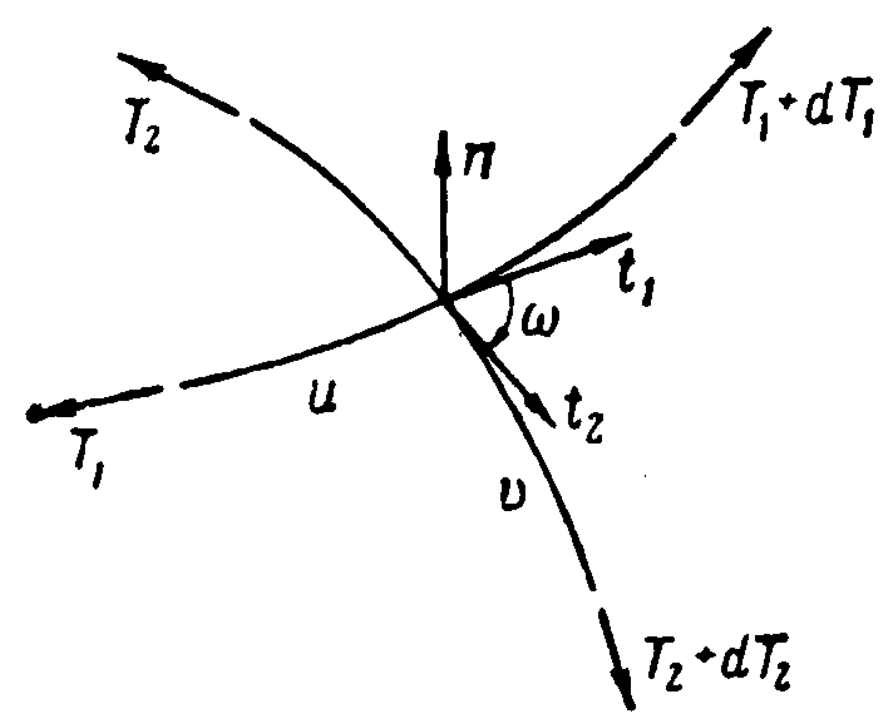
К ТЕОРИИ МГНОВЕННО-ЖЕСТКИХ СЕТЕЙ

Э. Н. Кузнецов
(Москва)

Будем называть сетью систему гибких нитей, направленных вдоль двух однопараметрических семейств линий на поверхности. Кинематический анализ сети как дискретной стержневой системы свидетельствует о ее многократной геометрической изменяемости независимо от условий закрепления на контуре. Однако кинематическая подвижность изменяемых стержневых систем при некотором соотношении между геометрическими параметрами ограничивается бесконечно малыми перемещениями. Такие системы со специально подобранными геометрическими параметрами впервые исследовал И. М. Рабинович [1], который назвал эти системы мгновенно-жесткими. В геометрической изменяемости сети из нитей нетрудно убедиться и при рассмотрении ее как континуальной системы [2,3]. При таком подходе, вместо сформулированного в [1] и приведенного выше кинематического критерия мгновенно-жесткой системы, удобнее использовать следующий статический признак: изменяемая система, допускающая начальные напряжения, является мгновенно-жесткой, если в состоянии предварительного напряжения ее равновесие устойчиво.

1. Для вывода условий равновесия рассмотрим в окрестности некоторого узла сети (фигура) бесконечно малый ее элемент, ограниченный координатными линиями u и v, которые направим вдоль двух семейств нитей; тройка единичных координатных векторов $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{n}$ образует на поверхности подвижной триэдр. При отсутствии внешней нагрузки условие равновесия выделенного элемента сети имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{T}_1 ds_2)\,du + \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{T}_2 ds_1)\,dv = 0 \qquad (1.1)$$



Здесь

$$\mathbf{T}_1 = T_1\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{T}_2 = T_2\mathbf{t}_2$$

— векторы усилий в нитях, отнесенные соответственно к единичным приращениям линейных элементов

$$ds_2 = B dv = 1, \quad ds_1 = A du = 1$$

Через A и B обозначены параметры Ламе. Условие (1.1) относится к деформированному состоянию системы, когда нити можно считать нерастяжимыми.

