

О ПЛОСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ

А. М. Скобеев

(Москва)

Рассматривается задача о косом ударе по полупространству, материал которого удовлетворяет уравнениям, предложенным С. С. Григоряном [1]. Исследуются движения, соответствующие в упругом случае продольной и поперечной волнам. В предположении постоянства модуля сдвига и величины $dp/d\rho$ решение задачи выписывается в явном виде.

Обычно задачи динамики грунта решаются в предположении, что так или иначе задана зависимость осевого напряжения σ от деформации ϵ . Эта зависимость задается или в качестве опытного факта или, например [2-5], считается, что давление p есть функция только от объемного сжатия θ и что второй инвариант тензора напряжений есть функция давления (условие пластичности); привлечение вытекающих из постановки задачи соображений симметрии позволяет выразить из условия пластичности зависимость $\sigma(p)$ и, следовательно, найти $\sigma(\epsilon)$. В постановке настоящей задачи принимаются менее жесткие условия симметрии, что приводит к тому, что σ зависит не только от ϵ , но и от касательного напряжения τ , что вносит существенные осложнения. Для описания среды используется модель, предложенная С. С. Григоряном [1]. Эта модель позволяет, хотя бы в принципе, описать любое упруго-пластическое движение грунта, однако она, к сожалению, совершенно недостаточно проверена. Экспериментальная проверка, проведенная в [6], конкретизирует вид условия пластичности и функции $p(\epsilon)$, однако уравнения этой модели, обобщающие закон Гука, вообще не проверены, что объясняется тем, что нет решений этих уравнений, и с экспериментом сравнивать нечего. Результаты настоящей работы, по-видимому, могут быть использованы для проверки модели С. С. Григоряна. Отметим, что аналогичная задача решалась В. С. Андиферовым и Х. А. Рахматулиным [7], однако ими принималась совершенно другая модель грунта, и результаты настоящей работы существенно отличаются от результатов [7].

1. Рассмотрим упруго-пластическое полупространство и систему координат, связанную с ним. Оси y и z лежат в граничной плоскости, ось x направлена в глубь полупространства. Введем обозначения u и v - скорости по x и y , $\sigma = \sigma_{xx}$, $\tau = \sigma_{xy}$, σ_{yy} и σ_{zz} - компоненты тензора напряжений,

$$\gamma = 1/2 (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \quad K = \rho_0 dp / d\rho$$

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad u = 0, \quad v = 0 & \text{ при } t < 0, x \geq 0 \\ \sigma = \sigma_1, \quad \tau = \tau_1, \quad \gamma = \gamma_1 & \text{ при } t \geq 0, x = 0 \end{aligned}$$

т. е. на границе заданные функции времени $\sigma(t)$ и $\tau(t)$ имеют вид ступеньки. В предположении, что от y и z ничто не зависит, ищутся $\sigma(x, t)$, $\tau(x, t)$ и $\gamma(x, t)$.

Считаем, что величина $1 - \rho_0 / \rho$ мала по сравнению с единицей, тогда в системе С. С. Григоряна можно пренебречь конвективными членами,

и задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \lambda \gamma = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \lambda \tau = G \frac{\partial v}{\partial x} \\ \sqrt[3]{4} (\sigma + p)^2 + \gamma^2 + \tau^2 = F(p), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -K \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

