О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

П. В. Харламов (Новосибирск)

Уравнения

$$\frac{dP_1}{dt} = (P_2 + \lambda_2)\frac{\partial T}{\partial P_3} - (P_3 + \lambda_3)\frac{\partial T}{\partial P_2} + \left(\frac{\partial T}{\partial R_3} - \mu_3\right)R_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial R_2} - \mu_2\right)R_3$$

$$\frac{dR_1}{dt} = R_2\frac{\partial T}{\partial P_3} - R_3\frac{\partial T}{\partial P_2} \qquad (123) \qquad (0.1)$$

$$2T = a_{ij}P_iP_j + b_{ij}R_iR_j + 2c_{ij}P_iR_j \qquad (0.2)$$

в общем случае описывают движение по инерции в идеальной безграничной жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. Стесняя параметры

$$a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij},\ \lambda_i,\ \mu_i \qquad (0.3)$$

определенными условиями, получаем из (0.1) уравнения более простых задач динамики твердого тела, таких как задача о движении в центральном ньютоновском поле сил тела, имеющего неподвижную точку, задача о движении тяжелого гиростата с установившимися внутренними циклическими движениями и др. [1]. При этом существенно, чтобы среди величин λ_i, μ_i имелись отличные от нуля, в противном случае указанная редукция дает лишь хорошо известные решения Тиссерана и Жуковского. Однако большинство известных решений общей задачи найдены именно при условиях

$$\lambda_i = 0, \qquad \mu_i = 0 \qquad (0.4)$$

Здесь необходимо отметить исследования Чаплыгина [2] о линейных интегралах.

В статье [1] указаны решения с одним линейным интегралом, причем некоторые из ограничений (0.4) сняты. Ниже получены решения с двумя и тремя линейными интегралами. При сведении задачи к квадратурам использованы и известные интегралы уравнений (0.1)

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2, \qquad (P_1 + \lambda_1)R_1 + (P_2 + \lambda_2)R_2 + (P_3 + \lambda_3)R_3 = m \qquad (0.5)$$

$$T - \mu_iR_i = h \qquad (0.6)$$

§ 1. О решениях с двумя линейными интегралами. Неизменно связанную с телом систему координат выбираем так, чтобы линейные интегралы приняли вид

$$P_1 = k_1R_1 + s_1 \qquad (12) \qquad (1.1)$$

Постоянные k_1, k_2, s_1, s_2 подлежат определению.

Производные от (1.1) по t в силу (0.1), вследствие (1.1), исчезают тождественно относительно P_3, R_1, R_2, R_3, если выполнены условия

$$c_{21} = -k_1a_{12} \qquad (12) \qquad (1.2)$$

$$c_1 = c_3 - k_1a_1 + (k_1 - k_2)a_3, \qquad c_{32} = -c_{23}, \qquad k_1c_{23} = k_1c_{13} = 0$$

$$b_1 = b_3 + k_1k_2a_1 - (c_1 - c_3)(k_1 - k_2), \qquad b_{23} = 0, \qquad b_{12} = k_1k_2a_{12}$$

$$\mu_1 = c_1s_1 + c_{21}s_2 + c_{13}\lambda_3 - c_3(s_1 + \lambda_1) - k_2(a_1s_1 + a_{12}s_2) \qquad (1.3)$$

$$\mu_3 = c_{23}s_2 + c_{13}s_1 + c_{31}(s_1 + \lambda_1) - (c_1 + k_1a_1)\lambda_3 \qquad (12)$$

$$a_{23} = 0, \qquad (a_1s_1 + a_{12}s_2)\lambda_3 = 0, \qquad (s_1 + \lambda_1)c_{32} = 0$$

$$a_1s_1 + a_{12}s_2 = (s_1 + \lambda_1)a_3 \qquad (12) \qquad (1.4)$$

§ 2. Первое решение. Постоянные k_1, k_2, s_1 и s_2 находется из (1.2), (1.4). Для упрощения их полагаем вначале заданными, а из (1.2), (1.4) определяем c_{12}, c_{21}, λ_1, λ_2.

