

ВОЛНЫ РЕЛЕЯ И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Р. В. Гольдштейн

(Москва)

Для стационарных динамических задач теории упругости характерны качественные изменения в тех случаях, когда скорость движения источника возмущений становится равной или превышает скорость распространения поверхностных волн Релея.

В качестве примера укажем плоскую задачу о стационарном расклинивании бесконечного упругого тела тонким полубесконечным клином [1]. Впереди клина образуется трещина. Ее поверхность свободна от напряжений всюду, кроме малой конечной области, где действуют силы сцепления между противоположными берегами. Силы сцепления обеспечивают плавное смыкание берегов трещины и конечность напряжений в ее конце. Длина трещины зависит от скорости клина и его формы, а также от свойств материала. Оказывается [1], что если скорость движения клина приближается к релеевской, то длина трещины стремится к нулю, а напряжения во всем теле становятся бесконечными. Отсюда ясно, что при расклинивании со сверхрелеевской скоростью впереди клина не может образовываться трещина.

Другим примером являются стационарные задачи о движении нагрузок и штампов вдоль границы полупространства.

Исследование [1] имеющихся решений [2-7] показало, что если скорость движения нагрузки или штампа приближается к релеевской, то напряжения и смещения во всех точках тела становятся бесконечными. Это обстоятельство отмечено также в работе [8]. При переходе через релеевскую скорость знаки напряжений и смещений меняются. Это приводит, в частности, к весьма своеобразному изменению формы свободной поверхности, в стационарной задаче о движении нагрузки. При сверхрелеевских скоростях материал под сжимающей нагрузкой выпучивается, а не продавливается.

В предлагаемой работе дается объяснение указанных резонансных явлений в стационарных контактных задачах. Для этого рассматривается нестационарная задача о полупространстве, по поверхности которого, начиная с некоторого момента, равномерно, с дозвуковой скоростью, движется нагрузка, распределенная на полубесконечном участке границы. В любой, движущейся вместе с передним краем нагрузки, ограниченной области пространства решение этой задачи стремится с течением времени к соответствующему стационарному решению, что позволяет проследить процесс формирования последнего.

В дальнейшем рассматривается однородная изотропная упругая среда в условиях плоской деформации.

§ 1. Рассмотрим упругое полупространство $y \leq 0$, свободное от напряжений. Пусть в момент времени $t = 0$ к участку $x \leq 0$ границы $y = 0$ полупространства прикладывается нормальная сжимающая нагрузка постоянной интенсивности q , которая начинает перемещаться с постоянной скоростью V в положительном направлении оси x . Скорость движения нагрузки считается меньшей, чем скорость распространения медленных звуковых волн — поперечных.

Таким образом, нужно найти решение динамических уравнений теории упругости при нулевых начальных и следующих граничных усло-

виях ($H(\xi)$ — функция Хевисайда):

$$\sigma_y = -qH(Vt - x), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.1)$$

Сформулированная задача может быть решена методом, использованным в работах [9,10].

Как известно (см., например, [3,6]), уравнения динамической теории упругости будут удовлетворяться, если положить компоненты напряжения σ_y , σ_x , τ_{xy} и смещения u , v равными

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, & v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \sigma_y &= -\rho c_1^2 \Delta\varphi - 2\rho c_2^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_x &= -\rho c_1^2 \Delta\varphi + 2\rho c_2^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right), & \tau_{xy} &= -\rho c_2^2 \left(2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь φ , ψ — скалярный и векторный потенциалы, которые будут решениями волновых уравнений

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Здесь ρ — плотность материала, c_1 , c_2 — скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн.

Преобразование Лапласа по времени волновых уравнений для потенциалов и граничных условий с учетом нулевых начальных условий дает

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{p^2\Phi}{c_1^2}, & \Delta\Psi &= \frac{p^2\Psi}{c_2^2} \\ T_{xy} &= 0, & \Sigma_y &= -\frac{q}{p} \exp\left(-\frac{pH(x)}{V}\right) \quad \text{при } y = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь Φ , Ψ , Σ , T обозначают изображения по Лапласу соответствующих величин, p — параметр преобразования.

Как и в работах [9,10], ищем решение задачи (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta) \exp(ip\zeta x + p\sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}}y) d\zeta \\ \Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\zeta) \exp(ip\zeta x + p\sqrt{\zeta^2 + c_2^{-2}}y) d\zeta \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь интегрирование ведется по действительной оси в плоскости ζ , а $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий (1.3).

Проведем в плоскости ζ разрезы вдоль мнимой оси от точек $(ic_{1,2}^{-1})$ и $(-ic_{1,2}^{-1})$ соответственно в $(+i\infty)$ и $(-i\infty)$ и ветви корней $(\zeta^2 + c_{1,2}^{-2})^{1/2}$ фиксируем условием $\sqrt{1} = 1$. При этом экспоненциальные множители в интегралах (1.4) будут затухающими при $y \neq 0$.

