Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГОЙ СФЕРЫ

Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян

(Ереван)

В работе приводится решение двух осесимметричных контактных задач об установившихся колебаниях упругой сферы.

Первая из них относится к задаче осесимметричной деформации упругой сферы, когда на части поверхности сферы задано нормальное перемещение u_r, а на остальной части известны значения нормальной нагрузки σ_r. Для простоты принимается, что касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ на поверхности тела отсутствуют.

Во второй задаче рассматривается крутильное колебание упругой сферы, когда сфера скручивается при помощи поворота жесткого круглого штампа, закрепленного на части поверхности сферы. Соответствующие статические задачи рассмотрены в работах [1,2].

Решения задач ищутся в виде рядов по полиномам Лежандра. Определение постоянных интегрирования сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученные системы квази — вполне регулярны, а свободные члены этих систем ограничены сверху и при возрастании индекса стремятся к нулю [1].

§ 1. Построение общих решений. Построим сначала общее решение задачи об установившихся колебаниях упругого шара при наличии осевой симметрии. Как известно, в сферической системе координат r, θ, φ эта задача сводится к интегрированию уравнений Ламе

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial\triangle}{\partial r}-\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_\varphi\sin\theta)=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu r}\frac{\partial\triangle}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\varphi)=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},\qquad -\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r}+\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}=\frac{\rho r}{2\mu}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\tag{1.1}$$

где

$$\triangle=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(ru_\theta\sin\theta)\right]$$

$$2\omega_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta},\qquad 2\omega_\theta=-\frac{\partial(ru_\varphi)}{r\,\partial r},\qquad 2\omega_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\tag{1.2}$$

Здесь λ и μ — коэффициенты Ламе, ρ — плотность материала.

Решение системы (1.1) ищем в форме рядов

$$u_r(r,\theta,t)=e^{i\omega t}\left[f_0(r)+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(r)P_k(\cos\theta)\right]$$

$$u_\theta(r,\theta,t)=e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)P_k'(\cos\theta)\sin\theta\tag{1.3}$$

$$u_\varphi(r,\theta,t)=e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(r)P_k^1(\cos\theta)$$

[1] Заметим, что при решении соответствующих статичных задач регулярность полученных систем не была доказана. Поэтому доказательство, которое проводится здесь в § 4, полностью относится и к системам, рассмотренным в работах [1,2]

Здесь $P_k(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_k^1(\xi)$ — присоединенная функция Лежандра, а $f_0(r)$, $f_k(r)$, $\varphi_k(r)$ и $\psi_k(r)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя выражения (1.2) и (1.3) в систему (1.1), для определения функций $f_0(r)$, $f_k(r)$, $\varphi_k(r)$ и $\psi_k(r)$ получим дифференциальные уравнения, решения которых для сплошного шара берем в форме

$$\begin{gathered}
f_0(r) = A_0 r^{-1/2} J_{3/2}\left(\frac{ar}{b}\right) \qquad \left(a^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},\ b^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right) \\
f_k(r) = -A_k \frac{b^2}{a^2}\frac{d}{dr}\left[r^{-1/2}J_{k+1/2}\left(\frac{ar}{b}\right)\right] + B_k \frac{k(k+1)}{a^2} r^{-3/2} J_{k+1/2}(ar) \\
\varphi_k(r) = A_k \frac{b^2}{a^2} r^{-3/2} J_{k+1/2}\left(\frac{ar}{b}\right) - B_k \frac{1}{a^2 r}\frac{d}{dr}\left[r^{1/2}J_{k+1/2}(ar)\right] \\
\psi_k(r) = D_k r^{-1/2} J_{k+1/2}(ar)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь постоянные интегрирования A_0, A_k, B_k и D_k подлежат определению из граничных условий.

Пользуясь (1.3), (1.4) и уравнениями обобщенного закона Гука, для определения напряжений получим выражения

