Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ О КРУЧЕНИИ БЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ ДУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Г. М. Валов

(Кострома)

Решаются две смешанные задачи о кручении упругого бесконечного сплошного кругового цилиндра при симметричном нагружении относительно его оси. В первой задаче на конечном участке поверхности цилиндра задано перемещение, а вне этого участка — касательное напряжение. Во второй задаче на конечном участке поверхности цилиндра задано касательное напряжение, а вне этого участка — перемещение. Каждая задача рассматривается в двух вариантах: симметричной и антисимметричной деформации относительно плоскости перпендикулярной к оси цилиндра.

При решении задач использовано частное решение уравнения кручения валов переменного сечения, содержащее одну произвольную гармоническую функцию, а также метод дифференцирования граничных условий. Решения задач о кручении цилиндра сведены к двум видам дуальных интегральных уравнений. Их решения представлены в виде интегралов, содержащих неизвестную функцию, которая находится из интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром.

§ 1. Представление решения уравнения кручения. Легко убедиться, что уравнению кручения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right] = 0 \tag{1.1}$$

удовлетворяет функция

$$v = \frac{\partial \delta}{\partial r} \qquad \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} = 0\right) \tag{1.2}$$

Здесь δ — произвольная гармоническая функция. Тогда из формул закона Гука получаем следующие выражения для напряжений $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\varphi z}$:

$$\tau_{r\varphi} = G\left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \delta}{\partial r}\right], \qquad \tau_{\varphi z} = G\frac{\partial^2 \delta}{\partial r\, \partial z} \tag{1.3}$$

Гармоническую функцию δ возьмем в виде несобственного интеграла

$$\delta = \int_0^{+\infty} I_0(\lambda r)\,[A_1(\lambda)\sin \lambda z + A_2(\lambda)\cos \lambda z]\,d\lambda \tag{1.4}$$

где $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ — неизвестные функции, которые должны определяться из граничных условий задачи; $I_0(\lambda r)$ — модифицированная функция Бесселя порядка нуль. Подставляя (1.4) в (1.2) и (1.3), получаем

$$v = \int_0^{+\infty} \lambda I_1(\lambda r)\,[A_1(\lambda)\sin \lambda z + A_2(\lambda)\cos \lambda z]\,d\lambda$$

$$\tau_{r\varphi} = G\int_0^{+\infty} \lambda^2 I_2(\lambda r)\,[A_1(\lambda)\sin \lambda z + A_2(\lambda)\cos \lambda z]\,d\lambda \tag{1.5}$$

$$\tau_{z\varphi} = G\int_0^{+\infty} \lambda^2 I_1(\lambda r)\,[A_1(\lambda)\cos \lambda z - A_2(\lambda)\sin \lambda z]\,d\lambda$$

Здесь $I_1(\lambda r)$, $I_2(\lambda r)$ — функции Бесселя, G — модуль сдвига. Формулы (1.5) используем ниже для решения граничных задач о кручении бесконечного кругового цилиндра.

§ 2. Метод дифференцирования граничных условий. Рассмотрим смешанную задачу теории упругости для симметрично нагруженного тела вращения или тела, находящегося в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния. Пусть рассматриваемое упругое тело ограничено поверхностью S. Предположим, что на некоторой части S_0 поверхности S задано граничное условие для проекции вектора перемещения. Обозначим эту проекцию через v. Процесс решения смешанных граничных задач теории упругости в некоторых случаях существенно упрощается, если граничное условие для v заменить граничным условием для частной производной по касательному направлению. Граничное условие для v удовлетворяется при помощи граничного условия для частной производной с точностью до константы. Поэтому граничное условие для частной производной следует дополнить условием для v в некоторой точке участка S_0. В качестве дополнительного условия можно взять условие, что главный вектор и главный момент усилий, приложенных на участке S_0, равны заданным значениям.

Этот метод используем при решении рассматриваемых ниже граничных задач.

§ 3. Представление решения двух типов дуальных интегральных уравнений. Рассматриваемые ниже граничные задачи приводятся к следующим дуальным интегральным уравнениям:

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}[1-g(\lambda)]\,f(\lambda)\sin\lambda z\,d\lambda=F_1(z)\qquad(0<z<a)\\ \int_0^{+\infty}f(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda=F_2(z)\qquad(a<z<+\infty)\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь $f(\lambda)$ — неизвестная функция, а $g(\lambda)$, $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — заданные функции. Считаем, что функция $g(\lambda)$ обладает свойством: она непрерывна на промежутке $0<\lambda<+\infty$, произведение $\lambda g(\lambda)$ при $\lambda\to 0$ ограничено, существует такое α, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^p\,[\lambda g(\lambda)-\alpha]=0\qquad(0<p<1)\tag{3.2}$$

Указанное свойство ниже называем «свойством А». Функцию $F_2(z)$ считаем представимой интегралом Фурье

$$F_2(z)=\int_0^{+\infty}f_2(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda,\qquad f_2(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty}F_2(z)\cos\lambda z\,dz\tag{3.3}$$

Если ввести новую неизвестную функцию

$$f_1(\lambda)=f(\lambda)-f_2(\lambda)\tag{3.4}$$

то уравнения (3.1) в силу (3.3) приводятся к виду

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}[1-g(\lambda)]\,f_1(\lambda)\sin\lambda z\,d\lambda=F(z)\qquad(0<z<a)\\ \int_0^{+\infty}f_1(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda=0\qquad(a<z<+\infty)\end{gathered}\tag{3.5}$$