Из представлений (1.4) и соотношений (1.2), (1.3) имеем для $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P(\zeta) 2i\zeta \sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}} - Q(\zeta) (2\zeta^2 + c_2^{-2})] \exp(ip\zeta x) d\zeta = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P(\zeta) (2\zeta^2 + c_2^{-2}) + Q(\zeta) 2i\zeta \sqrt{\zeta^2 + c_2^{-2}}] \exp(ip\zeta x) d\zeta = \quad (1.6)$$

$$= \frac{K}{p^3} \exp\left(-\frac{pxH(x)}{V}\right) \quad \left(K = \frac{q}{\rho c_2^2}\right)$$

Положив

$$P(\zeta) = (2\zeta^2 + c_2^{-2}) R(\zeta), \quad Q(\zeta) = 2i\zeta \sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}} R(\zeta) \quad (1.7)$$

тождественно удовлетворим соотношению (1.5), а из (1.6) получим уравнение для определения новой неизвестной функции $R(\zeta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) F_R(\zeta) \exp(ip\zeta x) d\zeta = \frac{K}{p^3} \exp \frac{-pxH(x)}{V} \quad (1.8)$$

Здесь

$$F_R(\zeta) = (2\zeta^2 + c_2^{-2})^2 - 4\zeta^2 \sqrt{(\zeta^2 + c_1^{-2})(\zeta^2 + c_2^{-2})}$$

$F_R(\zeta)$ — функция Релея. Ее единственными нулями будут $\zeta = \pm iV_R^{-1}$, где V_R — скорость распространения поверхностных волн Релея.

Замыкая контур интегрирования в (1.8) для $x > 0$ и $x < 0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости ζ , видим, что при $x > 0$ уравнение удовлетворяется, если

$$R(\zeta) F_R(\zeta) = \frac{KL_+(\zeta)}{2\pi ip^3 L_+(iV^{-1})(\zeta - iV^{-1})} \quad (1.9)$$

а для $x < 0$ при

$$R(\zeta) F_R(\zeta) = - \frac{KL_-(\zeta)}{2\pi ip^3 L_-(-i\epsilon)(\zeta + i\epsilon)} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (1.10)$$

Здесь $L_+(\zeta)$, $L_-(\zeta)$ — аналитические функции, не имеющие нулей и особенностей в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. На действительной оси имеем

$$\chi_+(\xi) = \frac{L_+(\xi)}{L_+(iV^{-1})} (\xi + i\epsilon) = - \frac{L_-(\xi)}{L_-(-i\epsilon)} (\xi - iV^{-1}) = \chi_-(\xi) \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что $\chi_+(\zeta)$ — аналитическое продолжение $\chi_-(\zeta)$ в верхнюю полуплоскость. Поэтому $\chi_-(\zeta)$ — функция, аналитическая во всей конечной плоскости, т. е. целая. Для сходимости при $y = 0$ интегралов (1.4), представляющих Φ и Ψ , нужно, чтобы $\chi_-(\zeta) = A\zeta + B$. Постоянные A и B определяются по известным значениям $\chi_-(-i\epsilon)$ и $\chi_-(iV^{-1})$. Окончательно имеем $\chi_-(\zeta) = i(V^{-1} + \epsilon)$ и

$$P(\zeta) = \frac{K_1(2\zeta^2 + c_2^{-2})}{2\pi p^3 (\zeta + i\epsilon)(\zeta - iV^{-1}) F_R(\zeta)}, \quad Q(\zeta) = \frac{iK_1\zeta \sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}}}{\pi p^3 (\zeta + i\epsilon)(\zeta - iV^{-1}) F_R(\zeta)} \quad (1.12)$$

где $K_1 = (K/V)$. Из (1.12) следует, что $P(\zeta) \sim \zeta^{-2}$, $Q(\zeta) \sim \zeta^{-2}$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$, т. е. интегралы в (1.4) сходятся всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$.

Подставив найденные значения для $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ в (1.4) и применяя теорему обращения, найдем потенциалы ϕ и ψ .

В дальнейшем понадобятся выражения при $x > 0$ для вертикального смещения v и одной из компонент напряжения, например σ_x . Приведем необходимые соотношения

$$v = \int_0^t \int_0^\tau v_1(u) du d\tau \quad (v_1(u) = J_1(u) + J_2(u) + J_3(u)) \quad (1.13)$$

$$\sigma_x = \int_0^t \sigma_x' du \quad (1.14)$$

Здесь

$$J_1 = H (uc_1 - r) \left[N_1 (\zeta_-) \frac{\partial \zeta_-}{\partial u} - N_1 (\zeta_+) \frac{\partial \zeta_+}{\partial u} \right]$$

$$J_2 = H (uc_2 - r) \left[N_2 (\eta_-) \frac{\partial \eta_-}{\partial u} - N_2 (\eta_+) \frac{\partial \eta_+}{\partial u} \right]$$

$$J_3 = f(u) g\left(\frac{x}{r}\right) [N_2 (\xi_+) - N_2 (\xi_-)] \frac{\partial \xi_+}{\partial u}$$

$$\zeta_{\pm} = \pm \frac{y}{r} \left(\frac{u^2}{r^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^{1/2} + i \frac{ux}{r^2}, \quad \eta_{\pm} = \pm \frac{y}{r} \left(\frac{u^2}{r^2} - \frac{1}{c_2^2} \right)^{1/2} + i \frac{ux}{r^2}$$