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= e^{i\omega t}\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_r^{(k)} P_k(\cos\theta), & \tau_{r\theta} &= e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(k)} P_k'(\cos\theta)\sin\theta \\
\tau_{r\varphi} &= e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{r\varphi}^{(k)} P_k^1(\cos\theta), & \tau_{\theta\tau} &= e^{i\omega t}\sum_{k=2}^{\infty} \tau_{\theta\varphi}^{(k)} P_k''(\cos\theta)\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}
\sigma_r^{(0)} = 2\mu A_0 r^{-5/2}\left[\frac{ab}{2} r J_{1/2}\left(\frac{ar}{b}\right) - 2J_{3/2}\left(\frac{ar}{b}\right)\right] \\
\sigma_r^{(k)} = 2\mu r^{-5/2}\left\{A_k \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{2ar}{b} J_{k-1/2}\left(\frac{ar}{b}\right) + \left[\frac{a^2r^2}{2} + (k+1)(k+2)\right] J_{k+1/2}\left(\frac{ar}{b}\right)\right] + \right. \\
\left. + B_k \frac{k(k+1)}{a^2}\left[arJ_{k-1/2}(ar) - (k+2)J_{k+1/2}(ar)\right]\right\} \\
\tau_{r\theta}^{(k)} = \mu r^{-5/2}\left\{A_k \frac{2b^2}{a^2}\left[\frac{ar}{b} J_{k-1/2}\left(\frac{ar}{b}\right) - (k+2)J_{k+1/2}\left(\frac{ar}{b}\right)\right] + \right. \\
\left. + \frac{B_k}{a^2}\left[2arJ_{k-1/2}(ar) + \left[a^2r^2 - 2k(k+2)\right]J_{k+1/2}(ar)\right]\right\} \\
\tau_{r\varphi}^{(k)} = \mu D_k r^{-3/2}\left[(k-1)J_{k+1/2}(ar) - J_{k+3/2}(ar)\right] \\
\tau_{\theta\varphi}^{(k)} = \mu D_k r^{-3/2} J_{k+1/2}(ar)
\end{gathered} \tag{1.6}$$

§ 2. Осесимметричная задача для сферы. Рассмотрим задачу осесимметричной деформации для упругой сферы, когда на части границы сферы отсутствуют нормальные перемещения, а на остальной части действует динамическая нормальная нагрузка. Касательные напряжения на поверхности сферы полагаем отсутствующими (фигура).

Граничные условия для данной задачи имеют вид

$$\begin{gathered}
u_r(R, \theta, t) = 0 \quad (0 \leqslant \theta < \alpha), \qquad \sigma_r(R, \theta, t) = f(\theta)e^{i\omega t} \quad (\alpha < \theta \leqslant \pi) \\
\tau_{r\theta}(R, \theta, t) = 0 \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Удовлетворив последнему условию (2.1), получим

$$B_k = -2b^2 A_k \frac{aR/bJ_{k-1/2}(aR/b) - (k+2)J_{k+1/2}(aR/b)}{2aRJ_{k-1/2}(aR) + [a^2R^2 - 2k(k+2)]J_{k+1/2}(aR)} \tag{2.2}$$

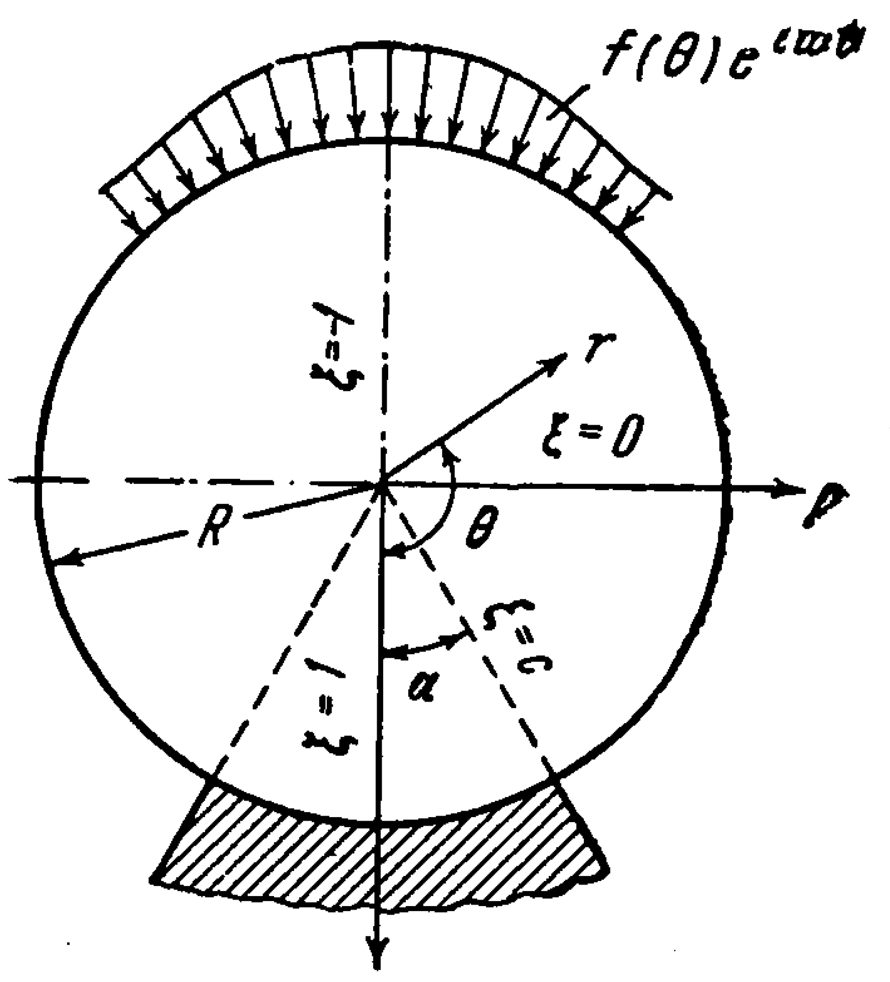
а из первых двух условий (2.1) для определения неизвестных коэффициентов A_k получаются следующие «парные» ряды, содержащие полиномы Лежандра

