambda A\delta\zeta - [Mg\,(R + R_1) + An_0\lambda]\,\delta^2 \qquad (A^2 = (MR^2 + A)\,(A + \mu))$$

Функция будет определенно-положительной при условии

$$A^2 n_0^2 - 4\,(MR^2 + A)\,Mg\,(R + R_1) > 0$$

которое при $R_1 = 0$ обращается в условие Майевского.

В заключение отметим, что в случае движения «однородного шара» по неподвижной сфере под действием «центральной силы» с центрами O_1 и O переменные u, v, σ, τ, n определяются так же, как в п. 2, а переменные u_1, v_1 — так же, как в п. 3, а это значит, что задача полностью разрешается в квадратурах.

4. Далее рассмотрим задачу о движении тела вращения по сфере в случае, когда тело опирается на сферу своим ограниченным плоскостью концом.

Допуская сначала, что поверхность-основание есть любая выпуклая поверхность, выведем уравнения движения этого тела. Уравнения плоскости в осях $Ox_1x_2x_3$ имеют вид (координату точки пересечения оси симметрии тела Ox_3 с плоскостью относительно той же оси обозначим буквой d)

$$x_1 = u\cos v, \qquad x_2 = u\sin v, \qquad x_3 = d \tag{4.1}$$

Отсюда находим

$$a_{11}=1,\quad a_{22}=u^2,\quad b_{11}=0,\quad b_{22}=0$$
$$l_{13}=0,\quad l_{23}=0,\quad l_{33}=1 \tag{4.2}$$
$$\rho^2=u^2+d^2,\quad \xi=u,\quad \eta=0,\quad \varepsilon=d$$

Выражение для кинетической энергии получим в виде

$$2\Theta=(A+Md^2)\,\sigma^2+(A+Mu^2+Md^2)\,\tau^2+(C+Mu^2)\,n^2-2Mdu\sigma n \tag{4.3}$$

Теперь, используя соотношения (1.4), (4.2), выведем искомые уравнения движения (к телу присоединен ротор)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}+\tau\frac{\partial\Theta}{\partial n}-(n+v^\cdot)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+Mu^2\tau v^\cdot=P_1-\varkappa\tau$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+(n+v^\cdot)\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}-\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial n}-Mu\tau u^\cdot=P_2+\varkappa\sigma \tag{4.4}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n}+\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}-\tau\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}+Md\,(u^\cdot\sigma+uv^\cdot\tau)-Munu^\cdot=P_3$$

Далее перейдем к рассмотрению основной задачи, то есть положим, что поверхность-основание будет сферой, которая в осях $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$ задана уравнениями (2.6), и для которой справедливы формулы (2.7). Ось Ox_3 для определенности в этом случае направим в сторону к сфере, поэтому будет иметь место равенство $\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3^1$. Теперь получим необходимые кинематические соотношения. Уравнения связей (1.5) записываются здесь в виде

$$R_1u_1^\cdot=-u^\cdot\sin\vartheta+uv^\cdot\cos\vartheta,\qquad R_1\sin u_1v_1^\cdot=u^\cdot\cos\vartheta+uv^\cdot\sin\vartheta \tag{4.5}$$

Проекции угловой скорости тела на оси подвижного репера будут

$$\sigma=\frac{u}{R_1}v^\cdot,\qquad \tau=-\frac{1}{R_1}u^\cdot,\qquad n=-v^\cdot-\cos u_1v_1^\cdot-\vartheta^\cdot \tag{4.6}$$

Остановимся еще на некоторых деталях. Во-первых, получим выражения проекции угловой скорости тела и проекции скорости центра инерции тела на оси $Ox_1x_2x_3$

$$p=\sigma\cos v-\tau\sin v,\qquad q=\sigma\sin v+\tau\cos v,\qquad r=n$$
$$k=u\sin vn-d\,(\sigma\sin v+\tau\cos v)$$
$$l=d\,(\sigma\cos v-\tau\sin v)-u\cos vn,\qquad m=u\tau$$

Во-вторых, расписывая при помощи формул (2.6), (4.1) выражения (1.9) и сравнивая их с соответствующими выражениями на стр. 45 [12], найдем значения углов Эйлера между осями $Ox_1x_2x_3$ и $O_1x_1^1x_2^1x_3^1$

$$\theta=\Pi-u_1,\qquad \psi=-{}^1/_2\Pi+v_1,\qquad \varphi=\Pi-v-\vartheta \tag{4.7}$$