$$\xi_{\pm} = i \left\{ \frac{ux}{r^2} - \frac{y}{r} \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{u^2}{r^2} \right)^{1/2} \right\} \pm \delta, \quad \delta \rightarrow 0, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$N_1 (\zeta) = - \frac{K_1 (2\zeta^2 + c_2^{-2}) \sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}}}{2\pi\zeta (\zeta - iV^{-1}) F_R (\zeta)}, \quad N_2 (\eta) = \frac{K_1 \eta \sqrt{\eta^2 + c_1^{-2}}}{\pi (\eta - iV^{-1}) F_R (\eta)}$$

$$f(u) = 1 \quad \text{при } c_1^{-1}x - y\sqrt{c_2^{-2} - c_1^{-2}} \leq u \leq c_2^{-1}r, \quad f(u) = 0 \quad \text{при других } u$$

$$g\left(\frac{x}{r}\right) = 1 \quad \text{при } \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{x}{r} \leq 1, \quad g\left(\frac{x}{r}\right) = 0 \quad \text{при } \frac{x}{r} < \frac{c_2}{c_1}$$

Выражение для σ_x' в формуле для σ_x (1.14) получается из формул для $v_1(u)$ заменой функций N_1, N_2 на функции M_1, M_2 тех же аргументов, причем

$$M_1 (\zeta) = \frac{q (2\zeta^2 + c_2^{-2}) (2\zeta^2 + 2c_1^{-2} - c_2^{-2})}{2\pi V \zeta (\zeta - iV^{-1}) F_R (\zeta)} \quad (1.15)$$

$$M_2 (\eta) = - \frac{2q\eta \sqrt{(\eta^2 + c_1^{-2})(\eta^2 + c_2^{-2})}}{\pi V (\eta - iV^{-1}) F_R (\eta)}$$

Формулы для остальных компонент напряжения и смещения записываются аналогично.

Далее будет рассмотрена взаимосвязь приведенного решения нестационарной задачи и решения соответствующей стационарной задачи. Согласно работам [3,1], в стационарном решении напряжение σ_x в произвольной точке полупространства выражается формулой

$$\sigma_x = \frac{q}{\pi A} \left[B \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x'}{k_1 y'} \right) - C \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x'}{k_2 y'} \right) \right] \quad (1.16)$$

Здесь x', y' определяют положение точки в системе координат, связанной с передним краем стационарно движущейся нагрузки, а коэффициенты A, B, C равны соответственно

$$A = \sqrt{1 - m^2} \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} m^2} - \left(1 - \frac{m^2}{2}\right)^2, \quad B = \left(1 - \frac{m^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\nu m^2}{2(1 - \nu)}\right)$$

$$C = \sqrt{1 - m^2} \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} m^2}, \quad m = \frac{V}{c_2},$$

$$k_1^2 = 1 - \frac{V^2}{c_1^2}, \quad k_2^2 = 1 - \frac{V^2}{c_2^2}$$

При стационарном движении нагрузки с релеевской скоростью коэффициент A обращается в нуль и меняет знак при переходе через релеевскую скорость. Это, в частности, означает, что при $V = V_R$ напряжение σ_x во всех точках тела становится бесконечным. То же самое имеет место для остальных компонент напряжения и смещения.

Иначе говоря, при движении нагрузки с релейской скоростью стационарное распределение напряжений и смещений в среде невозможно. Если же скорость перемещения нагрузки отлична от релейской, то стационарное распределение существует.

§ 2. Рассмотрим формирование стационарного решения в разобранный в § 1 нестационарной задаче о движении нагрузки, распределенной на полубесконечном интервале. При этом выяснится причина несуществования стационарного решения при движении нагрузки с релейской скоростью. Используя соотношения § 1, проследим за изменением распределения напряжений в произвольной фиксированной окрестности переднего края нагрузки. Примем передний край нагрузки за начало движущейся системы координат x', y' : $x = x' + Vt$, $y' = y$.

Рассмотрим при больших t выражение (1.14), (1.15) для σ_x в произвольной точке, неподвижной относительно переднего края нагрузки (т. е. x', y' фиксированы). Структура всех трех слагаемых аналогична. Остановимся на преобразовании одного из них. Имеем

$$L = \int_{c_1^{-1}r}^t \left[M_1(\zeta_-) \frac{\partial \zeta_-}{\partial \tau} - M_1(\zeta_+) \frac{\partial \zeta_+}{\partial \tau} \right] d\tau = \int_{\zeta_+(t)}^{\zeta_-(t)} M_1(\eta) d\eta \quad (2.1)$$

так как $\zeta_+(c_1 r) = \zeta_-(c_1 r)$. При больших t

$$\zeta_{\pm}(t) = \pm \frac{y'}{|Vt|} \sqrt{V^{-2} - c_1^{-2}} + \frac{i}{V} \left(1 - \frac{x'}{Vt} \right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (2.2)$$

т. е. $\zeta_{\pm}(t) \rightarrow (i/V)$ при $t \rightarrow \infty$. Но при $\eta = (i/V)$ знаменатель подынтегральной функции $M_1(\eta)$ имеет либо нуль первого порядка, если $V \neq V_R$, либо нуль второго порядка, когда $V = V_R$. Поэтому разобьем интеграл (2.1) на два, выделив полюс:

$$L = L_1 + L_2 = \int_{\zeta_+}^{\zeta_-} \left[M_1(\eta) - \frac{M_1^{\circ}(iV^{-1})}{(\eta - iV^{-1})F_R(\eta)} \right] d\eta + \int_{\zeta_+}^{\zeta_-} \frac{M_1^{\circ}(iV^{-1})}{(\eta - iV^{-1})F_R(\eta)} d\eta \quad (2.3)$$

где

$$M_1^{\circ}(iV^{-1}) = -\frac{iq}{2\pi} (-2V^{-2} + c_2^{-2}) (-2V^{-2} + 2c_1^{-2} - c_2^{-2})$$

Можно показать, что $L_1 = O(1/t)$. Поэтому нужно вычислить только L_2 .

