ИСЧЕЗАЮЩИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассмотрим движения со скольжением трущихся поверхностей, при которых энергия рассеивается, а также движения без скольжения относительный покой или чистое качение, при которых энергия может сохраниться. Естественно ожидать, что если приток энергии в систему невелик, то начальные движения со скольжением перейдут движения без скольжения. Известно, например, что тяжелый однородный диск, катящийся со скольжением по горизонтальной шероховатой прямой, через конечное время переходит в режим чистого качения, причем время $t - t_0$ переходного процесса может быть сделано как угодно малым, если v_0 (начальная скорость скольжения) достаточно мала. Сохранятся ли подобные явления в общих системах с трением? В статье выясняются достаточные условия, при которых такие явления имеют место.

1. Начнем с примера и рассмотрим тяжелый неоднородный диск радиуса ρ, катящийся, вообще говоря, со скольжением по шероховатой горизонтальной оси x. Направим неподвижную ось y вертикально вверх и проведем из центра диска o радиус r в центр тяжести диска G. Пусть φ — угол этого радиуса с осью y; x — абсцисса центра диска, m — его масса, j^2m — центральный момент инерции. Пусть также v — скорость точки P диска, касающейся оси x, N — нормальная реакция, а R — касательная реакция в точке P. Если скорость $v = x^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\rho \neq 0$, то сила R равна kN по величине и направлена противоположно скорости v, т. е. $R = -kN \operatorname{sign} v$, где $k = \text{const}$ — коэффициент трения. Нормальная реакция $N \geqslant 0$; это значит, что она может быть направлена только вверх. Обозначая через T кинетическую энергию, через U — силовую функцию, а через δA — виртуальную работу касательной силы, получим

$$2T = m\,[x^{\cdot 2} + 2x^{\cdot}\varphi^{\cdot} r\cos\varphi + (r^2 + j^2)\,\varphi^{\cdot 2}], \qquad U = -mgr\cos\varphi$$

$$\delta A = -kN \operatorname{sign} v\,(\delta x - \rho\delta\varphi)$$

Составим уравнения движения

$$m\,(x^{\cdot\cdot} + \varphi^{\cdot\cdot} r\cos\varphi - \varphi^{\cdot 2} r\sin\varphi) = -kN \operatorname{sign} v,$$

$$m\,(x^{\cdot\cdot} r\cos\varphi + \varphi^{\cdot\cdot} r^2 + \varphi^{\cdot\cdot} j^2) = kN\rho \operatorname{sign} v + mgr\sin\varphi \tag{1.1}$$

Для определения N применим теорему о движении центра масс вдоль оси y

$$m\,(\varphi^{\cdot\cdot} r\sin\varphi + \varphi^{\cdot 2} r\cos\varphi) = mg - N \tag{1.2}$$

Умножая первое уравнение системы (2.1) на $-r\cos\varphi$, складывая со вторым и преобразуя, получим

$$[1 \pm \alpha k\,(\rho + r\cos\varphi)]\,N = (g + \varphi^{\cdot 2} r\cos\varphi)\,\frac{mj^2}{r^2\sin^2\varphi + j^2}$$

$$\alpha = r\sin\varphi\,(r^2\sin^2\varphi + j^2)^{-1} \tag{1.3}$$

Отсюда ясно, что N не зависит от $x^{\cdot}$, а следовательно, и от модуля v, а только от $\operatorname{sign} v$ (вместо $\operatorname{sign} v$ в квадратной скобке стоит $\pm$). Нетрудно указать также начальные условия и распределение масс так, чтобы N было отрицательным. В этом случае сталкиваемся с парадоксом Пэнлевэ [1], и исходные гипотезы окажутся недостаточными для определения движения. Если последний случай не встретится, то, подставляя N из уравнения (1.3) в уравнения (1.1), получим уравнения движения. Движение будет происходить согласно этим уравнениям до тех пор, пока $v = x^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\rho$ не обратится в 0.