Выполняя в (1.1) дифференцирование с учетом деривационных формул Гаусса [4] сокращая на $du\,dv$, будем иметь (1.2)

$$T_{1,u}\frac{1}{A}\mathbf{t}_1 + T_1(\sigma_1\mathbf{n} - \varkappa_1\mathbf{b}_1) + T_1\mathbf{t}_1\frac{B_u}{AB} + T_{2,v}\frac{1}{B}\mathbf{t}_2 + T_2(\sigma_2\mathbf{n} - \varkappa_2\mathbf{b}_2) + T_2\mathbf{t}_2\frac{A_v}{AB} = 0$$

Здесь σ и $\varkappa$ — нормальные и геодезические кривизны нитей, $\mathbf{b}$ — единичный вектор бинормали.

Уравнение равновесия (1.2) получено в специальной системе координат; для дальнейшего предпочтительнее оказывается инвариантная запись этого уравнения

$$T_{1,i}u^i\mathbf{t}_1 + T_1(\sigma_1\mathbf{n} - \varkappa_1\mathbf{b}_1) + T_1\mathbf{t}_1A_iu^i + T_{2,i}v^i\mathbf{t}_2 + T_2(\sigma_2\mathbf{n} - \varkappa_2\mathbf{b}_2) + T_2\mathbf{t}_2A_iv^i = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (1.3)$$

Здесь u^i и v^i—направляющие орты линий сети, A_i—так называемый ромбический вектор сети, однозначно определяемый любой сетью [5].

В том, что запись (1.3) справедлива, можно убедиться путем подстановки значений, которые принимают компоненты векторов u^i, v^i и A_i в специальной системе координат

$$u^i\left(\frac{1}{A},\ 0\right), \qquad v^i\left(0,\ \frac{1}{B}\right), \qquad A_i\left(-\frac{B_u}{B},\ -\frac{A_v}{A}\right) \qquad (1.4)$$

Как легко видеть, указанная подстановка приводит к условию (1.2), что с учетом тензорного характера уравнения (1.3) обеспечивает справедливость последнего в произвольной системе координат.

2. Скалярное умножение уравнения (1.3) на $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{n}$ приводит к системе трех уравнений, выражающих условия равновесия в проекциях на соответствующие оси

$$\begin{gathered}(T_{1,i} - T_1 A_i)\, u^i \sin\omega - T_1\varkappa_1 \cos\omega + T_2\varkappa_2 = 0\\ (T_{2,i} - T_2 A_i)\, v^i \sin\omega + T_2\varkappa_2 \cos\omega - T_1\varkappa_1 = 0\\ T_1\sigma_1 + T_2\sigma_2 = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

где ω — угол между направляющими ортами сети (сетевой угол).

Определение. Сеть, для которой система уравнений равновесия (2.1) допускает ненулевое решение, назовем статической сетью.

Из третьего уравнения системы (2.1) видно, что при одинаковом знаке кривизн σ_1 и σ_2 усилия T_1 и T_2 будут иметь разные знаки, и наоборот; случай одновременного обращения обеих кривизн в ноль требует отдельного рассмотрения. Но равновесие сети будет устойчиво, только когда оба усилия T_1 и T_2 растягивающие; следовательно, из всех статических сетей мгновенно-жесткими будут лишь сети на поверхностях отрицательной гауссовой кривизны и притом те из них, у которых нормальные кривизны нитей в каждой точке разнозначны.

