К ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. Н. Закорко, Н. А. Ростовцев

(Комсомольск-на-Амуре, Новосибирск)

Рассматриваются две задачи с общей схемой: через невесомый (лишенный инерции) жесткий штамп, круглой формы в плане, лежащий на изотропноми однородном упругом полупространстве ($z \geqslant 0$), на последнее передается действие синусоидальной нагрузки(временной множитель берется в форме exp—$i\omega t$). Колебания установившиеся; действие статической нагрузки не рассматривается; предполагается только, что ее величина достаточна для обеспечения контакта в случае, когда штамп не находится в сцеплении с полупространством. Во всем последующем, для краткости речи, говоря о векторах (или их проекциях), подразумеваем их амплитудные значения. Истинные значения получаются умножением на exp $(-i\omega t)$. В основной смешанной задаче требуется по известному распределению вектора перемещения $\mathbf{w}\,(w,\, u_x,\, u_y)$ в области контакта Ω найти распределение вектора силы $\mathrm{p}\,\{p,\, t_x t_y\}$ (p — давление, t_x, t_y — касательные усилия) в этой области. В частности, при наличии сцепления $u_x = u_y = 0$. В другой задаче (штамп без трения и сцепления) имеем $t_x = t_y = 0$, и требуется найти только $p = p\,(x,\, y)$ по известному $w = w\,(x,\, y)$ в области Ω.

Дается единообразный подход к этим задачам, выводятся интегральные уравнения и развивается приближенный метод их решения (применительно ко второй задаче).

1. Предлагаемый подход состоит в следующем. Система уравнений основной смешанной задачи в векторной записи, очевидно, имеет вид

$$\mathbf{w}\,(r) = \iint\limits_{\Omega} K\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\mathbf{p}\,(\mathbf{r}')\,dS, \qquad r \in \Omega \tag{1.1}$$

Здесь $K\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — разностное матричное ядро. Столбцы $(K^0,\, K^1,\, K^2)$ матрицы $K\,(\mathbf{r})$ представляют векторы перемещений, обусловленных действием единичных сосредоточенных сил, приложенных в начале координат и направленных соответственно по осям z, x, y. Ясно поэтому, что ядро $K\,(\mathbf{r})$ — сингулярное (со слабой особенностью). Выделением особенности можно привести (1.1) к системе уравнений второго рода. В дальнейшем будет показано, что слагаемое в $K\,(\mathbf{r})$, несущее особенность, соответствует статической задаче. Поэтому, если решение статической задачи известно, то переход к системе уравнений второго рода можно выполнить на деле. Для нахождения $K\,(\mathbf{r})$ решаем (в прямоугольных координатах) систему уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu)\,\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \mu\Delta\mathbf{w} + \rho\omega^2\mathbf{w} = 0 \qquad (\rho \text{ — плотность упругой среды}) \tag{1.2}$$

при условии

$$(\sigma_z,\, \tau_{zx},\, \tau_{zy}) = (P,\, T_x,\, T_y)\,\delta\,(x)\,\delta\,(y) \tag{1.3}$$

Выкладки приводят к следующему результату:

$$= K\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix}, \qquad K = \frac{1}{4\pi^2\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta \exp i\,(\alpha x + \beta y) \times \tag{1.4}$$

$$\times \begin{bmatrix} E\,(\gamma^2), & i\alpha\Theta\,(\gamma^2), & i\beta\Theta\,(\gamma^2) \\ -\,i\alpha\Theta\,(\gamma^2), & {}^1/_2 H\,(\gamma) + {}^1/_2\,(\alpha^2 - \beta^2)\,Z\,(\gamma^2), & \alpha\beta Z\,(\gamma^2) \\ -\,i\beta\Theta\,(\gamma^2), & \alpha\beta Z\,(\gamma^2), & {}^1/_2 H\,(\gamma^2) - {}^1/_2\,(\alpha^2 - \beta^2)\,Z(\gamma^2) \end{bmatrix}$$

$$(\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$$

Входящие сюда функции E, Θ, H, Z аргумента γ^2 представляют частные от деления функций E_*, Θ_*, H_*, Z_*, выражения которых приводятся ниже, на произведение $(\gamma^2 - k_2^2)^{1/2} R\,(\gamma^2)$, где функция Рэлея ($k_1$, k_2—волновые числа),

$$R\,(\gamma^2) = (2\gamma^2 - k_2^2) - 4\gamma^2\,(\gamma^2 - k_1^2)^{1/2}\,(\gamma^2 - k_2^2)^{1/2} \tag{1.5}$$