В случае $\lambda_3 = 0$ условиям (1.2) — (1.4) удовлетворим коэффициентами квадратичной формы

$$\begin{aligned} 2T = {} & a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 + 2a_{12}P_1P_2 + (b + a_1k_1^2)R_1^2 + \\ & + (b + a_2k_2^2)R_2^2 + [b + a_3(k_1 - k_2)^2]R_3^2 + 2k_1k_2a_{12}R_1R_2 + \\ & + 2[c_3 - a_1k_1 + a_3(k_1 - k_2)]P_1R_1 + 2[c_3 - a_2k_2 + a_3(k_2 - k_1)]P_2R_2 + \\ & + 2c_3P_3R_3 - 2k_1a_{12}P_2R_1 - 2k_2a_{12}P_1R_2 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

и величинами

$$\mu_1 = [c_3 + a_3(k_1 - k_2)]\, s_1 - \left(k_1 + k_2 + \frac{c_3}{a_3}\right)(a_1 s_1 + a_{12} s_2) \tag{2.2}$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{a_1}{a_3} - 1\right) s_1 + \frac{a_{12}}{a_3} s_2, \qquad \mu_3 = 0 \qquad (12)$$

Обозначая

$$J_1 = P_1 - k_1 R_1 - s_1, \qquad J_2 = P_2 - k_2 R_2 - s_2, \qquad J_3 = P_3 - (k_1 + k_2) R_3 \tag{2.3}$$

получаем из (0.1) при условиях (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{dt} &= (a_3 - a_2) J_2 J_3 - a_{12} J_1 J_3 + 2a_3 k_1 R_3 J_2 \\ \frac{dJ_2}{dt} &= -(a_3 - a_1) J_1 J_3 + a_{12} J_2 J_3 - 2a_3 k_2 R_3 J_1 \\ \frac{dJ_3}{dt} &= (a_2 - a_1) J_1 J_2 + a_{12}(J_1^2 - J_2^2) + J_1 L_1 - J_2 L_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$L_1 = -2k_2 a_{12} R_1 + 2[a_1 k_1 + a_3(k_2 - k_1)] R_2 + (a_3 - a_1)(s_2 + \lambda_2) - a_{12}(s_1 + \lambda_1) \qquad (12)$$

Полагая

$$J_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_3 = \mathrm{const} = s \tag{2.5}$$

удовлетворим уравнениям (2.4) независимо от второй группы уравнений (0.1). Последние вследствие (2.5) записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= 2k_1 a_3 R_2 R_3 - a_3(s_2 + \lambda_2) R_3 + a_3 s R_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= -2k_2 a_3 R_1 R_3 + a_3(s_1 + \lambda_1) R_3 - a_3 s R_1 \\ \frac{dR_3}{dt} &= 2a_3(k_2 - k_1) R_1 R_2 + a_3(s_2 + \lambda_2) R_1 - a_3(s_1 + \lambda_1) R_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Известны два интеграла этих уравнений

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2$$

$$k_1 R_1^2 + k_2 R_2^2 + (k_1 + k_2) R_3^2 + (s_1 + \lambda_1) R_1 + (s_2 + \lambda_2) R_2 + s R_3 = m$$

и, следовательно, $R_1 = R_1(R_3)$, $R_2 = R_2(R_3)$. Зависимость R_3 от t устанавливается теперь квадратурой из (2.6).

Найденное решение содержит 14 независимых параметров

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_{12},\ b,\ k_1,\ k_2,\ c_3,\ s_1,\ s_2,\ s,\ R,\ m,\ R_3^\circ$$