Прежде чем исключить из дальнейшего рассмотрения случай $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, отметим, что это условие характеризует асимптотическую сеть поверхности, а также произвольную плоскую сеть. При этом последнее из уравнений (2.1) удовлетворяется тождественно, а первые два образуют каноническую гиперболическую систему, характеристики которой совпадают с направлениями нитей, т. е. с асимптотическими линиями поверхности. Задача Коши (в частности характеристическая задача) для этой системы имеет в регулярной области сети решение, вполне определяемое заданием усилий T_1 и T_2 вдоль некоторой начальной линии (или соответственно — вдоль двух пересекающихся характеристик). Так как эти усилия могут быть заданы оба положительными, то асимптотическая сеть, по крайней мере локально, является мгновенно-жесткой сетью.

3. Введем разрешающую функцию T системы (2.1) по формулам

$$T_1 = T\sigma_2, \qquad T_2 = T\sigma_1 \tag{3.1}$$

Тогда третье уравнение удовлетворяется тождественно, а первые два путем небольших преобразований можно объединить в одно векторное уравнение

$$\varphi_k \equiv \partial_k \ln T = A_k - \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}(\varkappa_1 v_k + \varkappa_2 u_k) -$$

$$- \frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\sigma_{1,i}}{\sigma_1} v^i u_k - \frac{\sigma_{2,i}}{\sigma_2} u^i v_k\right) + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varkappa_2 v_k + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\varkappa_1 u_k\right) \qquad \left(\partial_k = \frac{\partial}{\partial u^k}\right) \tag{3.2}$$

Здесь в качестве вертора для перебрасывания индексов используется [5] дискриминантный бивектор $\varepsilon_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$.

Структура выражения, стоящего в правой части уравнения (3.2), позволяет утверждать, что оно представляет собой некоторый вектор φ_k, принадлежащий поверхности; этот вектор однозначно определяется заданной сетью.

Определение. Вектор φ_k, компоненты которого даются правой частью равенства (3.2), назовем статическим вектором сети.

Теорема 3.1. Для того чтобы сеть была статической, необходимо и достаточно, чтобы ее статический вектор был градиентен.

В самом деле, так как в левой части уравнения (3.2) стоит градиентный вектор $\partial_k \ln T$, то совершенно очевидно, что это уравнение, а вместе с ним и система (2.1) допускают нетривиальное решение тогда и только тогда, когда вектор φ_k также будет градиентным, т. е. когда выполнено условие

$$\operatorname{rot} \varphi = 0 \tag{3.3}$$

Это условие является необходимым и достаточным для существования такой функции φ, что $\varphi_k = \partial_k \varphi$. Функцию φ назовем статическим потенциалом сети; согласно (3.2), искомая величина

$$T = Ce^{\varphi} \tag{3.4}$$

Таким образом, инвариантный признак мгновенно-жесткой сети состоит из условия (3.3), налагаемого на статический вектор, в сочетании с указанным выше условием разнозначности нормальных кривизн.

Если принять заданную сеть в качестве координатной, то независимо от установленной на ней параметризации характеристическое условие (3.3) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{B}\Gamma_{22}^{1} \cos \omega + \frac{N}{L}\Gamma_{11}^{2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B}{A}\Gamma_{11}^{2} \cos \omega + \frac{L}{N}\Gamma_{22}^{1}\right) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln\left(\frac{B}{A}\frac{L}{N}\right) \tag{3.5}$$

Здесь Γ_{ij}^{k} — символы Кристоффеля, L и N — крайние коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

4. Вопрос о существовании и количестве статических сетей на всякой поверхности сформулируем в таком виде: можно ли для некоторого наперед заданного однопараметрического семейства линий подобрать второе семейство так, чтобы получить статическую сеть?

Пусть u^i — направляющий орт первого семейства; орт v^i второго семейства будем рассматривать как орт u^i, повернутый на некоторый угол ω так, что

$$v^i = u^i \cos \omega + u'^i \sin \omega \tag{4.1}$$

где u'^i — вектор, дополнительный для u^i.