Примем этот момент за начальный $t = 0$ и предположим, что после будет чистое качение. В этом случае система теряет одну степень свободы и подчиняется интегрируемой неголономной связи $x^{\cdot} = \varphi^{\cdot}\rho$. Уравнение движения имеет вид

$$\varphi^{\cdot\cdot}\,(r^2 + \rho^2 + j^2 + 2\rho r\cos\varphi) - \varphi^{\cdot 2}\rho r\sin\varphi = gr\sin\varphi \tag{1.4}$$

Теорема о движении центра масс даст уравнения для определения R и N_1 — касательной и нормальной реакции при чистом качении

$$\varphi^{\cdot\cdot}(\rho + r\cos\varphi) - \varphi^{\cdot 2} r \sin\varphi = R / m$$
$$g + r^2\varphi^{\cdot 2}\cos\varphi + \varphi^{\cdot\cdot} r \sin\varphi = N_1 / m$$

Решая их, имеем

$$R / m = \frac{r\sin\varphi\,(g + \varphi^{\cdot 2}\rho)(\rho + r\cos\varphi)}{r^2 + j^2 + \rho^2 + 2\rho r\cos\varphi} - \varphi^{\cdot 2} r \sin\varphi$$
$$N_1 / m = \frac{r^2\sin^2\varphi\,(g + \varphi^{\cdot 2}\rho)}{r^2 + j^2 + \rho^2 + 2\rho r\cos\varphi} - r\varphi^{\cdot 2} + g \qquad (1.5)$$

Если в начальный момент при $\varphi = \varphi_0$, $\varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot}$ выполняется неравенство $|R| < kN_1$, то предположение о качении верно, и движение будет происходить согласно уравнению (1.4) до тех пор, пока неравенство $|R| < kN_1$ не нарушится.

Естественно ожидать, что любые близкие начальные условия $\varphi_0 + \Delta\varphi$, $\varphi_0^{\cdot} + \Delta\varphi^{\cdot}$, $v_0 \neq 0$, отвечающие малым $|\Delta\varphi|$, $|\Delta\varphi^{\cdot}|$, $|v_0|$, приведут к движению, у которого скольжение исчезнет за малый промежуток времени, и после этого некоторое время (может быть, бесконечное) будет происходить качение.

Как показано ниже, такое явление наверняка произойдет, если в начальный момент, кроме неравенства $|R| < kN_1$, будет выполнено еще и неравенство $|R| < kN$, где N взято из формулы (2.3) при малых значениях $|\Delta\varphi|$, $|\Delta\varphi_0|$, $|v_0|$.

Обозначим предельное значение N при $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\varphi^{\cdot} \to 0$, $v_0 \to 0 + 0$ через N_2, через N_3 — предельное значение N при $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\varphi^{\cdot} \to 0$, $v_0 \to 0 - 0$, через N_0 обозначим $\lim N_1$, при $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta\varphi_0^{\cdot} \to 0$. Формулы (1.3) и (1.5) показывают, что они могут оказаться все различными. Более того, N_2 или N_3 могут оказаться отрицательными при положительном N_0. Эта ситуация приведет к парадоксу. В более сложных случаях может оказаться, что уравнения, аналогичные (1.3) и (1.5), имеют несколько решений. Поскольку анализ таких общих уравнений весьма сложен, на свойства их решений наложены ограничения 2.1, ... 2, 4, при которых возможно провести доказательство.

Подобные задачи возникают всегда при исследовании движения твердого тела по шероховатой поверхности. При отсутствии скольжения имеем известную неголономную задачу. Решения этой задачи будут хорошо отражать действительность только в том случае, если любое малое скольжение, могущее возникнуть от неучитываемых причин, исчезнет через короткое время.

2. Рассмотрим механическую систему, подчиненную стационарным голономным, идеальным связям с голономными координатами $q_1, \ldots, q_{n+l+k}$, а также неголономными, стационарными $(\partial A_{ij} / \partial t = 0)$ идеальными связями

$$A_{s1}q_1^{\cdot} + \ldots + A_{s,n+l+k}\, q^{\cdot}_{n+l+k} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

с определением возможных перемещений

$$A_{s1}\delta q_1 + \ldots + A_{s,n+l+k}\delta q_{n+l+k} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Пусть на систему наложены также освобождающие связи с сухим трением

$$q_{n+1} \leqslant 0, \ldots, q_{n+l} \leqslant 0$$

Если эти неравенства обращаются в равенства, то тела или точки системы скользят по телам системы или внешним телам, причем сила трения пропорциональна нормальной реакции $N_i > 0$ и направлена против относительной скорости скольжения ($N_i > 0$, если тела давят одно на другое). Возьмем в каждой точке контакта на одном из тел закрепленную на нем тройку осей с осью z_i, направленной по внешней нормали, и осями x_i, y_i, делающими тройку правой и прямоугольной. Тогда работа реакции N_i и силы трения на возможном перемещении δx_i, δy_i, δz_i точки второго тела по отношению к этой системе отсчета будет

$$N_i\delta z_i - k_iN_i\frac{v_{ix}}{|\mathbf{v}_i|}\delta x_i - k_iN_i\frac{v_{iy}}{|\mathbf{v}_i|}\delta y_i$$