где

$$F(z) = F_1(z) - \int_0^{+\infty} [1 - g(\lambda)] f_2(\lambda) \sin \lambda z d\lambda \qquad (3.6)$$

Ищем решение дуальных интегральных уравнений (3.5) в виде

$$f_1(\lambda) = \int_0^a t^{1/2} \varphi(t) J_0(\lambda t)\, dt \qquad (3.7)$$

где $\varphi(t)$ — новая искомая функция. Тогда в силу интегралов

$$\int_0^{+\infty} J_0(\lambda t) \sin \lambda z\, d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } z < t \\ (z^2 - t^2)^{-1/2}, & \text{если } x > t \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} J_0(\lambda t) \cos \lambda z\, d\lambda = \begin{cases} (t^2 - z^2)^{-1/2}, & \text{если } 0 \leqslant z < t \\ 0, & \text{если } t < z \end{cases} \qquad (3.8)$$

второе уравнение (3.5) удовлетворяется тождественно. Первое уравнение (3.5), следуя [1], перепишем так:

$$\int_0^{+\infty} f_1(\lambda) \sin \lambda z d\lambda = F_3(z) \qquad (0 < z < a) \qquad (3.9)$$

где

$$F_3(z) = F(z) + \int_0^{+\infty} g(\lambda) f_1(\lambda) \sin \lambda z d\lambda \qquad (3.10)$$

Принимая правую часть уравнения (3.9) за известную функцию, подставим в него функцию (3.7) и снова используем интеграл (3.8). В результате чего уравнение (3.9) приводится к уравнению Шлемильха [2].

$$\frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{t^{1/2} \varphi(t)\, dt}{\sqrt{z^2 - t^2}} = \frac{2}{\pi} F_3(z) \qquad (0 < z < a) \qquad (3.11)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{t}} \left[F_3(0) + t \int_0^{1/2\pi} F_3'(t \sin \theta)\, d\theta \right] \qquad (3.12)$$

Подставляя (3.10) в (3.12) и используя равенство

$$J_0(\lambda t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos(\lambda t \sin \theta)\, d\theta$$

получим

$$\varphi(t) = t^{1/2} \int_0^{+\infty} \lambda g(\lambda) f_1(\lambda) J_0(\lambda t)\, d\lambda + \chi(t) \qquad (3.13)$$

где

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{t}} \left[F(0) + t \int_0^{1/2\pi} F'(t \sin \theta)\, d\theta \right] \qquad (3.14)$$

Далее, подставляя (3.7) в (3.13), получим интегральное уравнение для нахождения $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \int_0^a K(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \chi(t) \tag{3.15}$$

где

$$K(t, \tau) = (t\tau)^{1/2} \int_0^{+\infty} \lambda g(\lambda)\, J_0(\lambda t)\, J_0(\lambda\tau)\, d\lambda \tag{3.16}$$

К полученному решению (3.7) неоднородных уравнений (3.5) присоединим решение однородных уравнений. Ищем решение уравнений (3.5) при $F(z) \equiv 0$ в виде

$$f_1(\lambda) = C_0 [J_0(\lambda a) + f_3(\lambda)] \tag{3.17}$$

где C_0 — произвольная постоянная, $f_3(\lambda)$ — неизвестная функция. Подставляя (3.17) в (3.5), убеждаемся, что функция $f_3(\lambda)$ должна удовлетворять неоднородным уравнениям (3.5) с правой частью

$$F_4(z) = \int_0^{+\infty} g(\lambda)\, J_0(\lambda a) \sin \lambda z\, d\lambda \tag{3.18}$$

Поэтому

$$f_3(\lambda) = \int_0^a t^{1/2} \varphi_0(t)\, J_0(\lambda t)\, dt \tag{3.19}$$

где $\varphi_0(t)$ находится из интегрального уравнения (3.15), (3.16) со свободным членом (3.14), в котором функцию $F(z)$ надо заменить на функцию (3.18). Таким образом, решение исходных интегральных уравнений (3.1) в силу (3.4), (3.7), (3.3), (3.17) и (3.19) дается формулой (3.20)

$$f(\lambda) = C_0 J_0(\lambda a) + \int_0^a t^{1/2} [\varphi(t) + C_0 \varphi_0(t)]\, J_0(\lambda t)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_a^{+\infty} F_2(z) \cos \lambda z\, dz$$

где функции $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ находятся из интегрального уравнения (3.15), (3.16), при этом свободный член $\chi(t)$ уравнения (3.15) для нахождения функции $\varphi(t)$ дается формулами (3.14), (3.6), а для нахождения $\varphi_0(t)$ свободный член $\chi(t)$ дается формулой (3.14), в которой функцию $F(z)$ надо заменить на $F_4(z)$, даваемую формулой (3.18).

Можно доказать, что если функция $g(\lambda)$ обладает свойством A, то ядро (3.16) является функцией суммируемой с квадратом в прямоугольнике $0 \leqslant t \leqslant a$, $0 \leqslant \tau \leqslant a$. Более того, оно является функцией непрерывной в целом [3]. Если $\alpha = 0$, то ядро (3.16) непрерывно на указанном прямоугольнике. Поэтому, если функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ таковы, что свободный член $\chi(t)$ является функцией суммируемой с квадратом на $[0, a]$, то уравнение (3.15) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Если $\chi(t)$ непрерывна на промежутке $[0, a]$, решение интегрального уравнения (3.15) непрерывно на этом промежутке [3]. Если $g(\lambda)$ обладает свойством A и решение интегрального уравнения (3.15) является функцией ограниченной вариации, то можно доказать [1], что все операции по перестановке порядка интегрирования, перехода к пределу и дифференцирования под знаком интеграла,

[1] Доказательство этих фактов опускаем ввиду громоздкости.