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} X_k P_k(\cos\theta) = 0 \qquad (0 \leqslant \theta < \alpha) \\ &\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1/2 + \alpha_k) X_k P_k(\cos\theta) = \frac{R^{5/2}b^2}{2\mu(b^2-1)} f(\theta) \qquad (\alpha < \theta \leqslant \pi) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $$X_k = \frac{bRE_k}{aG_k} A_k, \qquad \alpha_k = \frac{b^2F_k - (k+1/2)(b^2-1)E_k}{(b^2-1)E_k} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} E_k &= b(k+1)J_{k+1/2}(aR/b)\,[2J_{k-1/2}(aR) + aRJ_{k+1/2}(aR)] - \\ &- J_{k-1/2}(aR/b)\,[2aRJ_{k-1/2}(aR) + (a^2R^2 - 2k)J_{k+1/2}(aR)] \\ F_k &= -2(k-1)(k+2)\,aRJ_{k-1/2}(aR)J_{k-1/2}(aR/b) + \\ &+ 2b\,[1/2a^2R^2 + (k^2-1)(k+2)]\,J_{k-1/2}(aR)J_{k+1/2}(aR/b) + \\ &+ 2\,[a^2R^2 + k(k-1)(k+2)]\,J_{k+1/2}(aR)J_{k-1/2}(aR/b) + \\ &+ abR\,[1/2a^2R^2 - (2k+1)(k+2)]\,J_{k+1/2}(aR)J_{k+1/2}(aR/b) \\ G_k &= 2aRJ_{k-1/2}(aR) + [a^2R^2 - 2k(k+2)]\,J_{k+1/2}(aR) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пользуясь асимптотическими формулами для бесселевых функций, легко показать, что при малых значениях aR $(\omega R < 4.5\sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)})$ числа α_k при возрастании индекса остаются ограниченными и не меняют знака. При этом последовательность α_k, начиная с некоторого номера, стремится к своему пределу ($\alpha_k \to -[b^2(b^2-1)]^{-1}$) монотонно.



Но асимптотические формулы для функций Бесселя $J_{k\pm 1/2}(aR)$ при малых аргументах сохраняют свою силу при любом конечном aR, если $k \gg k_0 \gg aR$. Отсюда вытекает, что если aR не является корнем функций $E_k(aR)$, то наше утверждение о поведении чисел α_k будет верным для любого конечного значения aR, начиная с некоторого номера k_0. Это обстоятельство позволяет нам применить результаты работы [1] и решение парных рядов (2.3) сводить к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}X_k + b_n \tag{2.6}$$

где

$$a_{nk} = \frac{\alpha_k}{\pi(k+{}^1/_2)}\left[\frac{\sin(n-k)\alpha}{n-k} + \frac{\sin(n+k+1)\alpha}{n+k+1}\right]$$

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\alpha^\pi \cos(n+{}^1/_2)\varphi\, d\varphi \int_{-1}^{\cos\varphi} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{(\cos\varphi-\xi)^{1/2}} \tag{2.7}$$

$$f_1(\xi) = \frac{R^{5/2}b^2}{2\mu(b^2-1)} f(\theta) \qquad \text{при } \xi = \cos\theta$$

Исследуем теперь поведение нормальных напряжений σ_r, действующих под штампом, вблизи краев штампа.