Выражения для, E_*, Θ_*, H_*, Z_* имеют вид

$$E_*(\gamma^2) = -k_1^2(\gamma^2-k_1^2)^{1/2}(\gamma^2-k_2^2)^{1/2},\ H_*(\gamma^2) = R(\gamma^2) - k_2^2(\gamma^2-k_2^2)$$

$$\Theta_*(\gamma^2) = (2\gamma^2-k_2^2)(\gamma^2-k_2^2)^{1/2} - 2(\gamma^2-k_2^2)(\gamma^2-k_1^2)^{1/2} \qquad (1.6)$$

$$\gamma^2 Z_*(\gamma^2) = -R(\gamma^2) - k_2^2(\gamma^2-k_2^2) \qquad (k_1 = \omega\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)},\ k_2 = \omega\sqrt{\rho/\mu})$$

Радикалы, входящие в эти формулы, являются однозначными функциями γ на римановой поверхности, состоящей из четырех листов, соответственно четырем комбинациям знаков. Листы соединяются между собой по разрезам, проведенным надлежащим образом. Будем пользоваться системой разрезов, примененной А. Зоммерфельдом в задаче распространения радиоволн [1] (стр. 945). Двукратный интеграл Фурье, входящий в формулу (1.4), можно привести к однократному, перейдя к полярным координатам в плоскости $\alpha\ \beta$ и выполнив интегрирование по угловой координате. В этом вычислении и в дальнейшем удобнее иметь дело не непосредственно с векторами перемещений и сил, но с их комплексными комбинациями

$$w_1 = u + iv, \quad w_2 = u - iv, \quad t_1 = t_x + it_y, \quad t_2 = t_x - it_y \qquad (1.7)$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} w \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} p \\ {}^1/_2 t_1 \\ {}^1/_2 t_2 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \frac{1}{4\pi^2\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta \exp(\alpha x + \beta y)\times \qquad (1.8)$$

$$\times\begin{bmatrix} E(\gamma^2), & (\beta+i\alpha)\,\Theta(\gamma^2), & (-\beta+i\alpha)\,\Theta(\gamma^2) \\ (\beta-i\alpha)\,\Theta(\gamma^2), & H(\gamma^2), & -(\beta-i\alpha)^2 Z(\gamma^2) \\ (-\beta-i\alpha)\,\Theta(\gamma^2), & -(\beta+i\alpha)^2 Z(\gamma^2), & H(\gamma^2) \end{bmatrix}$$

Выполнив интегрирование в полярных координатах, получим (1.9)

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_0^\infty \gamma d\gamma \begin{bmatrix} E^\circ(\gamma^2)J_0(\gamma r), & -\frac{\bar z}{r}\gamma\,\Theta(\gamma^2)J_1(\gamma r), & \frac{z}{r}\gamma\Theta(\gamma^2)J_1(\gamma r) \\ \frac{z}{r}\gamma\Theta(\gamma^2)J_1(\gamma r), & H(\gamma^2)J_0(\gamma r), & -\frac{z^2}{r^2}\gamma^2 Z(\gamma^2)J_2(\gamma r) \\ \frac{\bar z}{r}\gamma\Theta(\gamma^2)J_1(\gamma r), & -\frac{\bar z^2}{r^2}\gamma^2 Z(\gamma^2)J_2(\gamma r), & H(\gamma^2)J_0(\gamma r) \end{bmatrix}$$

Здесь

$$z = x + iy, \qquad \bar z = x - iy, \qquad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Опасности смешения с пространственной координатой z не имеется, так как последняя нигде не входит в формулы. Для выяснения асимптотики этого ядра следует, как сделано в работе [1], перейти к промежутку $(-\infty, +\infty)$ в функциях Ханкеля $H^{(1)}(\gamma r)$, применив соотношения обхода. Тогда получится для $\Lambda(x, y)$ формула, отличающаяся от (1.9) множителем перед интегралом: $1/4\pi\mu$ вместо $1/2\pi\mu$, тогда как под интегралом будут находиться функции Ханкеля $H^{(1)}(\gamma r)$ с соответственными индексами. Не выписываем этой формулы, так как не ставим целью детальное рассмотрение асимптотики. Заметим только, что для нормальной сосредоточенной силы $\mathbf{P} = (P, 0, 0)$ асимптотика перемещений исследована Ламбом [2]. Заметим лишь, что при вычислении интегралов первоначальный путь интегрирования $(-\infty, +\infty)$ деформируется, оставаясь в верхней полуплоскости; вследствие этого интегралы содержат вклад, обусловленный полюсом-корнем уравнения $R(\gamma^2) = 0$ в правой четвертьплоскости. При вычислении же интегралов, входящих в (1.9), этот полюс обходится сверху; таким образом, каждый из этих интегралов равен главному значению минус произведение $i\pi$ на вычет относительно этого полюса. Итак, векторное уравнение (1.1) приведено к виду

$$\begin{bmatrix} w \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}(x, y) = \iint\limits_\Omega \Lambda(x-\xi, y-\eta)\begin{bmatrix} p \\ {}^1/_2 t_1 \\ {}^1/_2 t_2 \end{bmatrix}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (1.10)$$