Перенесем начало координат в центральную точку тела, а оси совместим с главными осями эллипсоида импульсивных моментов (выкладки аналогичны § 3, 5 работы [1]). В новых осях условия (2.1), (2.2) и интегралы (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} 2T &= a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 + 2(c_1 P_1 R_1 + c_2 P_2 R_2 + c_3 P_3 R_3) + 2c_{12}(P_1 R_2 + P_2 R_1) + \\ &+ \left\{ b + \frac{2a_1[(a_3 - a_2)(c_3 - c_1) + a_3(c_3 - c_2)]^2 + c_{12}^2[a_1^2(2a_2 - a_3) + a_2^2 a_3]}{2[a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2]^2} \right\} R_1^2 + \\ &+ \left\{ b + \frac{2a_2[(a_3 - a_1)(c_3 - c_2) + a_3(c_3 - c_1)]^2 + c_{12}^2[a_2^2(2a_1 - a_3) + a_1^2 a_3]}{2[a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2]^2} \right\} R_2^2 + \\ &+ \left\{ b + a_3 \frac{[a_1(c_3 - c_2) - a_2(c_3 - c_1)]^2 + c_{12}^2(a_1 + a_2)^2}{[a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2]^2} \right\} R_3^2 + \\ &+ 2c_{12} \frac{a_2(c_3 - c_1) + a_1(c_3 - c_2)}{a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2} R_1 R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \left[c_1 a_3 - c_3 a_1 - a_1 a_3 \frac{(a_3 - a_1)(c_3 - c_2) + a_3(c_3 - c_1)}{a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2} \right] \frac{\lambda_1}{a_2 - a_3} + \\ &+ \frac{2a_3^2(a_1 + a_2) c_{12}}{a_3(a_1 + a_2) - a_1 a_2} \frac{\lambda_2}{a_2 - a} \end{aligned}$$

$$\mu_2 = \left[c_2a_3 - c_3a_2 - a_2a_3\frac{(a_3-a_2)(c_3-c_1)+a_3(c_3-c_2)}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}\right]\frac{\lambda_2}{a_2-a_3}+$$
$$+\frac{2a_3^2(a_1+a_2)c_{12}}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}\frac{\lambda_1}{a_1-a_3}, \qquad \lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = 0$$

$$P_1 = \frac{(a_3-a_2)(c_3-c_1)+a_3(c_3-c_2)}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}R_1 + \frac{a_2c_{12}}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}R_2 + \frac{a_3}{a_1-a_3}\lambda_1$$

$$P_2 = \frac{(a_3-a_1)(c_3-c_2)+a_3(c_3-c_1)}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}R_2 + \frac{a_1c_{12}}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}R_1 + \frac{a_3}{a_2-a_3}\lambda_2$$

$$P_3 = \frac{(2a_3-a_2)(c_3-c_1)+(2a_3-a_1)(c_3-c_2)}{a_3(a_1+a_2)-a_1a_2}R_3 + s$$

Из (2.4) легко получить два решения с произвольными начальными данными, обобщающие случаи интегрируемости Стеклова [3] и Ляпунова [4]. Имеем

$$\frac{d}{dt}\{(a_3-a_1)J_1^2+(a_3-a_2)J_2^2\} = 2a_{12}\{(a_3-a_2)J_2^2-(a_3-a_1)J_1^2\}J_3 +$$
$$+4a_3\{k_1(a_3-a_1)-k_2(a_3-a_2)\}R_3J_1J_2$$

Пусть $a_{12}=0$, $k_1 = \varkappa(a_3-a_2)$, $k_2 = \varkappa(a_3-a_1)$. Тогда

$$(a_3-a_1)J_1^2+(a_3-a_2)J_2^2 = \text{const}$$

или, с учетом (2.3), (2.2),

$$(a_3-a_1)\left[P_1-\varkappa(a_3-a_2)R_1+\frac{a_3}{a_3-a_1}\lambda_1\right]^2+$$
$$+(a_3-a_2)\left[P_2-\varkappa(a_3-a_1)R_2+\frac{a_3}{a_3-a_2}\lambda_2\right]^2 = \text{const}$$

Если же $a_1=a_2=a_3=a$, $a_{12}=0$, то уравнения (2.4) дают

$$k_1J_1^2+k_2J_2^2 = \text{const}$$

Из (1.3), (2.2)

$$k_1 = \frac{c_3-c_2}{a}, \quad k_2 = \frac{c_3-c_1}{a}, \quad s_1 = \frac{\mu_1}{2(c_1-c_3)}, \quad s_2 = \frac{\mu_2}{2(c_2-c_3)}$$

и, следовательно,

$$(c_1-c_3)\left[P_1+\frac{c_2-c_3}{a}R_1-\frac{\mu_1}{2(c_1-c_3)}\right]^2+$$
$$+(c_2-c_3)\left[P_2+\frac{c_1-c_3}{a}R_2-\frac{\mu_2}{2(c_2-c_3)}\right]^2 = \text{const}$$

Другим путем эти случаи интегрируемости получены в статье [1].