В первом случае, когда скорость движения нагрузки V не совпадает с релейской скоростью V_R , величина L_2 имеет конечный предел. Результаты вычисления остальных слагаемых выражения для σ_x такие же. Таким образом, получаем, что при $V \neq V_R$ напряжения σ_x в окрестности переднего края нагрузки стремятся с течением времени к конечному пределу, совпадающему с известным [3,1] стационарным решением (1.16).

Во втором случае при движении нагрузки с релейской скоростью ($V = V_R$) вычисление показывает, что $L_2 \sim \alpha t$, где $\alpha = \alpha(V_R, c_1, c_2, q, x', y')$. Учитывая поведение остальных слагаемых в формуле для σ_x , по-

лучаем, что при фиксированных в подвижной системе координатах

$$\sigma_x = \frac{qy'(-2V_R^{-2} + c_2^{-2})^2 \sqrt{V_R^{-2} - c_1^{-2}}}{2\pi [8V_R^{-6}(c_1^{-2} - c_2^{-2}) - c_2^{-6}(c_2^{-2} - 4V_R^{-2})]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(-2V_R^{-2} + c_2^{-2})(-2V_R^{-2} + 2c_1^{-2} - c_2^{-2})}{(r')^2 V_R^{-2} - (y')^2 c_1^{-2}} - \frac{4V_R^{-2}(V_R^{-2} - c_2^{-2})}{(r')^2 V_R^{-2} - (y')^2 c_2^{-2}} \right\} t + O(1)$$

$$((r')^2 = (x')^2 + (y')^2) \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что напряжения в любой фиксированной окрестности переднего края нагрузки, движущейся с релеевской скоростью, нарастают асимптотически пропорционально времени. Иначе говоря, движение среды в окрестности края нагрузки никогда не станет установившимся. Поэтому решение соответствующей стационарной задачи теряет смысл при релеевской скорости перемещения нагрузки.

Наращение напряжений в окрестности переднего края нагрузки, движущейся с релеевской скоростью, происходит потому, что в данном случае энергия, переносимая поверхностными волнами, накапливается в этой окрестности.

В самом деле, движение полубесконечной нагрузки можно представить как последовательное добавление к ее переднему краю небольших догрузок, точки и моменты приложения которых связаны законом движения нагрузки. Каждая такая догрузка возбуждает в момент своего приложения продольные, поперечные и поверхностные волны. По предположению, скорость движения переднего края нагрузки меньше скорости распространения поперечных, а следовательно, и продольных волн. Поэтому с течением времени фронты продольных и поперечных волн уйдут в бесконечность по отношению к произвольной фиксированной окрестности переднего края нагрузки.

При до- или сверхрелеевских скоростях то же самое произойдет и с поверхностными волнами. В конце концов, в окрестности переднего края нагрузки установится равновесие между притоком энергии и ее отводом.

Иная картина будет, если нагрузка движется точно с релеевской скоростью. В этом случае поверхностные волны, возникающие у переднего края нагрузки в различные моменты времени и распространяющиеся в направлении ее движения, имеют общий фронт. Этот фронт перемещается вместе с передним краем нагрузки. Таким образом, в окрестности переднего края нагрузки происходит наложение поверхностных волн в одинаковой фазе. В результате энергия, переносимая поверхностными волнами, запасается в окрестности края нагрузки. Это и приводит к росту напряжений.

Описанное явление аналогично резонансу в обычных колебательных системах и вызвано совпадением скорости движения источника возмущений со скоростью распространения собственных волн упругого полупространства — поверхностных волн Релея.

§ 3. В стационарном решении, как видно из (1.16), при до- и сверхрелеевской скорости перемещения нагрузки знаки напряжения противоположны [1]. То же самое имеет место и для смещений [1]. В частности, изменяется форма свободной поверхности. Вопреки привычным представлениям, при стационарном движении сжимающей нагрузки со сверхрелеевской скоростью материал под нагрузкой выпучивается, и, наоборот, если нагрузка растягивающая, то материал под ней продавливается.