Наконец, укажем вид силовых функций в интересных случаях. Силовая функция силы тяжести (для определенности ось $O_1x_3^1$ направим вертикально вверх), согласно (1.10), (4.2), (2.7) выглядит здесь так:

$$U=-Mg\,[(R_1+d)\cos u_1-u\sin u_1\sin\vartheta] \tag{4.8}$$

отсюда по формулам (1.7) находим

$$P_1=Mgd\sin u_1\cos\vartheta,\qquad P_3=-Mgu\sin u_1\cos\vartheta$$
$$P_2=Mgd\sin u_1\sin\vartheta+Mgu\cos u_1$$

а силовая функция «центральных» сил с центрами O_1 и O, как показано в работе [2], есть функция одной координаты u.

Займемся теперь непосредственно интегрированием системы уравнений (4.4), (4.5), (4.6) при условии, что силовая функция заданных сил зависит только от одной координаты u, а $d=0$. Вопрос об определении величин u, v, σ, τ, n сводится здесь к интегрированию двух линейных уравнений первого порядка с двумя функциями σ и n независимой переменной u ($C = Mk^2$)

$$\frac{d\sigma}{du} - \frac{C-A}{A}\frac{n}{R_1} + \frac{\sigma}{u} = \frac{\varkappa}{A}\frac{1}{R_1}, \qquad (k^2 + u^2)\frac{dn}{du} + un - u^2\frac{\sigma}{R_1} = 0$$

которые получаются из первого и третьего уравнений (4.4) (их разделили на $u^{\cdot}$).

Делая замену переменных

$$x = \sqrt{k^2 + u^2}\left(\frac{C-A}{A}\right)^{1/2}, \qquad y = u\sigma, \qquad z = n\sqrt{k^2 + u^2}\left(\frac{C-A}{A}\right)^{1/2} \tag{4.9}$$

эти уравнения преобразуем к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{R_1} + \frac{x}{R_1}\frac{\varkappa}{C-A}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{R_1}$$

Отсюда находим

$$y = C_1 e^{x/R_1} + C_2 e^{-x/R_1} - \frac{R_1\varkappa}{C-A}, \qquad z = C_1 e^{x/R_1} - C_2 e^{-x/R_1} - \frac{x\varkappa}{C-A}$$

Учитывая далее формулы (4.9) и обозначая через u_0, σ_0, n_0, α_0 соответствующие величины в начальный момент времени, это решение представим так:

$$u\sigma = (u_0\sigma_0 + r)\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + (n_0\sqrt{k^2 + u_0^2}\,m + r\alpha_0)\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) - r$$

$$n\sqrt{k^2 + u^2}\,m = (u_0\sigma_0 + r)\operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) + (n_0\sqrt{k^2 + u_0^2}\,m + r\alpha_0)\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - r\alpha$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{C-A}{A}}\sqrt{k^2 + u^2}, \quad r = R_1\frac{\varkappa}{C-A}, \quad m = \sqrt{\frac{C-A}{A}}\right)$$

Теперь, используя интеграл живых сил, получаем соотношения ($f_1(u)$ и $f_2(u)$ — известные функции координаты u)

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = R_1^2(\sigma^2 + \tau^2) = f_1(u), \qquad u^2\frac{dv}{dt} = R_1 u\sigma = f_2(u)$$

на основании которых задача определения переменных u и v, как функций времени, сводится к квадратурам. Таким образом, вопрос об отыскании величин u, v, σ, τ, n исчерпан.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к настоящей работе.

Поступила 10 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Киев, 1903.
2. Woronetz. Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung au einer beliebigen Fläche rollt. Math. Ann., 1910, vol. 70.
3. Woronetz. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Math. Ann., 1911, vol. 71.
4. Noether. Über die rollende Bewegung einer Kügel auf Rotationsflächen. München, 1909.
5. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1948.
6. Чаплыгин С. А. О катании шара на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1948.
7. Муштари Х. М. О катании тяжелого твердого тела вращения на неподвижной горизонтальной плоскости. Матем. сб., 1932, т. 39, № 1—2.
8. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Физматгиз, 1961.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Гостехиздат, 1951.
10. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. Физматгиз, 1961.
11. Четаев Н. Г. Устойчивость движений. Гостехиздат, 1955.
12. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
13. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.