§ 3. **Второе решение.** Полагаем теперь $\lambda_3 \neq 0$ и ограничимся случаем $k_1 = k_2 = 0$. Определяя из (1.2) — (1.4) постоянные (0.3) и s_1, s_2, получаем

$$2T = a_1P_1^2+a_2P_2^2+a_3P_3^2+b(R_1^2+R_2^2+R_3^2)+2c(P_1R_1+P_2R_2+P_3R_3)+$$
$$+2c_{23}(P_2R_3-P_3R_2)+2c_{13}(P_1R_3-P_3R_1)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0, \quad \lambda_3=\lambda, \quad \mu_1=c_{13}\lambda, \quad \mu_2=c_{23}\lambda, \quad \mu_3=-c\lambda, \quad P_1=0, \quad P_2=0$$

Интегралы (0.5,6) в этом случае

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=R^2, \qquad (P_3+\lambda)R_3 = m$$
$$2(P_3+\lambda)(c_{13}R_1+c_{23}R_2) = a_3P_3^2+2c(P_3+\lambda)R_3+bR^2-2h$$

дают P_3, R_1, R_2 в зависимости от R_3, а последнее уравнение (0.1) принимает вид

$$\left(\frac{dR_3}{dt}\right)^2 = (c_{13}^2+c_{23}^2)(R^2-R_3^2)R_3^2-\frac{1}{4m^2}[a_3(m-\lambda R_3)^2+(2cm+bR^2-2h)R_3^2]^2$$

и, следовательно, R_3 — эллиптическая функция времени.

Перенося начало координат в центральную точку тела, запишем найденное решение так

$$2T = a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 + \left[b - 4\frac{a_1c_{13}^2}{(a_1 - a_3)^2}\right]R_1^2 + \left[b - 4\frac{a_2c_{23}^2}{(a_2 - a_3)^2}\right]R_2^2 +$$

$$+ \left[b - 4\frac{a_3c_{13}^2}{(a_1 - a_3)^2} - 4\frac{a_3c_{23}^2}{(a_2 - a_3)^2}\right]R_3^2 - 4\frac{a_1 + a_2}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}c_{13}c_{23}R_1R_2 +$$

$$+ 2c(P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3) + 2c_{13}(P_1R_3 + P_3R_1) + 2c_{23}(P_2R_3 + P_3R_2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda, \quad \mu_1 = \frac{a_1 + a_3}{a_3 - a_1}c_{13}\lambda, \quad \mu_2 = \frac{a_2 + a_3}{a_3 - a_2}c_{23}\lambda, \quad \mu_3 = -c\lambda$$

$$P_1 + \frac{2c_{13}}{a_1 - a_3}R_1 = 0, \qquad P_2 + \frac{2c_{23}}{a_2 - a_3}R_2 = 0$$

§ 4. О решениях с тремя линейными интегралами. Поступая так же, как в § 1, получаем условия существования совокупности интегралов