Здесь v_{ix}, v_{iy} — проекции относительной скорости скольжения $\mathbf{v}_i$ на оси x_i и y_i, а $k_i > 0$ — коэффициент трения.

Пусть $q_{n+1} = \ldots = q_{n+l} = \dot q_{n+1} = \ldots = \dot q_{n+l} = 0$ — начальные условия. Рассмотрим полную систему неголономных переменных

$$v_1, \ldots, v_n, \; v_{n+1} = \dot q_{n+1}, \ldots, v_{n+l} = \dot q_{n+l}$$

Пусть v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} — компоненты возможной относительной скорости точки одного из тел, находящихся в соприкосновении по отношению к системе x_i, y_i, z_i, выражаются через $v_1, \ldots, v_{n+1}$ по формулам

$$v_{ix} = \alpha_{i1}^1 v_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^1 v_{n+l}, \qquad v_{iy} = \alpha_{i1}^2 v_1 + \ldots + \alpha_{i,n+l}^2 v_{n+l},$$

$$v_{iz} = \alpha_{i,n}^3 v_{n+1} + \ldots + \alpha_{i,n+l}^3 v_{n+l}$$

Заметим, что перемещения δx_i, δy_i, δz_i выражаются через возможные перемещения $v_1\delta\tau, \ldots, v_{n+l}\delta\tau$ по этим же формулам.

Пусть при $t = 0$ среди $\mathbf{v}_{10}, \ldots, \mathbf{v}_{p0}$ начальных относительных скоростей скольжения есть некоторое число нулевых $\mathbf{v}_{\nu+1,0} = \ldots = \mathbf{v}_{p0} = 0$, а ни одна из остальных не равна нулю, и пусть R_{ix}, R_{iy} $(i = \nu + 1, \ldots, p)$ — проекции касательных реакций на оси x_i, y_i. Если через

$$S = \sum_{ij=1}^{n+l} a_{ij}v_i^{\cdot} v_j^{\cdot} + \sum_{j=1}^{n+l} b_j v_j^{\cdot} = S_2 + S_1$$

обозначить энергию ускорений системы, а через $Q_1, \ldots, Q_{n+l}$ — стационарные и непрерывные обобщенные силы, то уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial S_2}{\partial v_j^{\cdot}} = -b_j + Q_j + \sum_{i=1}^{\nu}\left(-k_iN_i\frac{\alpha_{ij}^1 v_{ix} + \alpha_{ij}^2 v_{iy}}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}} + \alpha_{ij}^3 N_i\right) + \tag{2.1}$$

$$+ \sum_{i=\nu+1} (\alpha_{ij}^1 R_{ix} + \alpha_{iy}^2 R_{iy} + \alpha_{ij}^3 N_i) = P_j$$

Обозначая через P_j правые части этой системы, определим из этих уравнений $q_j^{\cdot\cdot}$, $v_{jx}^{\cdot}$, $v_{jy}^{\cdot}$ и положим последние нулями

$$\begin{aligned} q_j^{\cdot\cdot} &= \gamma_{1j}P_1 + \ldots + \gamma_{n+l,j}P_{n+l} = 0 \qquad && (j = n+1, \ldots, n+l) \\ v_{jx}^{\cdot} &= \delta_{1j}P_1 + \ldots + \delta_{n+l,j}P_{n+l} = 0 && (i = \nu+1, \ldots, p) \\ v_{jy}^{\cdot} &= \theta_{1j}P_1 + \ldots + \theta_{n+l,j}P_{n+l} = 0 && (j = \nu+1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Полученная система уравнений послужит для определения нормальных реакций и сил трения.