выполненные выше, являются законными, а решение интегрального уравнения Шлемильха (3.11) имеет непрерывную производную [2] на $[0, a]$.

Отметим, что формально другое представление решения неоднородных дуальных интегральных уравнений (3.1) для случая $F_2(z) = 0$ дано в [4,5].

К рассмотренным интегральным уравнениям (3.1) сводятся следующие дуальные интегральные уравнения:

$$\int_0^{+\infty} [1 - g(\lambda)]\, \lambda f(\lambda) \cos \lambda z\, d\lambda = \Phi(z) \qquad (0 < z < a)$$

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda z\, d\lambda = F_2(z) \qquad (a < z < +\infty)$$

если первое уравнение формально проинтегрировать от нуля до z и ввести обозначение

$$\int_0^z \Phi(t)\, dt = F_1(z)$$

Теперь рассмотрим дуальные интегральные уравнения второго типа

$$\int_0^{+\infty} [1 - g(\lambda)]\, f(\lambda) \sin \lambda z\, d\lambda = F_1(z) \qquad (0 < z < a)$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda f(\lambda) \sin \lambda z\, d\lambda = F_2(z) \qquad (a < z < +\infty) \qquad (3.21)$$

Путем аналогичных рассуждений устанавливается, что решение этих уравнений дается формулой

$$f(\lambda) = \int_0^a t^{1/2} \varphi(t)\, J_0(\lambda t)\, dt + \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^{+\infty} F_2(z) \sin \lambda z\, dz \qquad (3.22)$$

где функция $\varphi(t)$ находится из интегрального уравнения с симметричным ядром

$$\varphi(t) = \int_0^a K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \chi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a) \qquad (3.23)$$

$$K(t, \tau) = (t\tau)^{1/2} \int_0^{+\infty} \lambda g(\lambda)\, J_0(\lambda\tau)\, J_0(\lambda t)\, d\lambda \qquad (3.24)$$

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{t}}\, Q(t) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} t^{1/2} \int_0^{+\infty} \lambda^{1/2} g(\lambda)\, M(\lambda)\, J_0(\lambda t)\, d\lambda \qquad (3.25)$$

$$M(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \lambda^{-1/2} \int_a^{+\infty} F_2(z) \sin \lambda z\, dz \qquad (3.26)$$

$$Q(t) = \lim_{z \to 0} \left[F_1(z) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \lambda^{-1/2} M(\lambda) \sin \lambda z\, d\lambda\right] + \qquad (3.27)$$

$$+\, t \int_0^t (t^2 - z^2)^{-1/2} \frac{d}{dz} \left[F_1(z) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} M(\lambda) \frac{\sin \lambda z}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda\right] dz$$

Если $g(\lambda)$ обладает свойством А, а функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ таковы, что свободный член (3.25) является функцией суммируемой с квадратом на $[0, a]$, то уравнение (3.23) является уравнением Фредгольма.

Частный случай дуальных уравнений (3.21) рассмотрен в [6].

§ 4. Первая задача о кручении цилиндра. Симметричный случай. Рассмотрим смешанную граничную задачу о симметричном кручении упругого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$, $-\infty < z < +\infty$ (фиг. 1).

На участке $-a < z < a$ боковой поверхности $r = R$ задано перемещение $v(R, z)$, а на остальной части боковой поверхности цилиндра заданы касательные напряжения $\tau_{r\varphi}(R, z)$. Общая задача о кручении, которую рассматриваем, является комбинацией двух частных случаев: 1) симметричного нагружения боковой поверхности относительно плоскости $z = 0$ (фиг. 1); 2) антисимметричного нагружения относительно плоскости $z = 0$.

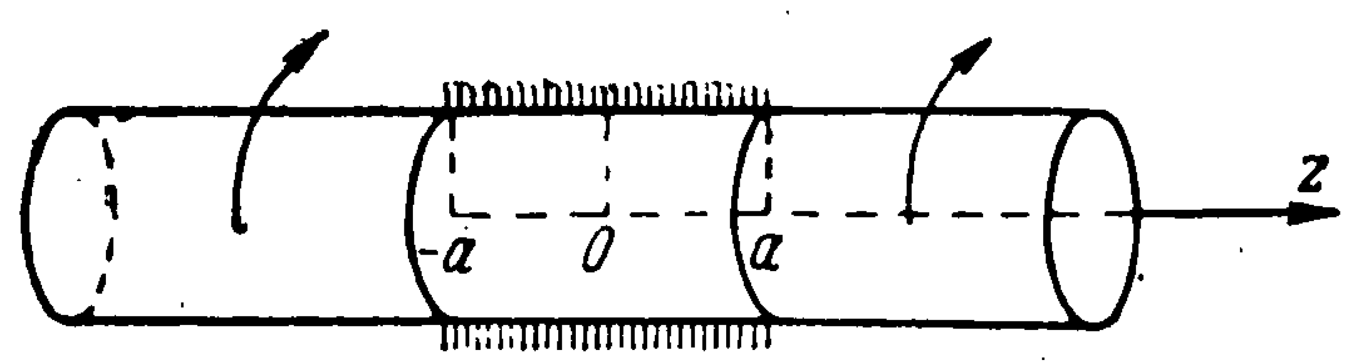
Вначале решим задачу для симметричного случая, которая математически формулируется так: требуется найти функцию $v(r, z)$, удовлетворяющую внутри цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$, $-\infty < z < +\infty$ дифференциальному уравнению (1.1), а на его поверхности условиям

$$v = \psi(z) \quad \text{при } r = R, \quad -a < z < a \tag{4.1}$$

$$\tau_{r\varphi} = q(z) \quad \text{при } r = R, \quad a < |z| < +\infty \tag{4.2}$$