Для объяснения этого явления снова обратимся к нестационарной задаче. В силу (1.13), для вертикального смещения v точек поверхности

($y = 0, x > 0$) имеем выражение

$$v = \int_{c_1^{-1}x}^t \int_{c_1^{-1}x}^{\tau} [w_1(u) + w_2(u)] du d\tau \quad (3.1)$$

$$w_1(u) = -\frac{K}{\pi V c_2^2 u} \left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(-2 \frac{u^2}{x^2} + \frac{1}{c_2^2} \right)^2 \left(\frac{u}{x} - \frac{1}{V} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\left(-2 \frac{u^2}{x^2} + \frac{1}{c_2^2} \right)^4 + 16 \frac{u^4}{x^4} \left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{u^2}{x^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{при } c_1^{-1}x \leq u \leq c_2^{-1}x$$

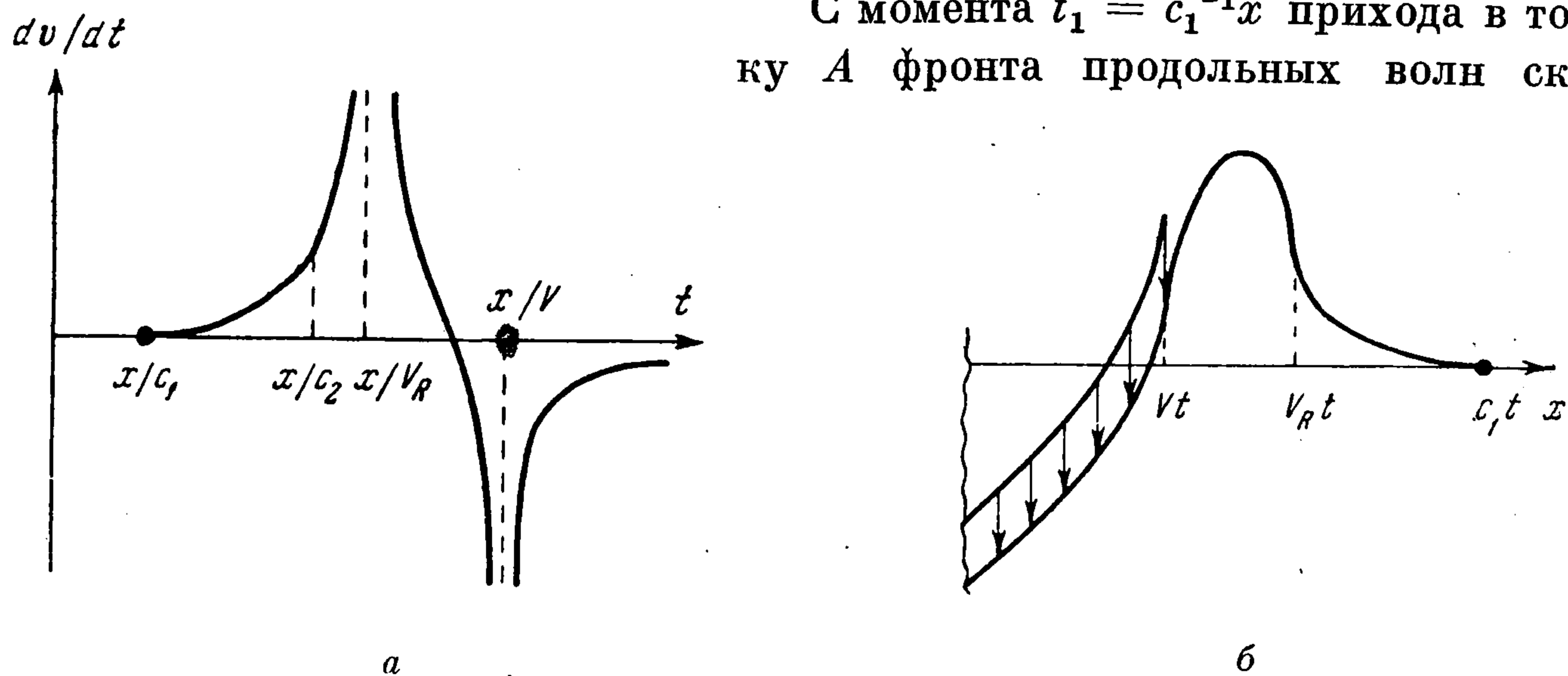
$$w_1(u) = 0 \quad (u > c_2^{-1}x), \quad w_2(u) = -\frac{K}{\pi V c_2^2 u} \left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(\frac{u}{x} - \frac{1}{V} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\left(-2 \frac{u^2}{x^2} + \frac{1}{c_2^2} \right)^2 - 4 \frac{u^2}{x^2} \left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^{1/2} \left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{1}{c_2^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} \quad \text{при } u \geq c_2^{-1}x$$

$$w_2(u) = 0 \quad (u < c_2^{-1}x)$$

На фиг. 1, а, б, 2, а приведены графики вертикальной скорости dv/dt в произвольной точке A ($y = 0, x > 0$) в функции времени соответственно при дорелеевской и сверхрелеевской скоростях движения нагрузки.