Пусть теперь $S^* = S$, в которой положены нулями $q_j^{\cdot\cdot}$, $v_{jx}^{\cdot}$, $v_{jy}^{\cdot}$; пусть $Q_1^*, \ldots, Q_\sigma^*$ — обобщенные силы, соответствующие независимым неголономным переменным $v_1', \ldots, v_\sigma'$ в системе, на которую положены дополнительные идеальные связи $q_j^{\cdot\cdot} = v_{jx} = v_{jy} = 0$ (среди них могут быть и неголономные).

Опуская у коэффициентов $\alpha_{ij}^{1\prime}$, $\alpha_{ij}^{2\prime}$ штрихи сверху, напишем уравнения

$$\frac{\partial S_2^*}{\partial v_j^{\cdot}} = b_j^* + Q_j^* + \sum_{i=1}^{\nu}\left(-k_iN_i\frac{\alpha_{ij}^1 v_{ix} + \alpha_{ij}^2 v_{iy}}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}\right) \tag{2.3}$$

Пусть задана также некоторая дополнительная гипотеза о свойствах реакций

$$\varphi_1(N_i, q_i, q_i^{\cdot}, Q_i) = \ldots = \varphi_r = 0 \tag{2.4}$$

Примером такой гипотезы может служить предположение, что тяжелая однородная табуретка, подверженная действию сил, приложенных в шероховатой плоскости опоры, оказывает на плоскость одинаковые нормальные давления во всех четырех опорных точках.

Предположим, что система (2.2) — (2.4) обладает следующими свойствами.

2.1. Все нормальные давления $N_1, \ldots, N_p$ можно положить неотрицательными. Это значит, что из системы (2.2), (2.4) нельзя в данных начальных условиях сделать вывод, что в какой-либо из точек контакта необходимо возникает растягивающее нормальное усилие.

2.2. Система (2.2), (2.4) дает возможность однозначно определить все линейные комбинации $N_1, \ldots, N_\nu$, входящие в правые части уравнений (2.3).

2.3. По любой системе $N_{\nu+1}, \ldots, N_p$ возможно подобрать касательные реакции R_{ix}, R_{iy} так, чтобы в совокупности удовлетворялись (2.2), (2.4) и, кроме того, неравенства

$$k_i N_i > \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2} + c \qquad (c = \mathrm{const} > 0) \tag{2.5}$$

Неравенства (2.5) означают, что модуль касательной реакции меньше, чем модуль максимально возможной.

Если при данных начальных значениях выполнены условия 2.1, 2.2, 2.3, то дальнейшее движение будет происходить согласно уравнениям (2.3) в совокупности с уравнениями неголономных связей исходной системы и уравнениями

$$q_{n+1} = \ldots = q_{n+l} = 0, \qquad v_{jx} = v_{jy} = 0 \qquad (j = \nu + 1, \ldots, p)$$

2.4. Предположим теперь, что при любых $x_{i0} = q_{i0}' - q_{i0}$, $x_{i0}^{\cdot} = q_{i0}^{\cdot\prime} - q_{i0}^{\cdot}$, достаточно малых по модулю, но не обращающих в нули все $v_{\nu+1}, \ldots, v_p$, системы (2.2) — (2.4), к которым приводит определение движения, также удовлетворяют условиям 2.1, 2.2, 2.3. Кроме того, реакции $N'_{\nu+1}, \ldots, N_p'$, отвечающие этим начальным условиям, удовлетворяют неравенствам

$$k_i N_i' > \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2} + c$$

где R_{ix}, R_{iy} — реакции, отвечающие исходным начальным условиям q_{i0}, $q_{i0}^{\cdot}$.

Все перечисленные выше ограничения гарантируют, что существует некоторая область

$$\sum x_i^2 + \sum x_i^{\cdot 2} \leqslant H$$

такая, что если внутри H какие-либо из скоростей скольжения $v_{\nu+1}, \ldots, v_p$ положить нулями при $t = 0$, то они останутся нулями по крайней мере до тех пор, пока движение не покинет область H. Если выполняются предположения 2.1, ..., 2.4, то будем говорить, что переменные v_{ix}, v_{iy} $(i = \nu + 1, \ldots, p)$ находятся во внутренней точке зоны застоя.