Здесь $\psi(z)$ и $q(z)$ — четные функции, при этом проекция момента на ось z должна равняться нулю

$$4\pi R^2 \int_0^{+\infty} \tau_{r\varphi}(R, z)\, dz = 0 \tag{4.3}$$



Фиг. 1

Если на участке $-a < z < a$ боковой поверхности цилиндр закреплен, то $\psi(z) = 0$.

Функцию $q(z)$ будем считать представимой интегралом Фурье

$$q(z) = \int_0^{+\infty} q_1(\lambda) \cos \lambda z\, d\lambda, \qquad q_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_a^{+\infty} q(z) \cos \lambda z\, dz \tag{4.4}$$

Ищем решение поставленной задачи в виде формул (1.5), положив в них

$$A_1(\lambda) = 0 \tag{4.5}$$

Вместо граничного условия (4.1) рассмотрим граничное условие для частной производной

$$\partial v / \partial z = \psi'(z) \quad \text{при } r = R, \quad -a < z < a \tag{4.6}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.6) и (4.2), получим следующие дуальные интегральные уравнения относительно функции $A_2(\lambda)$:

$$\begin{gathered} \int_0^{+\infty} \lambda^2 A_2(\lambda) I_1(\lambda R) \sin \lambda z\, d\lambda = \psi'(z) \qquad (0 < z < a) \\ \int_0^{+\infty} \lambda^2 A_2(\lambda) I_2(\lambda R) \cos \lambda z\, d\lambda = \frac{1}{G} q(z) \qquad (a < z < +\infty) \end{gathered} \tag{4.7}$$

Если положить

$$A_2(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda^2 I_2(\lambda R)}, \qquad F_1(z) = \psi'(z), \qquad F_2(z) = \frac{1}{G} q(z)$$

$$1 - g(\lambda) = \frac{I_1(\lambda R)}{I_2(\lambda R)}, \qquad g(\lambda) = 1 - \frac{I_1(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} \tag{4.8}$$

то уравнения (4.7) приводятся к виду (3.1). Поэтому их решение в силу (3.20) дается формулой

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 I_2(\lambda R)}\left\{C_0 J_0(\lambda a) + \int_0^a t^{1/2}[\varphi(t) + C_0\varphi_0(t)] J_0(\lambda t)\, dt + f_2(\lambda)\right\} \tag{4.9}$$

Здесь $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ находятся из интегрального уравнения (3.15), (3.16), (3.14), при этом функция $F(z)$, входящая в выражение свободного члена (3.14), для нахождения $\varphi(t)$ имеет выражение

$$F(z) = \psi'(z) - \int_0^{+\infty} \frac{I_1(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} f_2(\lambda) \sin \lambda z\, d\lambda$$

а для нахождения $\varphi_0(t)$ — выражение

$$F(z) = \int_0^{+\infty} g(\lambda) J_0(\lambda a) \sin \lambda z\, d\lambda$$

где $g(\lambda)$ дается формулой (4.8), а

$$f_2(\lambda) = \frac{2}{\pi G} \int_a^{+\infty} q(z) \cos \lambda z\, dz \qquad (0 \leqslant \lambda < +\infty) \tag{4.10}$$

Легко показать, что

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda g(\lambda) = -\frac{4}{R}, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^p\left[\lambda g(\lambda) + \frac{3}{2R}\right] = 0 \qquad (0 < p < 1)$$

т. е. функция $g(\lambda)$ обладает свойством А. Поэтому ядро (3.16) в данной задаче является ядром Фредгольма.

Найдем распределение касательных напряжений $\tau_{r\varphi}$ на заделанном участке $-a < z < a$ боковой поверхности. Из (1.5) в силу (4.5) находим

$$\tau_{r\varphi}(R, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda^2 A_2(\lambda) I_2(\lambda R) \cos \lambda z\, d\lambda \tag{4.11}$$

Подставляя (4.9) в (4.11) и используя интеграл (3.8) и формулу обращения для (4.10), получим

$$\tau_{r\varphi}(R, z) = G\left\{\frac{C_0}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int_z^a \frac{t^{1/2}[\varphi(t) + C_0\varphi_0(t)]}{\sqrt{t^2 - z^2}}\, dt\right\} \qquad (-a < z < a) \tag{4.12}$$

Таким образом, касательные напряжения на заделанном участке боковой поверхности непосредственно выражаются через функции $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$. Очевидно, в точках $z = \pm a$ боковой поверхности касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$ обращаются в бесконечность. Закон их распределения близок к закону распределения нормальных напряжений под штампом [7].