С момента $t_1 = c_1^{-1}x$ прихода в точку A фронта продольных волн ско-



Фиг. 1

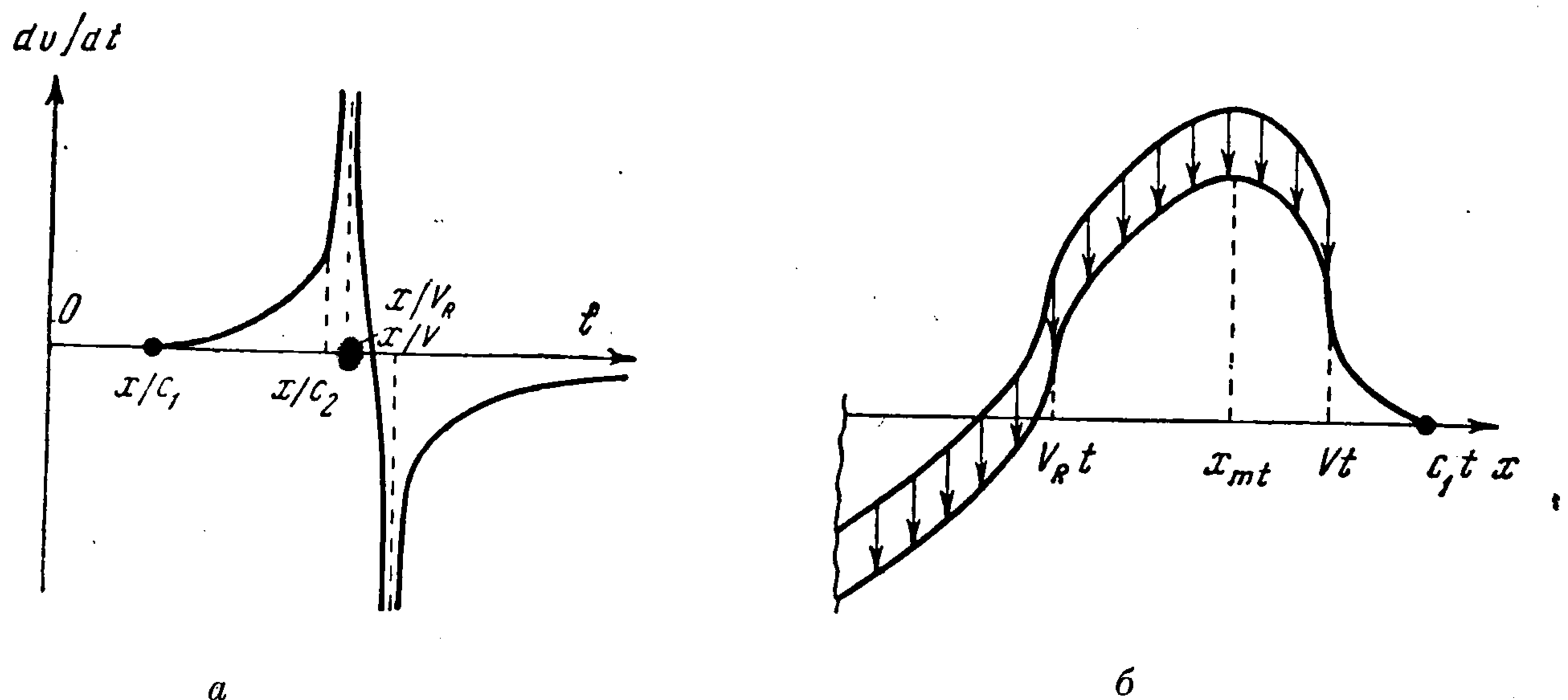
рость начинает нарастать. При этом в дорелеевском случае (фиг. 1, а) бесконечную положительную скорость приносит поверхностная волна при $t_R = V_R^{-1}x$, возникающая в момент приложения нагрузки у ее переднего края, а бесконечная отрицательная скорость будет в точке A позднее, в момент прихода переднего края нагрузки ($t_0 = V^{-1}x$).

В сверхрелеевском случае картина обратная (фиг. 2, а): здесь бесконечная положительная скорость связана с приходом переднего края нагрузки, а бесконечная отрицательная — с приходом поверхностной волны.

Поясним отличие до- и сверхрелеевского случаев. В рассматриваемой задаче момент приложения нагрузки выделен тем, что в этот момент к телу прикладывается сразу бесконечная сила, тогда как в каждый из последующих моментов — лишь малые добавки. Движение среды можно рассматривать как результат взаимодействия возмущений, которые возникают в момент приложения нагрузки на участке $(-\infty, 0]$ оси x и в последующие моменты времени у движущегося переднего края нагрузки.

В начальный момент частицы среды, расположенные на поверхности непосредственно у переднего края нагрузки впереди него, приобретают бесконечные положи-

тельные, а частицы, находящиеся непосредственно позади, — бесконечные отрицательные вертикальные скорости (dv/dt). Примерное распределение скоростей в окрестности переднего края нагрузки в момент, близкий к начальному, изображено на фиг. 3. И бесконечный положительный разрыв скорости (часть 1) начального распределения (фиг. 3), и бесконечный отрицательный разрыв (часть 2) будут переноситься вдоль границы поверхностной волны, которая возникла у переднего края нагрузки в момент ее приложения. Части (1) и (2) расположены по разные стороны от переднего края нагрузки (фиг. 3). Поэтому в до- и сверхрелеевском случаях они по-разному