2. При произвольной форме области Ω, не имеется эффективного аналитического приема решения этого двумерного уравнения. Но в случае круговой области возможно упрощение. С этой целью разложим вектор силы (p, t_r, t_θ) в ряд Фурье по $e^{im\theta}$

$$(p, t_r, t_\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (f_m(r), g_m(r), h_m(r))\, e^{im\theta} \tag{2.1}$$

Для каждой из составляющих $t_{rm} = g_m(r)\, e^{im\theta}$, $t_{\theta m} = h_m(r)\, e^{im\theta}$ имеем

$$t_{1m} = [g_m(r) + ih_m(r)]\, e^{i(m+1)\theta}, \qquad t_{2m} = [g_m(r) - ih_m(r)]\, e^{i(m-1)\theta} \tag{2.2}$$

Заметим еще, что

$$w_1 = u + iv = (u_r + iu_\theta)\, e^{i\theta}, \qquad w_2 = u - iv = (u_r - iu_\theta)\, e^{-i\theta}$$

Внося эти значения в z, где следует заменить z на $z - \zeta = re^{i\theta} - \rho e^{i\psi}$ и т. п., выполним интегрирование по угловой координате ψ при помощи теоремы сложения Графа [3] (стр. 392). Проводим только результат выкладок

$$2\mu \begin{bmatrix} 2w \\ u_r + iu_\theta \\ u_r - iu_\theta \end{bmatrix}_m (r) = \int_0^a \Lambda^{(m)}(r, \rho) \begin{bmatrix} 2f_m \\ g_m + ih_m \\ g_m - ih_m \end{bmatrix} (\rho)\, \rho d\rho \tag{2.3}$$

Здесь нижний индекс m указывает коэффициент Фурье (при $e^{im\theta}$). Ядро $\Lambda^{(m)}$ — матрица со следующими элементами:

$$\Lambda_{00}{}^{(m)} = 2\int_0^\infty E(\gamma^2)\, J_m(\gamma r)\, J_m(\gamma\rho)\, \gamma\, d\gamma, \qquad \Lambda_{20}{}^{(m)} = \int_0^\infty \Theta(\gamma^2)\, J_{m-1}(\gamma r)\, J_m(\gamma\rho)\, \gamma^2 d\gamma$$

$$\Lambda_{01}{}^{(m)} = \int_0^\infty \Theta(\gamma^2)\, J_{m+1}(\gamma\rho)\, J_m(\gamma r)\, \gamma^2 d\gamma, \qquad \Lambda_{11}{}^{(m)} = \int_0^\infty H(\gamma^2)\, J_{m+1}(\gamma r)\, J_{m+1}(\gamma\rho)\, \gamma\, d\gamma$$

$$\Lambda_{02}{}^{(m)} = \int_0^\infty \Theta(\gamma^2)\, J_{m-1}(\gamma\rho)\, J_m(\gamma r)\, \gamma^2 d\gamma, \qquad \Lambda_{22}{}^{(m)} = \int_0^\infty H(\gamma^2)\, J_{m-1}(\gamma r)\, J_{m-1}(\gamma\rho)\, \gamma\, d\gamma$$

$$\Lambda_{10}{}^{(m)} = \int_0^\infty \Theta(\gamma^2)\, J_{m+1}(\gamma r)\, J_m(\gamma\rho)\, \gamma^2 d\gamma, \qquad \Lambda_{12}{}^{(m)} = -\int_0^\infty Z(\gamma^2)\, J_{m+1}(\gamma r)\, J_{m+1}(\gamma\rho)\, \gamma^3 d\gamma$$

$$\Lambda_{21}{}^{(m)} = -\int_0^a Z(\gamma^2)\, J_{m+1}(\gamma\rho)\, J_{m+1}(\gamma r)\, \gamma^3 d\gamma \tag{2.4}$$