Фигурирующие в (3.2) геодезические и нормальные кривизны линий второго семейства выражаются через инварианты линий заданного семейства и сетевой угол ω; для дальнейшего необходимы только те члены этих выражений, которые содержат производные функции ω

$$\varkappa_2 = v^i \omega_i + \ldots, \qquad \sigma_{2,i} = [2\tau_1 \cos 2\omega - (\sigma_1 - \sigma_1')\sin 2\omega]\, \omega_i + \ldots \tag{4.2}$$

Здесь τ — геодезическое кручение, а многоточие означает слагаемые, не содержащие производных от ω.

Внесем значения (4.2) в формулу статического вектора (3.2), а затем потребуем, чтобы этот вектор был градиентным, для чего приравняем нулю его ротацию. Полученное таким путем соотношение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно ω; головная часть этого уравнения (т. е. члены со вторыми производными) приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{\sin^2 \omega}\,[\sigma_2 u^i u^k - 2(\sigma_1 \cos \omega + \tau_1 \sin \omega)\, u^{(i} v^{k)} + \sigma_1 v^i v^k]\, \omega_{ik} + \ldots = h^{ik}\omega_{ik} + \ldots = 0 \tag{4.3}$$

где h^{ik} — второй тензор поверхности.

Дискриминант уравнения (4.3)

$$\delta = \det |\, h^{ik} \,| = K / g \tag{4.4}$$

Так как величина g (дискриминант метрического тензора) определенно положительна, то знак выражения (4.4) и, следовательно, тип уравнения (4.3) определяется знаком гауссовой кривизны поверхности K. Кроме того, знание второго тензора поверхности h^{ik} позволяет немедленно указать характеристики уравнения (4.3) и систему координат, в которой оно принимает каноническую форму.

С учетом основных теорем общей теории дифференциальных уравнений полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения: к любому однопараметрическому семейству линий поверхности можно присоединить с произволом в две функции одного аргумента второе семейство так, что образованная сеть будет статической.

5. Рассмотрение частных видов статических сетей начнем со случая ортогональной сети ($\omega = {}^1/_2\pi$).

Ромбический вектор ортогональной сети A_k равен ее чебышевскому вектору a_k

$$A_k = a_k = \varkappa_1 u_k + \varkappa_2 v_k \tag{5.1}$$

Поэтому статический вектор ортогональной сети

$$\varphi_k = \frac{\sigma_{2,i}}{\sigma_2} u^i v_k - \frac{\sigma_{1,i}}{\sigma_1} v^i u_k + 2H\left(\frac{\varkappa_1}{\sigma_1} u_k + \frac{\varkappa_2}{\sigma_2} v_k\right) \tag{5.2}$$

($H = {}^1/_2(\sigma_1 + \sigma_2)$ — средняя кривизна поверхности)

Ортогональную статическую сеть будем разыскивать как результат поворота сети линий кривизны на неизвестный угол ψ.

Путем операций, совершенно аналогичных проделанным в п.4, приходим к уравнению второго порядка относительно функции ψ; головная часть этого уравнения имеет следующий вид:

$$H\,[\sigma_2 u^i u^k - 2\tau_1 u^{(i} v^{k)} + \sigma_1 v^i v^k]\,\psi_{ik} + \ldots = H h^{ik}\psi_{ik} + \ldots = 0 \tag{5.3}$$

Исключая пока случай $H = 0$, можно утверждать, что ортогональные статические сети существуют на всякой поверхности и определяются с произволом в две функции одного аргумента.

Что же касается случая $H = 0$ (минимальная поверхность), то здесь для произвольной ортогональной сети

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma \tag{5.4}$$

и статический вектор

$$\varphi_k = \frac{\sigma_i}{\sigma}(u^i v_k - u_k v^i) = -\partial_k \ln \sigma = \mathrm{grad} \tag{5.5}$$

Отсюда

$$T = Ce^{\varphi} = C / \sigma \tag{5.6}$$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 5.1. Произвольная ортогональная сеть минимальной поверхности есть мгновенно-жесткая сеть.