Рассмотрим систему начальных условий, при которых ни одна из относительных скоростей $v_{\nu+1}, \ldots, v_p$ не равна нулю, и выберем в качестве $v'_{\sigma+1}, \ldots, v_n'$ некоторую независимую между собой систему, выбранную среди v_{ix}, v_{iy} $(i = \nu + 1, \ldots, p)$. Вычисляя из первых σ уравнений системы (2.3) величины $v_1'', \ldots, v_\sigma''$ через $v_{\sigma+1}, \ldots, v_n''$ и подставляя эти выражения в последние $n - \sigma$ уравнений, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial v_j^{\cdot}} \frac{1}{2} \sum_{ij=\sigma+1}^{n} c_{ij} v_i^{\cdot} v_j^{\cdot} = \mu_j + \sum_{i=\nu+1}^{p} -\left(k_i N_i \frac{\alpha_{ij}^1 v_{ix} + \alpha_{ij}^2 v_{iy}}{\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}}\right) \tag{2.6}$$

Здесь сумма в левой части определенно положительная относительно $v_j^{\cdot}$ $(j = \sigma + 1, \ldots, n)$ квадратичная форма, в которую перейдет квадратичная часть

$$S_2' = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} v_i^{\cdot} v_j^{\cdot}$$

энергии ускорений системы, если в ней положить нулями линейные формы

$$\frac{\partial}{\partial v_j^{\cdot}}\left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} v_i^{\cdot} v_j^{\cdot}\right) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, \sigma) \tag{2.7}$$

Величины v_{jx}, v_{jy} при $j = \sigma + 1, \ldots, n$ могут быть выражены через одни только $v_{\sigma+1}, \ldots, v_n$; это значит, что силы трения в точках с номерами $\nu + 1, \ldots, p$ не войдут в первые σ уравнений и, следовательно, их правые части непрерывно зависят от своих аргументов в окрестности

$$\mathbf{v}_{\nu+1} = \ldots = \mathbf{v}_p = 0$$

Вследствие этого после выделения μ_j — непрерывного слагаемого правых частей уравнений, полученных в результате подстановки, им можно придать форму (2.6).

Касательные реакции R_{ix}, R_{jy} при начальных значениях

$$q_{i0},\ q_{i0}^{\cdot},\ \mathbf{v}_{\nu+1,0} = \ldots = \mathbf{v}_{p0} = 0$$

удовлетворяют уравнениям

$$\mu_{i0} + \sum_{i=\nu+1}^{p} (\alpha_{ij}^1 R_{ix} + \alpha_{ij}^2 R_{iy}) = 0$$

Умножая каждое из уравнения (2.6) на $v_j^{\cdot}$, складывая и учитывая (2.1) и (2.7), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij=\sigma+1}^{n} c_{ij} v_i v_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij=\sigma+1}^{n} \frac{dc_{ij}}{dt} v_i v_j + (\Delta\mu_j)\, v_j -$$
$$- \sum_{i=\nu+1}^{p} \left(k_i N_i \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} - R_{ix} v_{ix} - R_{iy} v_{iy}\right)$$

Замечая, что c_{ij} зависят только от координат, получим, что это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum^{n} c_{ij} v_i v_j = - \sum_{i=\nu+1}^{p} \left[k_i N_i \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} + (R_{ix} + \lambda_{ix})\, v_{ix} + (R_{iy} + \lambda_{iy})\, v_{iy}\right]$$

причем все λ_{ix}, λ_{iy} уничтожаются, если $x_i = 0$, $x_i^{\cdot} = 0$.

Покажем теперь, что область H всегда можно взять столь малой, чтобы всюду внутри области H выполнялось неравенство

$$- \sum_{i=\nu+1}^{p} \left[k_i N_i \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} + (R_{ix} + \lambda_{ix})\, v_{ix} + (R_{iy} + \lambda_{iy})\, v_{iy}\right] < -\Theta \sqrt{T_\sigma}$$

$$\left(T_\sigma = \frac{1}{2}\sum_{ij=\sigma+1}^{n} c_{ij} v_i v_j\right)$$

Обозначим через kN_{i0} нижние границы величины kN_i, а через λ_{ix}°, λ_{iy}° — верхние границы $|\lambda_{ix}|$, $|\lambda_{iy}|$ в области H. Очевидно, что каждый член левой части не превосходит выражения

$$- \left[(k_i N_{i0} - \lambda_{ix}^\circ - \lambda_{iy}^\circ)\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} + R_{ix} v_{ix} + R_{iy} v_{iy}\right]$$

Это выражение отрицательно, если

$$(R_{ix} v_{ix} + R_{iy} v_{iy})^2 < (k_i N_{i0} - \lambda_{ix}^\circ - \lambda_{iy}^\circ)^2 \left(\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}\right)^2$$

для этого достаточно, чтобы выполнялось условие

$$R_{ix}^2 + R_{iy}^2 < (kN_{i0} - \lambda_{ix}^\circ - \lambda_{iy}^\circ)^2$$

Ясно, что это условие выполнено, если выполнено (2.4), и область H достаточно мала.