$$P_1 = k_1R_1 + s_1 \qquad (123) \tag{4.1}$$

в виде

$$\begin{gathered} b_2 - b_3 = (k_2 + k_3 - k_1)(c_3 - c_2) + (k_1 - k_2)k_3a_3 - (k_3 - k_1)k_2a_2 \\ b_{23} = -k_2c_{23} = -k_3c_{32}, \qquad (k_3 - k_2)(c_{13} + k_3a_{31}) = 0 \\ (k_2 - k_3)(c_{12} + k_2a_{12}) = 0 \\ \nu_2\alpha_3 - \nu_3\alpha_2 = 0, \qquad (c_{31} + k_1a_{31})\nu_2 - (c_{21} + k_1a_{12})\nu_3 = 0 \\ \beta_1 = (k_3 - k_2)\alpha_1 + (c_2 + k_2a_2)\nu_1 - (c_{12} + k_2a_{12})\nu_2 \\ \beta_1 = (k_2 - k_3)\alpha_1 + (c_3 + k_3a_3)\nu_1 - (c_{13} + k_3a_{31})\nu_3 \\ (123) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\alpha_1 = a_1s_1 + a_{12}s_2 + a_{31}s_3, \qquad \beta_1 = c_1s_1 + c_{21}s_2 + c_{31}s_3 - \mu_1 \tag{4.3}$$
$$\nu_1 = s_1 + \lambda_1 \qquad (123)$$

Чаплыгин [2] при условиях (0.4) ограничился анализом случаев

$$(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)(k_1 - k_2) \neq 0 \tag{4.4}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \tag{4.5}$$

Но и в этих случаях возможно отказаться от некоторых из ограничений (0.4). Так, в случае (4.4) вместо (0.4) достаточно потребовать выполнения условий

$$(a_1 - a)s_1 + a_{12}s_2 + a_{31}s_3 = a\lambda_1$$
$$\mu_1 + [c + a(k_1 + k_2 + k_3)]\lambda_1 = a(k_1 - k_2 - k_3)s_1 \qquad (123)$$

(у Чаплыгина параметры c и a обозначены через μ и $-1/_2\lambda$). В случае (4.5) соответствующие условия таковы:

$$s_1 = -\lambda_1, \qquad \mu_1 = -c_1\lambda_1 - c_{21}\lambda_2 - c_{31}\lambda_3 \qquad (123)$$

Отметим еще, что при $k_1 = k_2 = k_3 = k \neq 0$ условиям (4.2) удовлетворяют коэффициенты квадратичной формы

$$2T = a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 + 2(a_{23}P_2P_3 + a_{31}P_3P_1 + a_{12}P_1P_2) +$$
$$+ b_1R_1^2 + \frac{(c_1 - c_2)b_3 - (c_3 - c_2)b_1}{c_1 - c_3}R_2^2 + b_3R_3^2 + 2(c_1P_1R_1 + c_2P_2R_2 + c_3P_3R_3)$$

если при этом

$$k = -\frac{b_1 - b_3}{c_1 - c_3}, \qquad s_1 = -\lambda_1, \qquad \mu_1 = -c_1\lambda_1 \qquad (123)$$

В следующих параграфах указаны еще два решения в предположении $k_1 = k_3 \neq k_2$, которое Чаплыгин не рассматривал.

§ 5. Третье решение. Полагаем $k_2 = 0$. Условиям (4.2) удовлетворяют коэффициенты квадратичной формы

$$2T = a_1P_1^2 + a_2P_2^2 + a_3P_3^2 + 2a_{23}P_2P_3 + 2a_{31}P_3P_1 +$$
$$+ \left[b + a_1\left(\frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}\right)^2\right]R_1^2 + bR_2^2 + \left[b + a_3\left(\frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}\right)^2\right]R_3^2 +$$
$$+ 2\,(c_1P_1R_1 + c_2P_2R_2 + c_3P_3R_3 + c_{21}P_2R_1 + c_{23}P_2R_3)$$

и величины

$$s_1 = -\frac{a_{12}}{a_1}s, \quad s_2 = s, \quad s_3 = -\frac{a_{23}}{a_3}s, \quad \lambda_1 = \frac{a_{12}}{a_1}s, \quad \lambda_3 = \frac{a_{23}}{a_3}s$$

$$\mu_1 = \left(c_{21} - c_1\frac{a_{12}}{a_1}\right)s, \quad \mu_2 = c_2s + \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1 - a_3}(s + \lambda_2), \quad \left(\mu_3 = c_{23} - c_3\frac{a_{23}}{a_3}\right)s$$