Так как σ_r выражается при помощи ряда (1.5), то вычислим главную часть этого ряда при $r = R$, $\theta \to \alpha - 0$.

Пользуясь формулами (2.8)

$$\sum_{n=0}^\infty P_n(\cos\varphi)\cos(n-k)\beta = \begin{cases}[2(\cos\beta-\cos\varphi)]^{-1/2}\cos(k+{}^1/_2)\beta & \text{при } (0<\beta<\varphi)\\ [2(\cos\varphi-\cos\beta)]^{-1/2}\sin(k+{}^1/_2)\beta & \text{при } (0<\varphi<\beta)\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^\infty P_n(\cos\varphi)\sin(n-k)\beta = \begin{cases}-[2(\cos\beta-\cos\varphi)]^{-1/2}\sin(k+{}^1/_2)\beta & \text{при } (0<\beta<\varphi)\\ [2(\cos\varphi-\cos\beta)]^{-1/2}\cos(k+{}^1/_2)\beta & \text{при } (0<\varphi<\beta)\end{cases}$$

легко показать, что главная часть нормального напряжения $\sigma_r(R, \theta, t)$ при $\theta \to \alpha - 0$ имеет вид

$$V_p[\sigma_r(R,\theta,t)] = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\omega t} M}{(\cos\theta - \cos\alpha)^{1/2}} \tag{2.9}$$

где

$$M = \frac{2\mu(b^2-1)}{R^{5/2}b^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha_k X_k - \gamma_k}{k+{}^1/_2}\cos(k+{}^1/_2)\alpha \tag{2.10}$$

а числа γ_k являются коэффициентами разложения

$$f_1(\xi) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k P_k(\xi) \tag{2.11}$$

§ 3. **Кручение упругой сферы.** Аналогичным образом может быть решена задача о крутильных колебаниях сплошной упругой сферы, когда она скручивается при помощи поворота жесткого круглого штампа, закрепленного с частью поверхности сферы.

Предполагается, что вне штампа поверхность сферы свободна от внешних касательных усилий.

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$u_\varphi(R,\theta,t) = \varkappa R\sin\theta e^{i\omega t} \quad (0 \leqslant \theta < \alpha), \qquad \tau_{r\varphi}(R,\theta,t) = 0 \quad (\alpha < \theta \leqslant \pi) \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ — максимальный угол поворота штампа.

Удовлетворяя условиям (3.1) из (1.3) и (1.5), для определения неизвестных коэффициентов D_k получим парные ряды по присоединенным функциям Лежандра

$$\sum_{k=1}^\infty D_k J_{k+1/2}(aR)\, P_k^1(\cos\theta) = \varkappa R^{3/2}\sin\theta \qquad (0 \leqslant \theta < \alpha)$$

$$\sum_{k=1}^\infty D_k\left[(k-1)J_{k+1/2}(aR) - aRJ_{k+3/2}(aR)\right]P_k^1(\cos\theta) = 0 \qquad (\alpha < \theta < \pi) \tag{3.2}$$

Учитывая формулу [3]

$$P_n^1(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$$

интегрируя уравнения (3.2) и переходя к новой переменной $\xi = \cos\theta$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k P_k(\xi) = -\varkappa R^{3/2}\xi + C_1 \qquad (c < \xi \leqslant 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1/2) X_k P_k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_k P_k(\xi) + C_2 \qquad (-1 \leqslant \xi < c) \tag{3.3}$$

где введены обозначения

$$X_k = D_k J_{k+1/2}(aR), \qquad c = \cos\alpha, \qquad \alpha_k = \frac{3J_{k+1/2}(aR) + 2aRJ_{k+3/2}(aR)}{2J_{k+1/2}(aR)} \tag{3.4}$$

Принимая, что число aR не является корнем функций $J_{k+1/2}(aR)$ и пользуясь результатами работы [1], определение неизвестных коэффициентов X_k сводим к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} X_k + b_n \tag{3.5}$$