Обозначая через $-\gamma$ отрицательный максимум суммы

$$\Phi = -\sum_{i=\nu+1}^{p} [(kN_i^\circ - \lambda_{ix}^\circ - \lambda_{iy}^\circ)\sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2} + R_{ix}v_{ix} + R_{iy}v_{iy}]$$

в области H, который достигается при $\overset{*}{v}_{\sigma+1}, \ldots, v_n^*$, и замечая, что Φ — однородная относительно скоростей, получим, что всюду в области H выполняется неравенство

$$-\Phi > \frac{\gamma\sqrt{v_{\sigma+1}^2 + \ldots + v_n^2}}{\sqrt{v_{\sigma+1}^{*2} + \ldots + v_n^{*2}}} > \Theta\sqrt{T_\sigma} \qquad (\Theta = \mathrm{const} > 0)$$

Интегрируя неравенство

$$dT_\sigma \,/\, dt < -\Theta\sqrt{T_\sigma}$$

получим

$$\sqrt{T_\sigma} - \sqrt{T_{\sigma 0}} < -{}^1\!/_2\Theta\,(t - t_0)$$

По любой области H и любой постоянной $\lambda < H$ найдется такое число t^* $(\lambda H) > 0$, что время $t - t_0$, за которое система из начальных условий $\sum x_{i0}^2 + x_{i0}^{\cdot 2} \leqslant \lambda$ покинет область, будет больше t^* (λH). Отсюда следует, что при всех начальных значениях, для которых

$$\sqrt{T_{\sigma 0}} - {}^1\!/_2\Theta t^*\,(\lambda, H) \leqslant 0$$

по истечении времени $t - t_0 \leqslant t^*$ все $v_{\sigma+1}, \ldots, v_n$ станут нулями, и дальнейшее движение будет происходить согласно уравнениям (2.3), пока система не покинет область H.

Окончательные выводы сформулируем в виде теоремы.

Теорема. 1) Если часть системы, соответствующая переменным $v_{\sigma+1}, \ldots, v_n$, при некоторых начальных условиях находится во внутренней точке зоны застоя, и если область

$$\sum x_i^2 + x_i^{\cdot 2} \leqslant H, \qquad v_{\sigma+1} = \ldots = v_n = 0$$

целиком состоит из внутренних точек этой зоны, то по любому $\lambda < H$ возможно указать такое λ_1 (λ, H), что для любых начальных условиях из области

$$\sum x_{i0}^2 + x_{i0}^{\cdot 2} \leqslant H, \qquad \sum_{i=\sigma+1}^{n} v_i^{\circ 2} \leqslant \lambda_1$$

движение до выхода из области H будет происходить в два этапа: на первом этапе некоторые относительные скорости скольжения не равны нулю, а на втором этапе, который начнется не позднее, чем по истечении промежутка $t - t_0 = 2\Theta^{-1}\sqrt{T_{\sigma 0}}$, все скорости скольжения остаются нулями, пока движение не покинет область H.

2) Если движение $q_i\,(t)$, начавшееся из начальных условий $q_{i0}, q_{i0}^{\cdot}, v_{\sigma+1,0} = \ldots \ldots = v_{n0} = 0$, в течение всего времени остается во внутренней точке зоны застоя и является устойчивым решением системы (2.3) в совокупности с уравнениями $q_{n+1} = \ldots = q_{n+l} = v_{\sigma+1} = \ldots = v_n = 0$ (т. е. решение $q_i\,(t)$ будет устойчивым движением исходной системы, стесненной указанными дополнительными связями), то любое возмущенное движение исходной системы с достаточно малыми по модулю скоростями скольжения через конечный промежуток времени будет представлять движение системы с дополнительными связями, причем время переходного процесса будет стремиться к нулю при $T_{\sigma 0} \to 0$.

Поступила 2 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Пенлевэ П. Лекции о трении. Гостехиздат, 1954.
2. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.