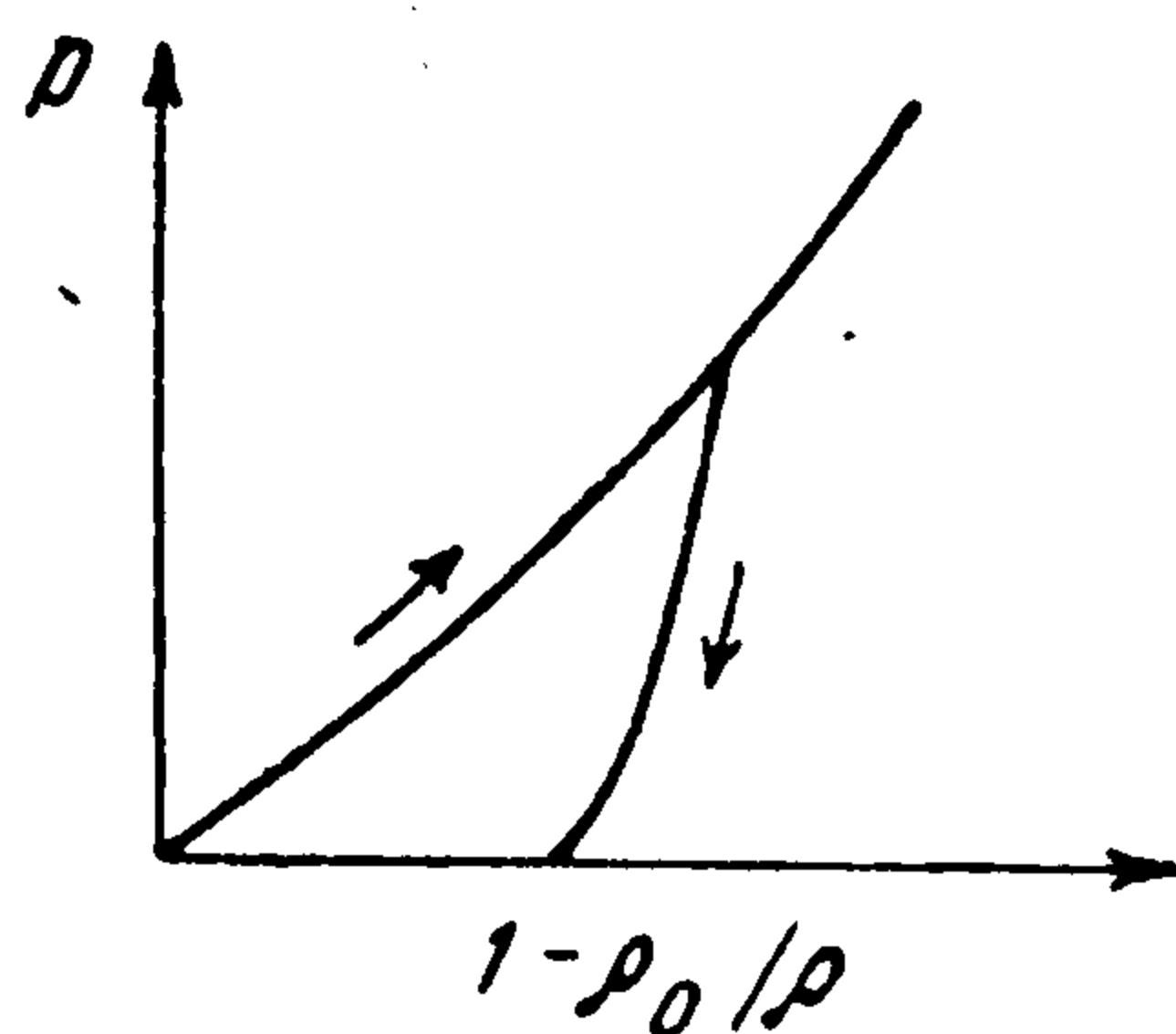
$$\lambda = G \frac{\sigma + p}{F(p)} \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\tau}{F(p)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{F'(p)}{2F(p)} \frac{\partial p}{\partial t}$$

при вышесформулированных начальных и граничных условиях. Третье уравнение (1.1) получено из соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} K \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.2)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Определение величин $F(p)$ и λ имеется в [1].

Если сдвиг происходит пластически, то $\lambda > 0$; в остальных случаях следует положить $\lambda = 0$, и тогда система (1.1) превратится в

обычную систему уравнений теории упругости.