где

$$a_{nk} = -\frac{\alpha_k}{\pi(k + 1/2)}\left[\frac{\sin(k-n)\alpha}{k-n} + \frac{\sin(k+n+1)\alpha}{k+n+1}\right]$$

$$\pi b_n = -\varkappa R^{3/2}\left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\sin(n+2)\alpha}{n+2}\right] +$$

$$+ (C_1 - 2C_2)\left[\frac{\sin n\alpha}{n} + \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1}\right] + 2\pi\delta_n C_2 \tag{3.6}$$

$$\delta_n = 0 \quad \text{при } n \geqslant 1, \qquad \delta_0 = 1$$

Из (3.2) и (3.3) видно, что одну из постоянных величин, C_1 или C_2, можно выбрать произвольно (например $C_2 = 0$), а другая постоянная определяется из условия конечности суммы касательных напряжений $\tau_{r\varphi}$, действующих под штампом. Пользуясь формулами (1.5), (1.6), (2.8), (3.5) и (3.6), это условие можно написать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k X_k}{k + 1/2}\cos(k + 1/2)\alpha + \varkappa R^{3/2}\cos{}^3/_2\alpha - (C_1 - 2C_2)\cos{}^1/_2\alpha = 0 \tag{3.7}$$

Неизвестные коэффициенты X_n, входящие в соотношение (3.7), определяются из бесконечной системы линейных уравнений (3.5) и выражаются через постоянную $(C_1 - 2C_2)$.

Подставив определенные из (3.5) значения неизвестных в (3.7) и разрешив полученное соотношение относительно $(C_1 - 2C_2)$, получим его значение.

§ 4. Исследование бесконечных систем. В бесконечных системах (2.6) и (3.5) введем новые неизвестные

$$Y_k = \alpha_k X_k \tag{4.1}$$

Тогда эти системы примут вид

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} Y_k + \beta_n \tag{4.2}$$

где

$$A_n = \pm\frac{\alpha_n}{\pi(k + 1/2)}\left[\frac{\sin(k-n)\alpha}{k-n} + \frac{\sin(k+n+1)\alpha}{k+n+1}\right], \quad \beta_n = \alpha_n b_n \tag{4.3}$$

Докажем, что система (4.2) квази — вполне регулярна. Для этого вычислим сумму модулей коэффициентов при неизвестных

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| = \frac{|\alpha_n|}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+{}^1/_2} \left| \frac{\sin(k-n)\alpha}{k-n} + \frac{\sin(k+n+1)\alpha}{k+n+1} \right| <$$

$$< \frac{|\alpha_n|}{\pi(n+{}^1/_2)}\left(\alpha + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{|\alpha_n|}{\pi} \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \left(\frac{1}{|k-n|} + \frac{1}{k+n+1}\right)(k+{}^1/_2)^{-1} =$$

$$= \frac{|\alpha_n|}{\pi(n+{}^1/_2)}\left[2\psi(n+{}^1/_2) + \psi(n) + 2C + \frac{2}{n+{}^1/_2} - \psi({}^3/_2)\right] + \frac{|\alpha_n|\alpha}{\pi(n+{}^1/_2)}$$

Но так как при $n \geqslant 2$ имеет место неравенство $\psi(n) \leqslant \ln n$, то выражение для S_n можно написать в виде

$$S_n < \frac{|\alpha_n|}{\pi}\left[\frac{\gamma \ln n + \delta}{n+{}^1/_2} + O(n^{-2})\right]$$

где

$$\gamma = 3, \quad \delta = \alpha + 5C - \psi({}^3/_2) \qquad (C = 0.577216 \text{ — постоянная Эйлера})$$

Если числа α_n конечные, т. е. aR не является корнем функции $E_k(x)$ (в первой задаче) или же функции $J_{k+{}^1/_2}(x)$ (во второй задаче), то при возрастании n величина S_n стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

а это значит, что, начиная с некоторого номера, будем иметь

$$S_n < 1 - \varepsilon \qquad \text{при } n \geqslant n_0$$

т. е. система (4.2) оказалась квази — вполне регулярной.

Легко видеть, что свободные члены системы (4.2) ограничены сверху и при $n \to \infty$ стремятся к нулю.

Если же одно из чисел α_n обращается в бесконечность [1] ($\alpha_{n_1} \to \infty$), то в системах (2.6) и (3.5) нужно вводить новые неизвестные следующим образом:

$$Z_k = X_k \qquad \text{при } n \neq n_1, \qquad Z_{n_1} = \alpha_{n_1} X_{n_1}$$

Бесконечная система для Z_k будет также квази — вполне регулярной.

Легко показать, что два из чисел α_n не могут одновременно обращаться в бесконечность.

Отметим, что из решений рассмотренных здесь задач в частном случае, когда $\omega \to 0$ ($a \to 0$), получаются решения соответствующих статических задач [1,2], где, кстати, регулярность полученных систем не была доказана.

Поступила 29 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А. Решение некоторых парных рядов. Докл. АН Арм. ССР, 1964, т. 39, № 3.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6, стр. 1101—1105.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.