Чтобы закончить решение задачи, нужно определить постоянную C_0. Она найдется из условия равновесия (4.3), которое вместе с граничным условием (4.6) эквивалентно граничному условию (4.1). Подставив (4.12) и (4.2) в (4.3) и вычислив интегралы, получим

$$C_0\left[1+\int_0^a t^{1/2}\varphi_0(t)\,dt\right]=-\int_0^a t^{1/2}\varphi(t)\,dt-\frac{M_k}{2\pi^2R^2G}\qquad\left(M_k=4\pi R^2\int_a^{+\infty}q(z)\,dz\right)$$

Здесь через M_k обозначен крутящий момент, образованный внешними напряжениями (4.2), приложенными к боковой поверхности цилиндра.

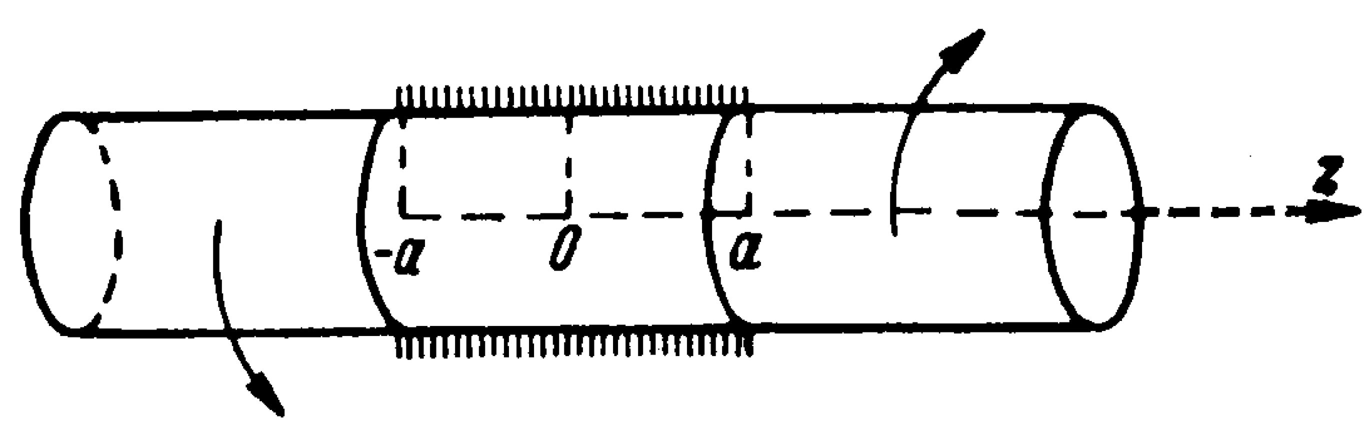
§ 5. Первая задача о кручении цилиндра. Антисимметричный случай. Запишем граничные условия задачи, считая, что участок боковой поверхности $-a<z<a$ закреплен (фиг. 2)

$$v=0\quad\text{при } r=R,\ -a<z<a \tag{5.1}$$

$$\tau_{r\varphi}=F_2(z)\quad\text{при } r=R,\ a<|z|<+\infty \tag{5.2}$$

Здесь $F_2(z)$ — нечетная функция, при этом касательные напряжения, приложенные на участке боковой поверхности от a до $+\infty$, создают крутящий момент

$$M_k=2\pi R^2\int_a^{+\infty}F_2(z)\,dz$$



Фиг. 2

Функцию $F_2(z)$ считаем представимой интегралом Фурье

$$F_2(z)=\int_0^{+\infty}f_2(\lambda)\sin\lambda z\,d\lambda,\qquad f_2(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty}F_2(z)\sin\lambda z\,dz \tag{5.3}$$

Очевидно

$$\int_0^{+\infty}f_2(\lambda)\sin\lambda z\,d\lambda=0\qquad(0<z<a) \tag{5.4}$$

Ищем решение этой задачи в виде формул (1.5), положив в них

$$A_2(\lambda)=0 \tag{5.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.1) и (5.2), получим дуальные интегральные уравнения относительно неизвестной функции $A_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\lambda A_1(\lambda)I_1(\lambda R)\sin\lambda z\,d\lambda=0 && (0<z<a)\\ &G\int_0^{+\infty}\lambda^2A_1(\lambda)I_2(\lambda R)\sin\lambda z\,d\lambda=F_2(z) && (a<z<+\infty)\end{aligned} \tag{5.6}$$

Если положить

$$A_1(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{G\lambda I_2(\lambda R)},\qquad\frac{I_1(\lambda R)}{I_2(\lambda R)}=1-g(\lambda) \tag{5.7}$$

то уравнения (5.6) приводятся к виду (3.21) при $F_1(z) = 0$. Поэтому их решение в силу (3.22) дается формулой

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{G\lambda I_2(\lambda R)}\left[\int_0^a t^{1/2}\varphi(t)J_0(\lambda t)\,dt + \frac{2}{\pi\lambda}\int_a^{+\infty} F_2(z)\sin\lambda z\,dz\right] \tag{5.8}$$

где $\varphi(t)$ находится из интегрального уравнения (3.23), (3.24), (3.25). Так как функция $g(\lambda)$, даваемая формулой (5.7), совпадает с функцией (4.8), то ядро (3.24) является фредгольмовским.