В системе (1.1) первое уравнение есть уравнение движения, второе уравнение представляет обобщение закона Гука, третье уравнение есть условие пластичности, а $F(p)$ — функция пластичности, определяемая экспериментально.

Давление p считаем зависящим от ρ и направления процесса; типичная зависимость $p(\rho)$ показана на фиг. 1.

2. Построим некоторые решения системы (1.1), не пытаясь пока удовлетворить начальным условиям. Напишем уравнение характеристик системы (1.1). По определению, характеристикой системы уравнений первого порядка называется кривая $x = f(t)$, обладающая следующим свойством: если на этой кривой задать все неизвестные функции, входящие в систему, то производные этих функций не будут однозначно определены. Обозначим через $\partial / \partial s$ производную вдоль f , тогда для любой функции w , заданной на f , имеем

$$\frac{\partial w}{\partial s} ds = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (2.1)$$

В систему (1.1) входят шесть неизвестных функций: $u, v, \sigma, \tau, p, \psi$; для определения двенадцати первых производных от них имеется система из двенадцати уравнений: первые шесть уравнений системы (1.1) и шесть уравнений типа (2.1); поскольку полученная система линейна относительно производных, то, если ее определитель отличен от нуля, все производные определяются однозначно.

Таким образом, условием характеристичности $f(t)$ будет обращение в нуль упомянутого определителя.

Этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^9 & 0 & a_3^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10}^9 & 0 & 1 \\ a_1^{10} & 0 & a_3^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{10}^{10} & 0 & 0 \\ a_1^{11} & 0 & a_3^{11} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{10}^{11} & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1^9 &= G \frac{\sigma + p}{F(p)} \gamma, & a_3^9 &= G \frac{\tau \gamma}{F(p)}, & a_{10}^9 &= -\frac{F'(p)}{2F(p)} \gamma \\ a_1^{10} &= G \frac{\sigma + p}{F(p)} \tau, & a_3^{10} &= G \left[\frac{\tau^2}{F(p)} - 1 \right], & a_{10}^{10} &= -\frac{F'(p)}{2F(p)} \tau \\ a_1^{11} &= G \left[\frac{\sigma + p^2}{F(p)} - \frac{4}{3} \right], & a_3^{11} &= G \frac{\tau(\sigma + p)}{F(p)}, & a_{10}^{11} &= -\frac{F'(p)}{2F(p)} (\sigma + p) \end{aligned}$$

Раскрывая этот определитель (это сделать нетрудно ввиду большого количества нулей) и приравнявая его нулю, получим уравнение характеристик системы (1.1)

$$\begin{aligned} a^4 - \left\{ \left[1 + k \left(s^2 - \frac{\gamma^2}{F} \right)^{1/2} \right] K + \frac{4-s^2}{3} G + \frac{4\gamma^2}{3F} G \right\} a^2 + \\ + \frac{4G^2\gamma^2}{3F} + GK \left[s^2 + k \left(s^2 - \frac{\gamma^2}{F} \right)^{1/2} \right] = 0 \\ \rho_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = a^2, \quad 1 - \frac{\tau^2}{F(p)} = s^2, \quad \frac{F'(p)}{\sqrt{3F(p)}} = k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим [4], что $s^2 \leq 1$ и $k < 1$. Если $\gamma \equiv 0$, то уравнение (2.2) переходит в

$$\Phi(a^2, s) \equiv a^4 - [(1 + ks)K + 1/3(4 - s^2)G] a^2 + GKs(s + k) = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) получено без каких бы то ни было предположений о величинах K , G и k ; в дальнейшем считаем, что эти величины постоянны и $G < (1 + k)K$; это предположение не приводит к линейности задачи, ибо второе уравнение (1.1) нелинейно. Кроме того, ограничимся случаем, когда $\gamma \equiv 0$ и будем рассматривать только такие движения, для которых s постоянно вдоль каждой характеристики. Поскольку a^2 зависит лишь от s , характеристики прямолинейны.