При этом

$$P_1 + \frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}R_0\cos\varphi + \frac{a_{12}}{a_1}s = 0, \quad P_2 = s, \quad P_3 + \frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}R_0\sin\varphi + \frac{a_{23}}{a_3}s = 0$$
$$R_1 = R_0\cos\varphi, \qquad R_2 = R_2^\circ, \qquad R_3 = R_0\sin\varphi$$

а переменная φ — элементарная функция времени

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\omega_0 + \left(c_{23} - \frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}a_{23}\right)R_0\sin\varphi + \left(c_{21} - \frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}a_{12}\right)R_0\cos\varphi\right]^{-1}d\varphi$$

$$\omega_0 = \left(a_2 - \frac{a_{12}^2}{a_1} - \frac{a_{23}^2}{a_3}\right)s + \left(c_2 + \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1 - a_3}\right)R_2^\circ$$

Это решение содержит 16 параметров — a_1, a_2, a_3, a_{23}, a_{12}, b_2, c_1, c_2, c_3, c_{23}, c_{21}, λ_2, s, R_0, R_2°, φ_0.

§ 6. Четвертое решение. Из (4.2) находим для коэффициентов квадратичной формы (0.2) значения

$$b_1 = b_2 + n\,(c_2 - c) + k^2a_1, \qquad b_{12} = kna_{12}, \qquad b_{13} = 0, \qquad a_{13} = 0 \tag{6.1}$$
$$c_{12} = -na_{12}, \qquad c_{21} = -ka_{21}, \qquad c_{31} = c_{13} = 0 \quad (13)$$

Здесь (6.2)

$$k = -\frac{c_1 - c_3}{a_1 - a_3}, \qquad n = \frac{2a\,(c_1 - c_3) + a_1\,(c_3 - c_2) - a_3\,(c_1 - c_3)}{(2a - a_2)\,(a_1 - a_3)}, \qquad c = \frac{c_3a_1 - c_1a_3}{a_1 - a_3}$$

Параметр a произволен. Кроме того, получаем

$$s_1 = a\frac{[(a_2 - a)\,(a_3 - a) - a_{23}^2]\,\lambda_1 - (a_3 - a)\,a_{12}\lambda_2 + a_{12}a_{23}\lambda_3}{(a_1 - a)\,(a_2 - a)\,(a_3 - a) - (a_1 - a)\,a_{23}^2 - (a_3 - a)\,a_{12}^2}$$
$$s_2 = a\frac{(a_1 - a)\,(a_3 - a)\,\lambda_2 - (a_1 - a)\,a_{23}\lambda_3 - (a_3 - a)\,a_{12}\lambda_1}{(a_1 - a)\,(a_2 - a)\,(a_3 - a) - (a_1 - a)\,a_{23}^2 - (a_3 - a)\,a_{12}^2} \tag{6.3}$$
$$s_3 = a\frac{[(a_2 - a)\,(a_1 - a) - a_{12}^2]\,\lambda_3 - (a_1 - a)\,a_{23}\lambda_2 + a_{12}a_{23}\lambda_1}{(a_1 - a)\,(a_2 - a)\,(a_3 - a) - (a_1 - a)\,a_{23}^2 - (a_3 - a)\,a_{12}^2}$$

$$\mu_1 = -c\lambda_1 - an\nu_1, \qquad \mu_2 = -c\lambda_2 - an\nu_2 - 2aks_2, \qquad \mu_3 = -c\lambda_3 - an\nu_3 \tag{6.4}$$

При этих условиях уравнения (0.1) допускают совокупность интегралов

$$P_1 = kR_1 + s_1, \qquad P_2 = nR_2 + s_2, \qquad P_3 = kR_3 + s_3 \tag{6.5}$$

Постоянные k, n, s_i определены формулами (6.2) — (6.3)

Интегралы (0.5) запишем, учитывая (6.5), (4.2)

$$R_1^2 + R_3^2 = R^2 - R_2^2, \qquad \nu_1R_1 + \nu_2R_2 = m - kR^2 - \nu_2R_2 - (n - k)\,R_2^2$$