Относительно вычисления этих интегралов сохраняет силу сказанное в конце первого пункта. Здесь можно было бы дать непосредственные выражения $(w, u_r, u_\theta)_m$ через $(f, g, h)_m$, но формулы элементов ядра тогда усложняются. Запись еще более усложняется, если от комплексной формы ряда Фурье перейти к вещественной. Только в случае $m = 0$ имеется упрощение

$$\begin{bmatrix} w \\ u_r \end{bmatrix}(r) = \frac{1}{\mu}\int_0^a \begin{bmatrix} K_{00}, & K_{01} \\ K_{10}, & K_{11} \end{bmatrix}(r, \rho) \begin{bmatrix} f_0 \\ g_0 \end{bmatrix}(\rho)\, \rho d\rho, \quad u_\theta(r) = \frac{1}{\mu}\int_0^a K_{22}(r, \rho)\, h(\rho)\, d\rho \tag{2.5}$$

(нижний индекс $m = 0$ здесь опущен). В этих уравнениях

$$K_{00} = -\int_0^\infty \frac{k_2^2 (\gamma^2 - k_1^2)^{1/2}}{R(\gamma^2)} J_0(\gamma r)\, J_0(\gamma\rho)\, \gamma^2 d\gamma$$

$$K_{11} = -\int_0^\infty \frac{k_2^2 (\gamma^2 - k_2^2)}{R(\gamma^2)} J_1(\gamma r)\, J_1(\gamma\rho)\, \gamma\, d\gamma, \qquad K_{01} = \int_0^\infty \gamma^2 \Theta(\gamma^2)\, J_0(\gamma r)\, J_1(\gamma\rho)\, d\gamma \tag{2.6}$$

$$K_{10} = \int_0^\infty \gamma^2 \Theta(\gamma^2)\, J_0(\gamma\rho)\, J_1(\gamma r)\, d\gamma, \qquad K_{22} = \int_0^\infty \frac{J_1(\gamma r)\, J_1(\gamma\rho)}{(\gamma^2 - k_2^2)^{1/2}}\, \gamma\, d\gamma$$

Уравнения (2.5) могут рассматриваться как уравнения осесимметричной задачи, при этом первое уравнение (2.5) отвечает вдавливанию штампа, а второе — кручению (задача Рейснера — Сагочи). Распределение системы интегральных уравнений на две независимые системы соответствует распадению системы уравнений Ламе в осесимметричном случае. Исчезновение $R(\gamma^2)$ во втором уравнении (2.5), понятное с физической точки зрения, обусловлено тем, что вследствие формул (1.6) имеем

$$H(\gamma^2) - \gamma^2 Z(\gamma^2) = 2(\gamma^2 - k_2^2)^{1/2}$$

Решение системы (2.3) даже в простейшем осесимметричном случае (2.5) упирается в отсутствие сколь-нибудь простых точных решений статической задачи. Нагромождение приближенных квадратур неизбежно снизит точность любого численного алгоритма. Поэтому ограничиваемся описанием такого алгоритма для задачи о вдавливании штампа без трения и сцепления.

3. В случае $g_m = h_m = 0$ имеем

$$w_m(r) = \int_0^a f_m(\rho)\,\rho d\rho \int_0^\infty E(\gamma) J_m(\gamma r) J_m(\gamma\rho)\,\gamma d\gamma \tag{3.1}$$

Ясно, что в этом уравнении $w_m(r)$, $f_m(\rho)$ могут рассматриваться как коэффициенты вещественного ряда Фурье, т. е. как коэффициенты при $\cos m\theta$ и при $\sin m\theta$.

Это уравнение может быть получено и непосредственно из результатов Ламба [2] при помощи теоремы сложения. Осесимметричная задача без трения и сцепления эффективно решена Н. М. Бородачевым [4]. В его работе используется приведение задачи к парным интегральным уравнениям при помощи преобразования Ханкеля. Пара интегральных уравнений задачи приводится затем к уравнению второго рода методом Н. Н. Лебедева относительно некоторой вспомогательной функции. Вычисление давления требует дополнительной численной квадратуры. Метод, развиваемый ниже, отличается от метода Н. М. Бородачева тем, что используется только одно уравнение (3.1), содержащее в качестве неизвестной функции непосредственно искомое давление $f_m(r)$. Преобразование (3.1) к уравнению второго рода осуществляется непосредственно выделением особенности ядра.