Фиг. 2

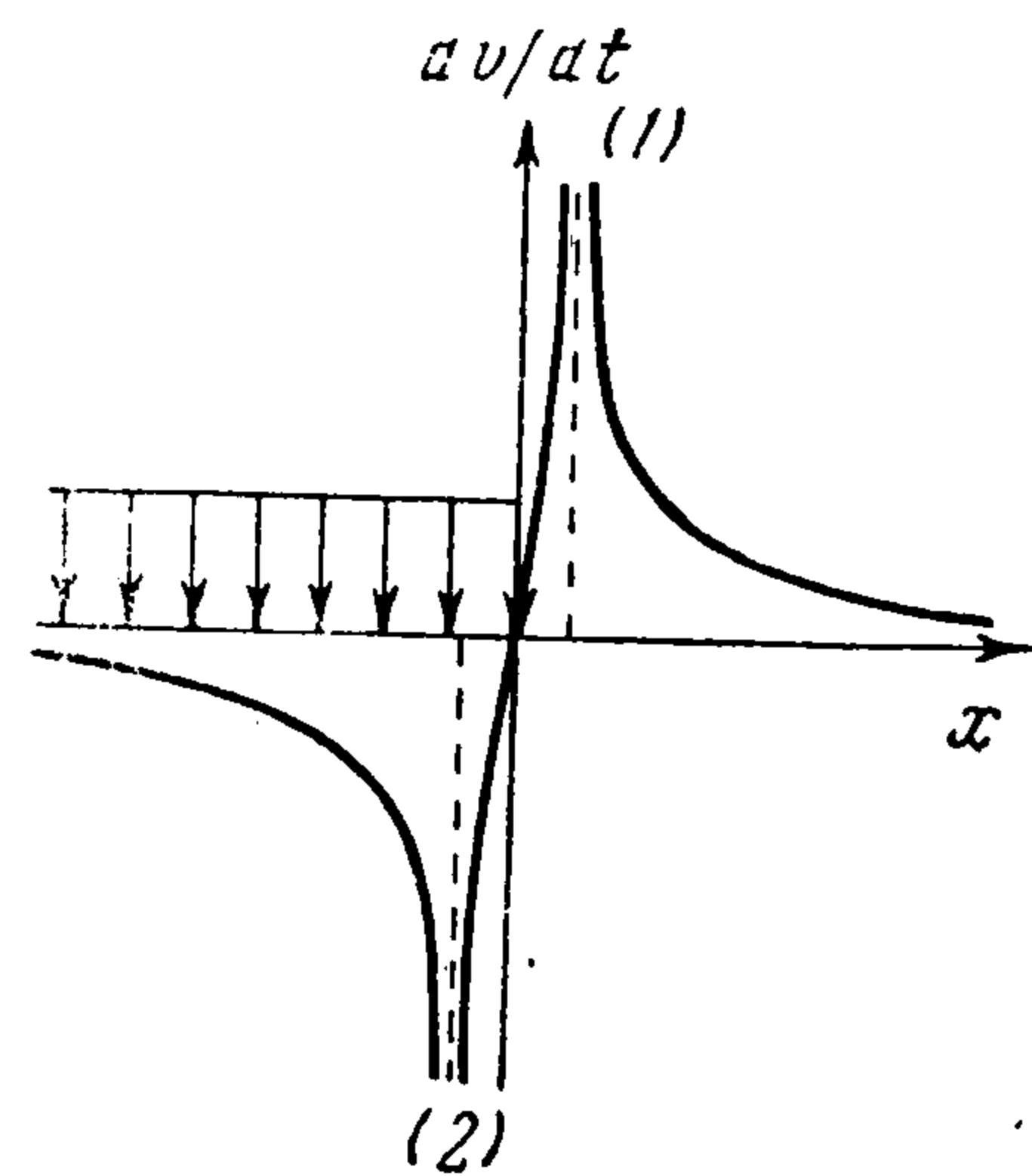
взаимодействуют с возмущениями, которые порождает по мере своего движения передний край нагрузки.

Часть (1) расположена перед нагрузкой. В дорелеевском случае, согласно (3.1), более поздние возмущения не изменяют ее вид и скорость распространения. Поверхностная волна обгоняет передний край нагрузки и приносит в точку A соответствующий бесконечный положительный разрыв вертикальной скорости частицы (фиг. 1, a). Часть (2) в дорелеевском случае встречает на своем пути передний край нагрузки и с ним взаимодействует. Взаимодействие приводит к тому, что передний край нагрузки, попадая в точку A , вызывает изменение скорости качественно такое же как, и в части (2) начального распределения.

В сверхрелеевском случае, наоборот, передний край нагрузки догоняет часть (1) начального распределения. При этом наложение возмущений происходит так, что, как видно из (3.1), приход переднего края нагрузки в любую точку границы будет сопровождаться бесконечным положительным разрывом скорости частицы (фиг. 2, a). Поверхностная же волна отстает от переднего края нагрузки и переносит бесконечный отрицательный разрыв скорости, соответствующий части (2) начального распределения.

В произвольной точке A поверхности вертикальная скорость при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянному отрицательному значению. В самом деле, по известным свойствам преобразования Лапласа, имеем, согласно (1.2), (1.4), (1.12),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dv}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K \sqrt{\zeta^2 + c_1^{-2}}}{2\pi V c_2^2 (\zeta^2 + V^{-2}) F_R(\zeta)} d\zeta$$



Фиг. 3

Подынтегральная функция убывает на бесконечности как ζ^{-2} , т. е. интеграл сходится и положителен в силу положительности подынтегральной функции.