Найдем распределение касательных напряжений $\tau_{r\varphi}$ на заделанном участке $0 \leqslant z < a$ боковой поверхности. Для этого преобразуем выражение (5.8), используя (5.3) и формулу

$$J_0(\lambda t) = \frac{1}{\lambda}\frac{dJ_1(\lambda t)}{dt} + \frac{1}{\lambda t}J_1(\lambda t)$$

Получим

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{G\lambda^2 I_2(\lambda R)}\Big\{a^{1/2}\varphi(a)J_1(\lambda a) -$$
$$-\int_0^a\left[t^{1/2}\varphi'(t) - \frac{1}{2}t^{-1/2}\varphi(t)\right]J_1(\lambda t)\,dt + f_2(\lambda)\Big\} \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в выражение (1.5) для $\tau_{r\varphi}$ и учитывая (5.4) и (5.5), получим

$$\tau_{r\varphi}(R, z) = \frac{a^{-1/2}\varphi(a)\,z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - z\int_z^a\left[t^{1/2}\varphi'(t) - \frac{1}{2}t^{-1/2}\varphi(t)\right]\frac{dt}{t\sqrt{t^2 - z^2}} \qquad (0 < z < a)$$

при этом использован интеграл

$$\int_0^{+\infty} J_1(\lambda t)\sin\lambda z\,d\lambda = \begin{cases} z\cdot t^{-1}(t^2 - z^2)^{-1/2}, & \text{если } 0 < z < t \\ 0, & \text{если } t < z < +\infty \end{cases}$$

Видно, что в точках $z = \pm a$ на боковой поверхности касательные напряжения обращаются в бесконечность.

§ 6. Вторая задача о кручении цилиндра. Симметричный случай. Пусть на участке $-a < z < a$ боковой поверхности рассматриваемого цилиндра (фиг. 3) заданы касательные напряжения $\tau_{r\varphi}(R, z)$, а на остальной части боковой поверхности задано перемещение $v(R, z)$. В общем случае рассматриваемая задача является комбинацией симметричного и антисимметричного случаев нагружения боковой поверхности относительно плоскости $z = 0$.

Граничные условия для симметричного случая запишутся так:

$$\tau_{r\varphi} = q(z) \quad \text{при } r = R, \ -a < z < a \tag{6.1}$$

$$v = F_2(z) \quad \text{при } r = R, \ a < |z| < +\infty \tag{6.2}$$

Здесь $q(z)$ и $F_2(z)$ — четные функции, при этом проекция момента на ось z должна равняться нулю

$$4\pi R^2\int_0^{+\infty}\tau_{r\varphi}(R, z)\,dz = 0$$

Функцию $F_2(z)$ считаем представимой интегралом Фурье

$$F_2(z) = \int_0^{+\infty} f_2(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda, \qquad f_2(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty} F_2(z)\cos\lambda z\,dz \tag{6.3}$$

Решение поставленной задачи ищем в виде формул (1.5), положив в них $A_1(\lambda) = 0$.

Удовлетворяя граничным условиям (6.1) и (6.2), получим дуальные интегральные уравнения для нахождения неизвестной функции $A_2(\lambda)$

$$\begin{gathered} G\int_0^{+\infty} \lambda^2 A_2(\lambda) I_2(\lambda R)\cos\lambda z\,d\lambda = q(z) \qquad (0<z<a) \\ \int_0^{+\infty} \lambda A_2(\lambda) I_1(\lambda R)\cos\lambda z\,d\lambda = F_2(z) \qquad (a<z<+\infty) \end{gathered} \tag{6.4}$$

Если проинтегрировать от нуля до z первое из этих уравнений и положить

$$A_2(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda I_1(\lambda R)}, \qquad g(\lambda) = 1 - \frac{I_2(\lambda R)}{I_1(\lambda R)}, \qquad F_1(z) = \frac{1}{G}\int_0^z q(z)\,dz \tag{6.5}$$

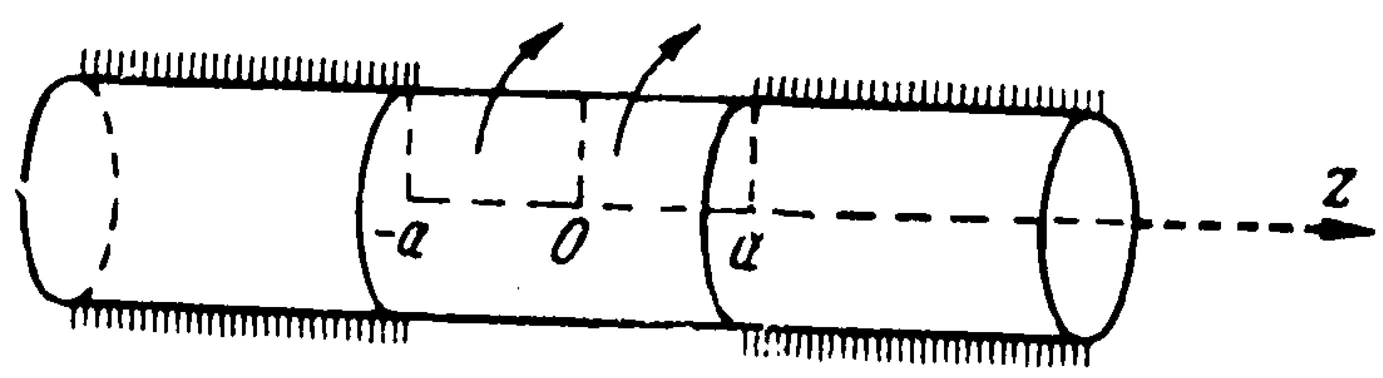
то уравнения (6.4) приводятся к виду (3.1), решение которых дается формулой (3.20).