Для упрощения дальнейших выкладок перейдем к безразмерным величинам. Положим

$$r = ax,\quad \rho = a\xi,\quad k_2 = \alpha / a,\quad h = k_1 / k_2\quad f_m(r) = \mu\Pi_m(x),\quad w_m(r) = a\Phi_m(x) \tag{3.2}$$

Сделав еще во внутреннем интеграле (3.1) подстановки $\gamma = k_2 s$, получим

$$\Phi_m(x) = \int_0^1 \Pi_m(\xi)\,\xi d\xi \int_0^\infty \frac{-\alpha\sqrt{s^2-h^2}}{F(s)}\, sJ_m(\alpha xs)\, J_m(\alpha\xi s)\, ds$$
$$F(s) = (2s^2-1) - 4s^2(s^2-1)^{1/2}(s^2-h^2)^{1/2} \tag{3.3}$$

В окрестности $s = \infty$ имеем

$$\frac{-\alpha s\sqrt{s^2-h^2}}{F(s)} = \frac{\alpha}{2(1-h^2)} - G(s) \qquad (G(\infty) = 0) \tag{3.4}$$

Здесь G — регулярная функция. Уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{1}{2(1-h^2)}\int_0^1 \Pi_m(\xi)\,\xi d\xi \int_0^\infty J_m(x\lambda)\, J_m(\xi\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \Phi_m(x) + \int_0^1 \Pi_m(\xi)\,\xi d\xi \int_0^\infty J_m(\alpha xs)\, J_m(\alpha\xi s)\, G(s)\, ds \tag{3.5}$$

Ядро в левой части представляет частный случай интеграла Вебера — Шафхайтлина

$$W_{p,q}^{(r)}(x, \xi) = \int_0^\infty J_p(x\lambda) J_q(\xi\lambda) \lambda^r d\lambda$$

Для уравнения

$$\int_0^1 \varphi(\xi) W_{p,q}^{(r)}(x, \xi) d\xi = f(x)$$

известна формула обращения [5]

$$\varphi(x) = \frac{-2^{1-r} x^q}{\Gamma(^1/_2(1+r+p+q))\Gamma(^1/_2(1+r+q-p))} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^{1-r-p-q}\,dt}{(t^2-x^2)^{^1/_2(1-r+q-p)}} \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^{1+p} f(u)\,du}{(t^2-u^2)^{^1/_2(1-r+p-q)}}$$

Применяя эту формулу к (3.5), получим уравнение второго рода

$$\Pi_m(x) = \Psi_m(x) + \int_0^1 K_m(x, y) \Pi_m(y)\,dy \tag{3.6}$$

в котором

$$\Psi_m(x) = -\frac{4(1-h^2)x^{m-1}}{\Gamma(m+^1/_2)\Gamma(^1/_2)} \frac{d}{dx}\left\{\int_x^1 \frac{t^{1-2m}\,dt}{(t^2-x^2)^{^1/_2}} \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u^{1+m}\Phi_m(u)}{(t^2-u^2)^{^1/_2}}\,du\right\} \tag{3.7}$$

$$K_m(x, y) = \frac{2(1-h^2)\sqrt{2}\,x^{m-1}}{\Gamma(m+^1/_2)\Gamma(^1/_2)} \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^{^3/_2-m}}{\sqrt{t^2-x^2}}\left\{\int_0^\infty G(s) J_m(\alpha x s) J_{m-^1/_2}(\alpha s t)(\alpha s)^{^1/_2}\,ds\right\}dt \tag{3.8}$$

4. В частном случае плоского наклонного штампа имеем

$$w = w_0 + \beta r\cos\theta = a(W_0 + \beta x\cos\theta)$$

В этом случае

$$\Phi = W_0, \qquad \Phi_1 = \beta x \qquad (\beta \text{ — угол наклона штампа})$$

Здесь удобно перейти к новым неизвестным функциям

$$H_0(x) = \Pi_0(x)(1-x^2)^{^1/_2}, \qquad H_1(x) = \Pi_1(x)(1-x^2)^{^1/_2}$$

Замечая еще, что $1 - h^2 = {}^1/_2(1-\nu)$, получаем уравнения

$$H_0(x) = \frac{2W_0}{\pi(1-\nu)} - \frac{2}{\pi(1-\nu)}\int_0^1 K_0(x, y) H_0(y)\,dy \tag{4.1}$$

$$H_1(x) = \frac{2a\beta}{\pi(1-\nu)}4x - \frac{2}{\pi(1-\nu)}\int_0^1 K_1(x, y) H_1(y)\,dy \tag{4.2}$$