Из ортогональных сетей рассмотрим еще сеть линий кривизны произвольной поверхности. В этом случае после ряда преобразований статический вектор приводится к виду

$$\varphi_k = 2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varkappa_2 v_k + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\varkappa_1 u_k\right) = \partial_k \ln \frac{\sqrt{E}}{K} + \frac{H}{E}\rho_k{}^i \partial_i \ln \frac{K}{H} = 2\alpha_k{}^* \tag{5.7}$$

Здесь $E = H^2 - K$ — эйлерова разность, $\rho_k{}^i$ — четвертый тензор поверхности, $\alpha_k{}^*$ — геодезический вектор сети линий кривизны относительно асимптотической сети.

Определение. Будем называть статической такую поверхность, у которой сеть линий кривизны статическая.

Теорема 5.2. Если сеть линий кривизны некоторой поверхности является в сферическом отображении изотермической, то эта поверхность статическая; статический потенциал ее сети линий кривизны равен удвоенному потенциалу чебышевского вектора этой сети в сферическом отображении

$$\varphi = 2\rho \tag{5.8}$$

Справедливость утверждения немедленно вытекает из известной теоремы А. П. Нордена о сопряженных связностях [5], согласно которой вектор $\alpha_k{}^*$ равен чебышевскому вектору ρ_k сферического отображения сети линий кривизны. Так как сферическое отображение сети линий кривизны есть ортогональная сеть, то градиентность ее чебышевского вектора $\rho_k = \partial_k\rho$ означает, что эта сеть изотермическая.

Непосредственной проверкой нетрудно установить, что к статическим поверхностям относятся, в частности, поверхности вращения (статический потенциал $\varphi = -\ln\sin^2\theta$, где θ — угол между нормалью к поверхности и осью вращения); минимальные поверхности (статический потенциал $\varphi = -{}^1/_2\ln|K|$); поверхности второго порядка ($\varphi = {}^1/_2({}^1/_2\ln|K| - \ln E)$; наконец, поверхности с двумя семействами плоских линий кривизны (сферическим отображением которых служат изотермические сети Бонне [5]). При $K < 0$ сети линий кривизны перечисленных поверхностей являются мгновенно-жесткими.

6. Рассмотрим теперь произвольную сопряженную сеть поверхности. С учетом известных соотношений, связывающих инварианты линий сопряженной сети, статический вектор последней может быть представлен в таком виде

$$\varphi_k = \frac{2}{\sin^2\omega}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varkappa_2 v_k + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\varkappa_1 u_k\right) + A_k - a_k + (2a_i - \alpha_i)\, c_k{}^i \cos\omega =$$

$$= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\alpha_k - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\alpha_i a_k{}^i - \partial_k \ln\sin\omega \tag{6.1}$$

Здесь α_i — геодезический вектор сети, $a_k{}^i$ — ее метрически нормированный тензор и $c_k{}^i$ — метрически нормированный тензор биссекторной сети.

Для ортогональной сопряженной сети, т. е. для сети линий кривизны, выражение (6.1), как это и должно быть, переходит в (5.7).

Обращение геодезического вектора в нуль характеризует, как известно, геодезическую сеть поверхности. Учитывая, что при $K < 0$ нормальные кривизны сопряженных направлений разнозначны, имеем из (6.1) для сопряженной геодезической сети (сеть Фосса) следующую теорему.

Теорема 6.1. На поверхности Фосса отрицательной гауссовой кривизны сеть Фосса есть мгновенно-жесткая сеть; статический потенциал этой сети $\varphi = -\ln\sin\omega$.

Поступила 31 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович И. М. Мгновенно-жесткие системы, их свойства и основы расчета. Сб. «Висячие покрытия». Госстройиздат, 1962.
2. Гордеев В. Н. Исследование плоских нитяных сетей и тканевых оболочек. Тр. IV Всесоюзн. конференции по теории оболочек и пластин. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1964.
3. Кузнецов Э. Н. Мгновенно-жесткие вантовые сети. Сб. «Исследования по теории сооружений», 1964, вып. 13.
4. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, т. 1 и 2. Гостехиздат, 1947—1948.
5. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия. Физматгиз, 1963.