Полагая в формуле (3.20) $C_0 = 0$, получим следующее выражение для решения уравнений (6.4):

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda I_1(\lambda R)}\left\{\int_0^a t^{1/2}\varphi(t) J_0(\lambda t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty} F_2(z)\cos\lambda z\,dz\right\} \tag{6.6}$$

Здесь $\varphi(t)$ находится из интегрального уравнения (3.15), (3.16), (3.14), при этом функция $F(z)$, входящая в свободный член (3.14), имеет выражение

$$F(z) = \frac{1}{G}\int_0^z q(z)\,dz - \int_0^{+\infty} \frac{I_2(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} f_2(\lambda)\sin\lambda z\,d\lambda$$



Фиг. 3

где $f_2(\lambda)$ дается формулой (6.3).

Легко показать, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda g(\lambda) = \frac{5}{2R}, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^p\left[\lambda g(\lambda) - \frac{3}{2R}\right] = 0 \qquad (0<p<1)$$

т. е. функция $g(\lambda)$ обладает свойством А. Поэтому ядро (3.16) в данной задаче является ядром Фредгольма.

Найдем распределение касательных напряжений на боковой поверхности в случае, когда боковая поверхность вне участка $-a < z < a$ заделана. В этом случае $F_2(z) = 0$ и формула (6.6) в силу тождества

$$\lambda J_0(\lambda t) = \frac{dJ_1(\lambda t)}{dt} + \frac{1}{t}J_1(\lambda t)$$

легко приводится к виду

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 I_1(\lambda R)}\left[a^{1/2}\varphi(a) J_1(\lambda a) + \varphi_1(\lambda)\right] \qquad (6.7)$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \int_0^a \{t^{-1/2}\varphi(t) - [t^{1/2}\varphi(t)]'\} J_1(\lambda t)\,dt$$

Подставляя (6.7) в выражение (1.5) для $\tau_{r\varphi}$, получим

$$\tau_{r\varphi}(R, z) = \frac{G a^{3/2}\varphi(a)}{\sqrt{z^2 - a^2}\,[z + \sqrt{z^2 - a^2}]} - G\int_0^{+\infty} g(\lambda)\,\lambda f(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda +$$

$$+ G\int_0^a \frac{t\{t^{-1/2}\varphi(t) - [t^{1/2}\varphi(t)]'\}}{\sqrt{z^2 - t^2}\,[z + \sqrt{z^2 - t^2}]}\,dt \qquad (a < z < +\infty)$$

при этом использован интеграл

$$\int_0^{+\infty} J_1(\lambda t)\cos\lambda z\,d\lambda = \frac{t}{\sqrt{z^2 - t^2}\,[z + \sqrt{z^2 - t^2}]} \qquad (0 < t < z)$$

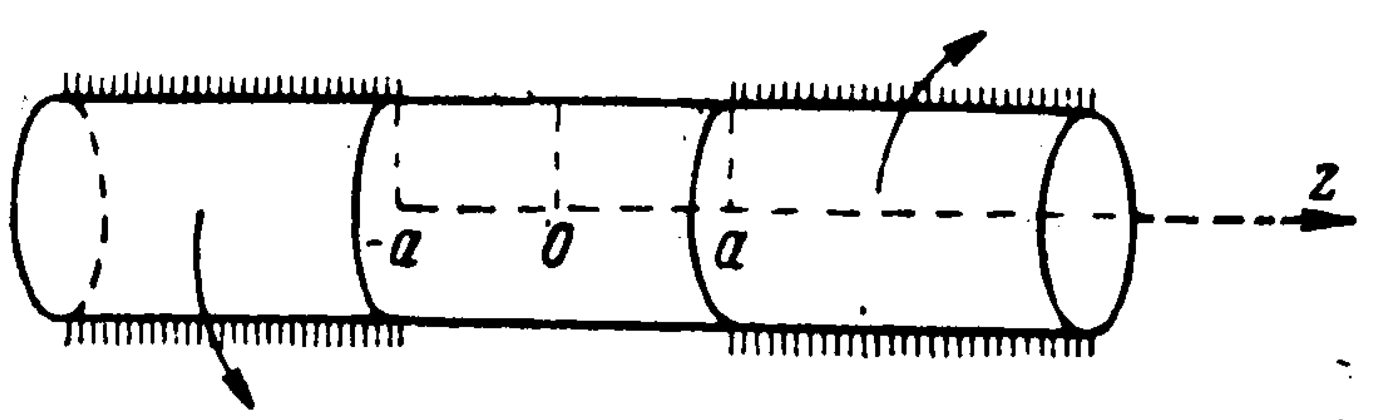
Функции $g(\lambda)$ и $f(\lambda)$ даются формулами (6.5) и (6.6).