с ядрами соответственно равными

$$K_0(x, y) = \frac{y}{x}\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)^{^1/_2} \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_0^\infty G(\sigma) J_0(\alpha y\sigma)\cos(\alpha t\sigma)\,d\sigma \tag{4.3}$$

$$K_1(x, y) = y\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)^{^1/_2} \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_0^\infty G(\sigma) J_1(\alpha y\sigma)\sin(\alpha t\sigma)\,d\sigma \tag{4.4}$$

Рассмотрим сначала уравнения (4.1) с ядром (4.3). Нулевое приближение решения этого уравнения

$$H_0^{(0)} = \frac{2W_0}{\pi(1-\nu)}$$

Этому отвечает решение соответствующей статической задачи

$$p_0^{(0)}(r) = \frac{2\mu W_0}{\pi(1-\nu)\, a\sqrt{a^2-r^2}}$$

Для нахождения первого приближения вычисляем интеграл

$$\int_0^1 K_0(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{y}{x}\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)^{1/2}\left\{\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{tdt}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_0^\infty G(\sigma)\, J_0(\alpha y\sigma)\cos(\alpha t\sigma)\, d\sigma\right\} dy$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^1 K_0(x, y)\, dy = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{tdt}{\sqrt{t^2-x^2}}\left\{\int_0^\infty G(\sigma)\cos(\alpha+\sigma)\frac{\sin\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\, d\sigma\right\} \qquad (4.5)$$

К вычислению интеграла

$$I \equiv \int_0^\infty G(\sigma)\cos(\alpha t\sigma)\frac{\sin\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\, d\sigma$$

применим теорию вычетов. Имеем

$$I = \left[\pi c(1-\cos\alpha\sigma_0)\cos\alpha t\sigma_0 + \int_0^1 V(\sigma)(1-\cos\alpha\sigma)\cos(\alpha t\sigma)\, d\sigma\right] +$$

$$+ i\left[\pi c\sin\alpha\sigma_0\cos\alpha t\sigma_0 + \int_0^1 V(\sigma)\sin\alpha\sigma\cos(\alpha t\sigma)\, d\sigma\right]$$

$$\left(c = -\frac{1}{\alpha\sigma_0}\operatorname{res} G(\sigma)\Big|_{\sigma=\sigma_0}, \quad V(\sigma) = \frac{\operatorname{Im} G(\sigma)}{\alpha\sigma}\right)$$

Здесь σ_0 — корень уравнения Релея $F(\sigma) = 0$.

Теперь функция $I = I(\alpha, t)$ может быть разложена в хорошо сходящийся ряд по четным степеням t, а коэффициенты (комплексные) этого ряда, зависящие от α, могут быть разложены в ряды по этому параметру

$$I(\alpha, t) = \sum_{m=0}^\infty [P_m(\alpha) + iQ_m(\alpha)]\, t^{2m}, \qquad P_m(\alpha) = \frac{(-1)^m\alpha^{2m}}{(2m)!}\sum_{k=1}^\infty a_k^{(m)}\alpha^{2k} \qquad (4.6)$$

$$Q_m(\alpha) = \frac{(-1)^m\alpha^{2m}}{(2m)!}\sum_{k=1}^\infty b_k^{(m)}\alpha^{2k+1}, \qquad a_k^{(m)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}[\pi c\sigma_0^{2m+2k} + q_{2m+2k}]$$

$$b_k^{(m)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}[\pi c\sigma_0^{2m+2k-1} + q_{2m+2k-1}], \qquad q_n \equiv \int_0^1 V(\sigma)\,\sigma^n\, d\sigma \qquad (4.7)$$

Подставляя в (4.5) вместо $I(\alpha, t)$ его разложение (4.6) и интегрируя, получим

$$\int_0^1 K_0(x, y)\, dy = \sum_{m=0}^\infty [P_m(\alpha) + iQ_m(\alpha)]\, M_m(x) \qquad (4.8)$$

$$\left(M_m(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^{2m+1}}{\sqrt{t^2-x^2}}\, dt = \frac{d}{du}\int_0^{1/2\pi} u\sin\varphi\,(1-u^2\sin^2\varphi)^m\, d\varphi\right)$$

$$(\sqrt{1-x^2} = u, \quad \sqrt{1-t^2} = \tau)$$

Полиномы $M_m(x)$ — четной степени относительно u и, следовательно, полиномы четной степени относительно x. Приводим несколько первых полиномов

$$M_0(x) = 1, \qquad M_1(x) = 2u^2 - 1, \qquad M_2(x) = {}^8/_3u^4 + 4u^2 - 1$$

$$M_3(x) = {}^{16}/_5u^6 - 8u^4 + 6u^2 - 1 \qquad (u^2 = 1 - x^2)$$

Можно показать, что $|M_m(x)| < \mathrm{const}\,\sqrt{m}$, и, следовательно, ряд в правой части равенства (4.8) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{(2m)!} (\alpha_0)^{2m}$$