Отсюда

$$(\nu_1^2 + \nu_3^2)\,R_1 = \nu_1\,[m - kR^2 - \nu_2R_2 - (n - k)\,R_2^2] -$$
$$- \nu_3\sqrt{(\nu_1^2 + \nu_3^2)\,(R^2 - R_2^2) - [m - kR^2 - \nu_2R_2 - (n - k)\,R_2^2]^2}$$
$$(\nu_1^2 + \nu_3^2)\,R_3 = \nu_3\,[m - kR^2 - \nu_2R_2 - (n - k)\,R_2^2] + \tag{6.6}$$
$$+ \nu_1\sqrt{(\nu_1^2 + \nu_3^2)\,(R^2 - R_2^2) - [m - kR^2 - \nu_2R_2 - (n - k)\,R_2^2]^2}$$

Одно из уравнений (0.1)

$$\frac{dR_2}{dt} = R_3 \frac{\partial T}{\partial P_1} - R_1 \frac{\partial T}{\partial P_3}$$

вследствие (0.2), (6.1, 5,6) определяет R_2 как эллиптическую функцию времени

$$at = \int_{R_2^\circ}^{R_2} \{(\nu_1^2 + \nu_3^2)(R^2 - R_2^2) - [m - kR^2 - \nu_2 R_2 - (n - k) R_2^2]^2\}^{-1/2} dR_2$$

При этом формулы (6.6) — (6.5) дают зависимость остальных переменных от времени.

Полученное решение содержит 16 параметров

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_{12},\ a_{23},\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ a,\ m,\ R,\ R_2^\circ \qquad (6.7)$$

Оно замечательно своей связью с некоторыми решениями классической задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Стесним параметры (6.7) дополнительными условиями

$$a_{12} = a_{23} = 0, \qquad a = {}^1/_2 a_2, \qquad b_2 = 0, \qquad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Тогда из (6.3,4)

$$\mu_1 = \frac{a_1 a_2}{a_2 - 2a_1} n\lambda_1, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = \frac{a_3 a_2}{a_2 - 2a_3} n\lambda_3 \qquad (6.8)$$

$$s_1 = \frac{a_2}{2a_1 - a_2} \lambda_1, \qquad s_2 = \lambda_2, \qquad s_3 = \frac{a_2}{2a_3 - a_2} \lambda_3$$

Интегралы (6.5) записываются в этом случае так:

$$P_1 = \frac{a_2}{2a_1 - a_2} \lambda_1, \qquad P_2 = nR_2 + \lambda_2, \qquad P_3 = \frac{a_2}{2a_3 - a_2} \lambda_3 \qquad (6.9)$$

Обозначая

$$a_1,\ a_2,\ a_3; \qquad P_1,\ P_2,\ P_3; \qquad \frac{\mu_1}{n},\ \frac{\mu_3}{n}; \qquad nR_2$$

соответственно через

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C}, \qquad Ap,\ Bq,\ Cr; \qquad -\nu\cos\alpha,\ -\nu\sin\alpha; \qquad -\frac{\gamma_2}{\nu}$$

приводим (6.8,9) к виду

$$\lambda_1 = (2B - A)\,\nu\cos\alpha, \qquad \lambda_3 = (2B - C)\,\nu\sin\alpha$$

$$p = \frac{\lambda_1}{2B - A} = \nu\cos\alpha, \qquad \gamma_2 = \nu(\lambda_2 - Bq), \qquad r = \frac{\lambda_3}{2B - C} = \nu\sin\alpha$$

Но эти условия характеризуют случай интегрируемости, указанный в статье [5] и заключающий в себе известное решение Д. Н. Бобылева [6] — В. А. Стеклова [7].

Поступила 13 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. ПМТФ, 1963, № 4.
2. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая). Собр. соч., т. 1, 1948.
3. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
4. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, 1954.
5. Харламов П. В. Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
6. Бобылев Д. Н. Об одном частном решении дифференциальных уравнений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук Об-ва любит. естеств., 1896, т. 8, вып. 2.
7. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Отд. физ. наук Об-ва люб. естеств., 1896, т. 8, вып. 2.