§ 7. Вторая задача о кручении цилиндра. Антисимметричный случай. Граничные условия этой задачи запишутся так (фиг. 4):

$$\tau_{r\varphi} = q(z) \quad \text{при } r = R, \ -a < z < a \qquad (7.1)$$

$$v = h(z) \quad \text{при } r = R, \ a < |z| < +\infty \qquad (7.2)$$

Здесь $q(z)$ и $h(z)$ — нечетные функции, при этом считаем производную $h'(z) = F_2(z)$ представимой интегралом Фурье



Фиг. 4

$$h'(z) = F_2(z) = \int_0^{+\infty} f_2(\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda,$$

$$f_2(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty} h'(z)\cos\lambda z\,dz \qquad (7.3)$$

Решение этой задачи ищем в виде формул (1.5), положив в них

$$A_2(\lambda) = 0$$

Вместо граничного условия (7.2) рассмотрим граничное условие для частной производной

$$\frac{\partial v}{\partial z} = h'(z) = F_2(z) \quad \text{при } r = R, \quad a < |z| < +\infty \qquad (7.4)$$

и дополнительное условие

$$v = (R, z_0) = h(z_0) \qquad (z_0 > a) \qquad (7.5)$$

состоящее в равенстве искомого перемещения $v(r, z)$ его заданному значению в некоторой точке $z_0 > a$ боковой поверхности $r = R$. Очевидно, условия (7.4) и (7.5) эквивалентны граничному условию (7.2).

Удовлетворяя граничным условиям (7.1) и (7.4), получим дуальные интегральные уравнения для нахождения неизвестной функции $A_1(\lambda)$

$$G\int_0^{+\infty}\lambda^2 A_1(\lambda) I_2(\lambda R)\sin\lambda z d\lambda = q(z) \qquad (0<z<a)$$

$$\int_0^{+\infty}\lambda^2 A_1(\lambda) I_1(\lambda R)\cos\lambda z d\lambda = F_2(z) \qquad (a<z<+\infty)$$

Эти уравнения приводятся к виду уравнений (3.1), если положить

$$A_1(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda^2 I_1(\lambda R)}, \qquad \frac{I_2(\lambda R)}{I_1(\lambda R)}=1-g(\lambda), \qquad \frac{1}{G}q(z)=F_1(z) \tag{7.6}$$

Поэтому их решение в силу (3.20), (7.4) и (7.3) дается формулой

$$A_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2 I_1(\lambda R)}\left\{C_0 J_0(\lambda a)+\int_0^a t^{1/2}\left[\varphi(t)+C_0\varphi_0(t)\right]J_0(\lambda t)\,dt+f_2(\lambda)\right\} \tag{7.7}$$

Здесь C_0 — произвольная постоянная. Функции $\varphi(t)$ и $\varphi_0(t)$ находятся из интегрального уравнения (3.15), (3.16), (3.14), при этом функция $F(z)$, входящая в выражение свободного члена (3.14), для нахождения $\varphi(t)$ имеет выражение

$$F(z)=\frac{1}{G}q(z)-\int_0^{+\infty}\frac{I_2(\lambda R)}{I_1(\lambda R)}f_2(\lambda)\sin\lambda z d\lambda$$

а для нахождения $\varphi_0(t)$ — выражение

$$F(z)=\int_0^{+\infty}g(\lambda)J_0(\lambda a)\sin\lambda z d\lambda, \qquad F(0)=0$$

где $g(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ даются формулами (7.6) и (7.3)

Функции $g(\lambda)$, записанные формулами (7.6) и (6.5), совпадают. Значит, ядро (3.16) интегрального уравнения (3.15) в данной задаче является фредгольмовским.

Постоянную C_0 определим из условия (7.5). Подставляя значение $A_1(\lambda)$, даваемое формулой (7.7), в выражение (1.5) для $v(r, z)$, а затем $v(r, z)$ в равенство (7.5), получим следующее выражение для C_0:

$$C_0\left[1+\int_0^a t^{1/2}\varphi_0(t)\,dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}h(z_0)-\int_0^a t^{1/2}\varphi(t)\,dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-1}f_2(\lambda)\sin\lambda z_0 d\lambda \tag{7.8}$$

при этом использован интеграл

$$\int_0^{+\infty}\lambda^{-1}J_0(\lambda t)\sin\lambda z\,d\lambda=\frac{\pi}{2} \qquad (0<t<z)$$

В формуле (7.8) в качестве z_0 можно взять любое число, большее a.

Приведем формулу распределения касательных напряжений на участке $a<z<+\infty$ боковой поверхности цилиндра для частного случая граничных условий рассматриваемой задачи. Именно: пусть

$$h(z) = \begin{cases} h_0, & \text{если } a < z < +\infty \\ -h_0, & \text{если } -\infty < z < -a \end{cases}$$

Тогда легко подсчитать, что

$$\tau_{r\varphi}(R, z) = \frac{C_0 G}{\sqrt{z^2 - a^2}} + G \int_0^a \frac{t^{1/2}[\varphi(t) + C_0\varphi_0(t)]}{\sqrt{z^2 - t^2}}\, dt -$$

$$- G \int_0^{+\infty} g(\lambda) f(\lambda) \sin \lambda z d\lambda \qquad (a < z < +\infty)$$

Здесь $f(\lambda)$ и C_0 даются формулами (7.6), (7.7) и (7.8), в которых

$$f_2(\lambda) = 0$$

В заключение отметим, что этим методом можно решить аналогичные задачи о кручении полого цилиндра.

Поступила 13 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Пупырев В. А., Уфлянд Я. С. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ, 1933, ч. 2, стр. 314.
3. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959, стр. 102.
4. Приварников А. К. Симметричная контактная задача для слоя конечной толщины. Доповиди АН УССР, 1963, № 3.
5. Маркузон И. А. Равновесие трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
6. Котляр С. М. О напряженном состоянии бесконечной полосы. Изв. вузов, Математика, 1964, № 1.
7. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3.