Ниже приводим результаты вычисления коэффициентов $P_m{}^{(\alpha)}$ и $Q_m{}^{(\alpha)}$ для $m = 0, 1, 2, 3, 4$ с точностью до членов α^{10} для случая $h^2 = {}^1/_3$ $(\lambda = \mu,\ \nu = {}^1/_4)$. В этом случае $\sigma_0 = 1.0877$, $\pi c = 1.0248$. Пользуясь формулами (4.7) и таблицей значений q_n для $h^2 = {}^1/_3$, взятой из работы [4], найдем

$$P_0(\alpha) = 1.0068\alpha^2 - 0.07913\alpha^4 + 0.002665\alpha^6 - 0.00005433\alpha^8 + \ldots$$

$$Q_0(\alpha) = 2.3243\alpha - 0.3186\alpha^3 + 0.01622\alpha^5 - 0.0004206\alpha^7 + \ldots$$

$$P_1(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2!}[0.9495\alpha^2 - 0.07986\alpha^4 + 0.000312\alpha^6 - \ldots]$$

$$Q_1(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}[1.9113\alpha - 0.3244\alpha^3 + 0.01766\alpha^5 - 0.0004761\alpha^7 + \ldots]$$

$$P_2(\alpha) = \frac{\alpha^4}{4!}[0.9583\alpha^2 - 0.09361\alpha^4 + 0.003560\alpha^6 - \ldots$$

$$Q_2(\alpha) = \frac{\alpha^4}{4!}[1.9466\alpha - 0.3533\alpha^3 + 0.01996\alpha^5 - \ldots]$$

$$P_3(\alpha) = -\frac{\alpha^6}{6!}[1.1232\alpha^2 - 0.1068\alpha^4 + \ldots]$$

$$Q_3(\alpha) = -\frac{\alpha^6}{6!}[2.1199\alpha - 0.3858\alpha^3 + \ldots]$$

$$P_4(\alpha) = \frac{\alpha^8}{8!}[1.2816\alpha^2 - \ldots], \qquad Q_4(\alpha) = \frac{\alpha^8}{8!}[2.3946\alpha - \ldots]$$

Первое приближение решения уравнения (4.1) имеет, следовательно, вид

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2W_0}{\pi(1-\nu)}\left\{1 - \frac{2}{\pi(1-\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}[P_m(\alpha) + iQ_m(\alpha)]\,M_m(x)\right\} \qquad (4.9)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках равенства (4.9) представляет динамическую поправку к решению соответствующей статической задачи.

Рассмотрим теперь уравнение (4.2) с ядром (4.4) и найдем решение этого уравнения в первом приближении. Вычисляем интеграл

$$\int_0^1 K_1(x, y)\,y\,dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)^{1/2}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_0^{\infty} G(\sigma)\,J_1(\alpha y\sigma)\sin(\alpha t\sigma)\,d\sigma\right\}dy$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^1 K_1(x, y)\,y\,dy = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\int_0^{\infty} G(\sigma)\sin(\alpha t\sigma)\left(\frac{\sin\alpha\sigma}{(\alpha\sigma)^2} - \frac{\cos\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\right)d\sigma \qquad (4.10)$$

Применяя к вычислению внутреннего интеграла

$$I_1(\alpha, t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)\left(\frac{\sin\alpha\sigma}{(\alpha\sigma)^2} - \frac{\cos\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\right)\sin(\alpha t\sigma)\,d\sigma$$

теорию вычетов, находим

$$I_1(\alpha, t) = \left[\pi c\left(\sin\alpha\sigma_0 - \frac{1-\cos\alpha\sigma_0}{\alpha\sigma_0}\right)\sin(\alpha\sigma_0 t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 V(\sigma)\left(\sin\alpha\sigma - \frac{1-\cos\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\right)\sin(\alpha t\sigma)\,d\sigma\right] +$$

$$+ i\left[\pi c\left(\cos\alpha\sigma_0 - \frac{\sin\alpha\sigma_0}{\alpha\sigma_0}\right)\sin(\alpha\sigma_0 t) + \int_0^1 V(\sigma)\left(\cos\sigma - \frac{\sin\alpha\sigma}{\alpha\sigma}\right)\sin(\alpha t\sigma)\,d\sigma\right]$$