Смещение v в произвольной точке поверхности тела убывает до $(-\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ независимо от того, с какой скоростью перемещается нагрузка.

В противоположность этому, как видно из рассмотренного поведения, скорости, изменение смещения в точке границы в моменты прихода переднего края нагрузки и поверхностной волны зависит от скорости перемещения нагрузки.

В дорелеевском случае смещение в точке A возрастает в момент прихода поверхностной волны и уменьшается в момент прихода переднего края нагрузки.

При сверхрелеевской скорости перемещения нагрузки разрыву вертикальной скорости, приходящему вместе с передним краем нагрузки, соответствует нарастание смещения в точке A , а разрыву, приносимому поверхностной волной, — уменьшение.

Зная зависимость от времени вертикальной скорости (dv/dt) (фиг. 1, а, 2, а), а следовательно, и смещения v в произвольной точке границы, можно построить распределение вертикальных смещений вдоль границы в любой момент времени.

На фиг. 1, б, приведена форма поверхности полупространства в некоторый момент времени в дорелеевском случае. Аналогичный график для сверхрелеевского случая изображен на фиг. 2, б.

Чтобы перейти к стационарному решению, нужно рассматривать движение в окрестности переднего края нагрузки при больших временах. Чем более поздний момент выбран для наблюдения, тем больше расстояние между точками границы, в которых находятся в этот момент передний край нагрузки и поверхностная волна. В пределе при $t \rightarrow \infty$ это расстояние становится бесконечным.

Таким образом, в дорелеевском случае (фиг. 1, б) материал в любой фиксированной окрестности края нагрузки будет продавлен под нагрузкой, а перед ней — выпучен. При сверхрелеевской скорости (фиг. 2, б) под нагрузкой в окрестности ее края будет выпучивание, а перед ней — впадина. Эти результаты вполне согласуются с теми, которые получаются из стационарного решения.

Поднятие под сжимающей нагрузкой вблизи ее переднего края в сверхрелеевском случае (фиг. 2, б) не связано с тем, что нагрузка распределена на полубесконечном интервале. Если движущаяся со сверхрелеевской скоростью нагрузка приложена на конечном отрезке длины l , то ее передний край также будет поднят относительно материала, расположенного перед нагрузкой. В самом деле, форма поверхности в этой задаче получится после вычитания из графика фиг. 2, б, такого же графика, но сдвинутого на отрезок l влево. Из графика фиг. 2, б, видно, что смещение v монотонно возрастает на интервале (∞, x_{mt}) . Здесь x_{mt} — координата точки границы, в которой смещение максимально в рассматриваемый момент. Поэтому и после сдвига влево и вычитания смещение v в указанном интервале будут монотонно увеличиваться. В сверхрелеевском случае $x_{mt} < Vt$, следовательно, передний край «конечной» нагрузки поднят по отношению к материалу, лежащему впереди него.

Обычно качественные особенности в стационарных задачах проявляются тогда, когда при переходе через некоторую критическую скорость изменяется тип уравнений (например, переход через скорость звука в газовой динамике).

Отличие разобранных резонансных явлений в стационарных контактных задачах при движении штампов или нагрузок с релейской скоростью заключается в том, что они не связаны с изменением типа уравнений. Эти явления порождены граничными условиями: наличием свободной границы и появлением еще одного типа волн — поверхностных. Присутствие свободной границы или границы раздела, вдоль которой могут распространяться поверхностные волны, приводит к резонансным явлениям также и в других средах. Эти эффекты проявляются при движении источника возмущений со скоростями, близкими к скорости поверхностных волн в данной среде. Отметим, что в работе [11] рассмотрен резонансный механизм возбуждения гравитационных волн на поверхности тяжелой жидкости турбулентным ветром. В этом случае вследствие дисперсии имеется не одна критическая величина скорости, как в однородном изотропном упругом теле, а спектр критических скоростей.

Можно ожидать, что сходные явления имеют место в теории излучения Вавилова — Черенкова при движении заряда вдоль границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими свойствами.

Автор искренне благодарен Г. И. Баренблатту за постановку задачи и руководство работой, а также В. М. Ентову и Р. Л. Салганику — за помощь в работе.

Поступила 5 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Галин Л. А. Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 3.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
4. Radok I. R. M. On the solutions of problems of dynamic plane elasticity. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3.
5. Sneddon I. N. Stress Produced by a Pulse of Pressure Moving Along the Surface of a Semi-Infinite Solid. Rend. Circolo mat., Palermo, vol. 2, 1952.
6. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
7. Cole J. and Huth J. Stress Produced in a Half-Plane by Moving Loads. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 4.
8. Craggs I. W. Two-dimensional waves in an elastic half-plane. Cambridge Philos. Soc., Proc., 1960, vol. 56, p. 3.
9. Dang Dinh Ang. Elastic waves generated by a force moving along a crack. J. Math. and Phys., 1960, vol. 38, No. 4.
10. Dang Dinh Ang. Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-plane. Quart. Appl. Math., 1960, vol. 18, No. 3.
11. Филиппс О. М. Резонансные явления в гравитационных волнах. Сб. «Гидродинамическая неустойчивость», Изд. «Мир», 1964.