Разлагая теперь функцию $I_1(\alpha t)$ в ряд по степеням t, а коэффициенты получившегося ряда, зависящие от α, — в ряды по α, получаем

$$I_1(\alpha, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [\overset{\circ}{P}_m(\alpha) + i\overset{\circ}{Q}_m(\alpha)]\, t^{2m-1} \qquad (4.11)$$

$$\overset{\circ}{P}_m(\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\alpha^{2m-1}}{(2m-1)!}\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\,m}\alpha^{2k-1}, \qquad \overset{\circ}{Q}_m(\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\alpha^{2m-1}}{(2m-1)!}\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(m)}\alpha^{2k-2}$$

$$c_k^{(m)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!\,2k}(\pi c\sigma_0^{2m+2k-2} + q_{2m+2k-2}) \quad (k\neq 1)$$

$$d_k^{(m)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-3)!\,(2k-1)}(\pi c\sigma_0^{2m+2k-3} + q_{2m+2k-3}), \qquad d_1^{(m)} = 0$$

Подставляя в (4.10) вместо $I_1(\alpha, t)$ его разложение (4.11) и интегрируя получим

$$\int_0^1 K_1(x, y)\, y dy = \sum_{m=1}^{\infty} [\overset{\circ}{P}_m(\alpha) + i\overset{\circ}{Q}_m(\alpha)] M_{m-1}(x)$$

Приводим разложения нескольких первых коэффициентов $\overset{\circ}{P}_m(\alpha)$ и $\overset{\circ}{Q}_m(\alpha)$ для $h^2 = {}^1/_3$ $(\nu = {}^1/_4)$

$$\overset{\circ}{P}_1(\alpha) = \frac{\alpha}{1!}[1.0068\alpha - 0.2374\alpha^3 + 0.01331\alpha^5 - 0.0003900\alpha^7 + \ldots]$$

$$\overset{\circ}{Q}_1(\alpha) = \frac{\alpha}{1!}[-0.6371\alpha^2 + 0.06489\alpha^4 - 0.002524\alpha^6 + 0.00005279\alpha^8 - \ldots]$$

$$\overset{\circ}{P}_2(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{3!}[0.9495\alpha - 0.2398\alpha^3 + 0.01560\alpha^5 - 0.0004450\alpha^7 + \ldots]$$

$$\overset{\circ}{Q}_2(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{3!}[-0.6489\alpha^2 + 0.07066\alpha^4 - 0.002851\alpha^6 + \ldots]$$

$$\overset{\circ}{P}_3(\alpha) = \frac{\alpha^5}{5!}[0.9583\alpha - 0.2808\alpha^3 + 0.01780\alpha^5 - \ldots]$$

$$\overset{\circ}{Q}_3(\alpha) = \frac{\alpha^5}{5!}[-0.7066\alpha^2 + 0.07982\alpha^4 - \ldots]$$

$$\overset{\circ}{P}_4(\alpha) = \frac{-\alpha^7}{7!}[1.1232\alpha - 0.3204\alpha^3 + \ldots], \qquad \overset{\circ}{Q}_4(\alpha) = \frac{-\alpha^7}{7!}[-0.7982\alpha^2 + \ldots]$$

Первое приближение решения уравнения (4.2) имеет, следовательно, вид

$$H_1^{(1)}(x) = \frac{8\alpha\beta}{\pi(1-\nu)}\left\{1 - \frac{2}{\pi(1-\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}[\overset{\circ}{P}_m(\alpha) + i\overset{\circ}{Q}_m(\alpha)]\, M_{m-1}(x)\right\} x$$

Здесь, как и в (4.9), второе слагаемое имеет смысл динамической поправки к решению соответствующей статической задачи. Заметим, что для получения следующих приближений придется иметь дело с теми же интегралами, только вместо $\sin\alpha\sigma / \alpha\sigma$ в интегралах $I(\alpha, t)$ и $I_1(\alpha, t)$ будут $J_{m+{}^1/_2}(\alpha\sigma) / (\alpha\sigma)^{m+{}^1/_2}$.

Таким образом, в принципе следующие приближения находятся аналогично, однако объем вычислений значительно возрастает.

Поступила 8 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
2. Lamb H. On the propagations of tremors over the surface of an elastic solid. Trans. Roy. Philos. Soc. A, 1904, vol. 203.
3. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. Изд. иностр. лит., 1949.
4. Бородачев Н. М. Динамическая контактная задача для штампа с плоским круговым основанием, лежащего на упругом полупространстве. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
5. Ростовцев Н. А. О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейного деформируемого основания. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.