Ввиду того что функции, заданные на границе, имеют ступенчатый вид, движение можно считать автомодельным. В этих предположениях можно построить некоторые решения системы (1.1).

Вследствие автомодельности все величины будут зависеть только от $x/t = a/\sqrt{\rho_0}$; из (2.3) видно, что a зависит только от s , поэтому все величины входящие в (1.1), можно считать зависящими только от s .

Из автомодельности имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{a}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.4)$$

Поэтому первое уравнение (1.1) можно записать в виде

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.5)$$

Отсюда, используя третье уравнение (1.1), последовательно имеем

$$-\frac{a^2}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} - sk \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{F} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K}{a^2 - (1 + ks)K} \sqrt{F(p)} = \frac{dp}{ds} \quad (2.7)$$

или

$$\frac{d\sqrt{F}}{ds} = \frac{kK}{a^2 - (1 + ks)K} \sqrt{F} \quad (2.8)$$

Интегрируя уравнение (2.8), получим

$$\sqrt{F(p)} = \sqrt{F(p_0)} \exp\left(\int_{s_0}^s \frac{kK}{a^2(\xi) - (1 + k\xi)K} d\xi\right) \quad (2.9)$$

согласно (2.2), имеем

$$\tau = \sqrt{1 - s^2} \sqrt{F(p)} \quad (2.10)$$

Остальные величины, входящие в систему, получаются элементарно. Подставляя в (2.9) вместо a корни уравнения (2.3), получим семейства решений системы (1.1), которые могут быть использованы для построения решений краевых задач.

Уравнение (2.3) имеет четыре корня: два положительных и два отрицательных, причем положительные корни соответствуют волнам, распространяющимся в сторону положительных x . Далее будем называть продольной волной решение, получаемое подстановкой в (2.9) большего положительного корня (2.3), поперечной волной — меньшего.

3. Проведем некоторое исследование уравнения (2.3). Считаем (2.3) уравнением относительно a^2 ; обозначим больший корень (2.3) a_2^2 , меньший через a_1^2 . Получим одну оценку a^2 , считая a^2 функцией s .

Решая (2.3), получим

$$2a^2 = (1 + ks)K + \frac{1}{3}(4 - s^2)G \pm \left\{ [(1 + ks)K + \frac{1}{3}(4 - s^2)G]^2 - 4GKs(s + k) \right\}^{1/2} \quad (3.1)$$

$$2a^2 = (1 + ks)K + \frac{1}{3}(4 - s^2)G \pm \left\{ [(1 + ks)K - \frac{1}{3}(4 - s^2)G]^2 + 4GKh \right\}^{1/2}$$

при $s < 1$

$$h \equiv (1 + ks) \frac{1}{3}(4 - s^2) - s(s + k) = \frac{1}{3}(1 - s^2)(4 + ks) > 0$$

Поэтому

$$a_1^2 < (1 + ks)K, \quad a_2^2 > (1 + ks)K \quad (3.2)$$

Это следует из того, что для соотношения

$$x_{1,2} = \alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \delta^2}$$

всегда

$$x_1 < \min(\alpha, \beta), \quad x_2 > \max(\alpha, \beta)$$

Далее, совершенно элементарное исследование показывает, что $da_1^2/ds > 0$ и $a_1^2 \leq G$; для da_2^2/ds , в зависимости от значений параметров, возможны три случая.

1°. Если

$$kK > \frac{4}{3} \left(1 + \frac{4+k}{4+4k}\right) G \quad (3.3)$$

то $da_2^2/ds > 0$ и $a_2^2 > K + \frac{4}{3}G$ для всех s

2°. Если

$$\frac{4}{3} \left(1 + \frac{4+k}{4+4k}\right) G > kK > \frac{4}{3} G \quad (3.4)$$

то $a_2^2 > K + \frac{4}{3}G$ и производная da_2^2/ds меняет знак в интервале $[0, 1]$.

3°. Если

$$\frac{4}{3}G > kK \quad (3.5)$$

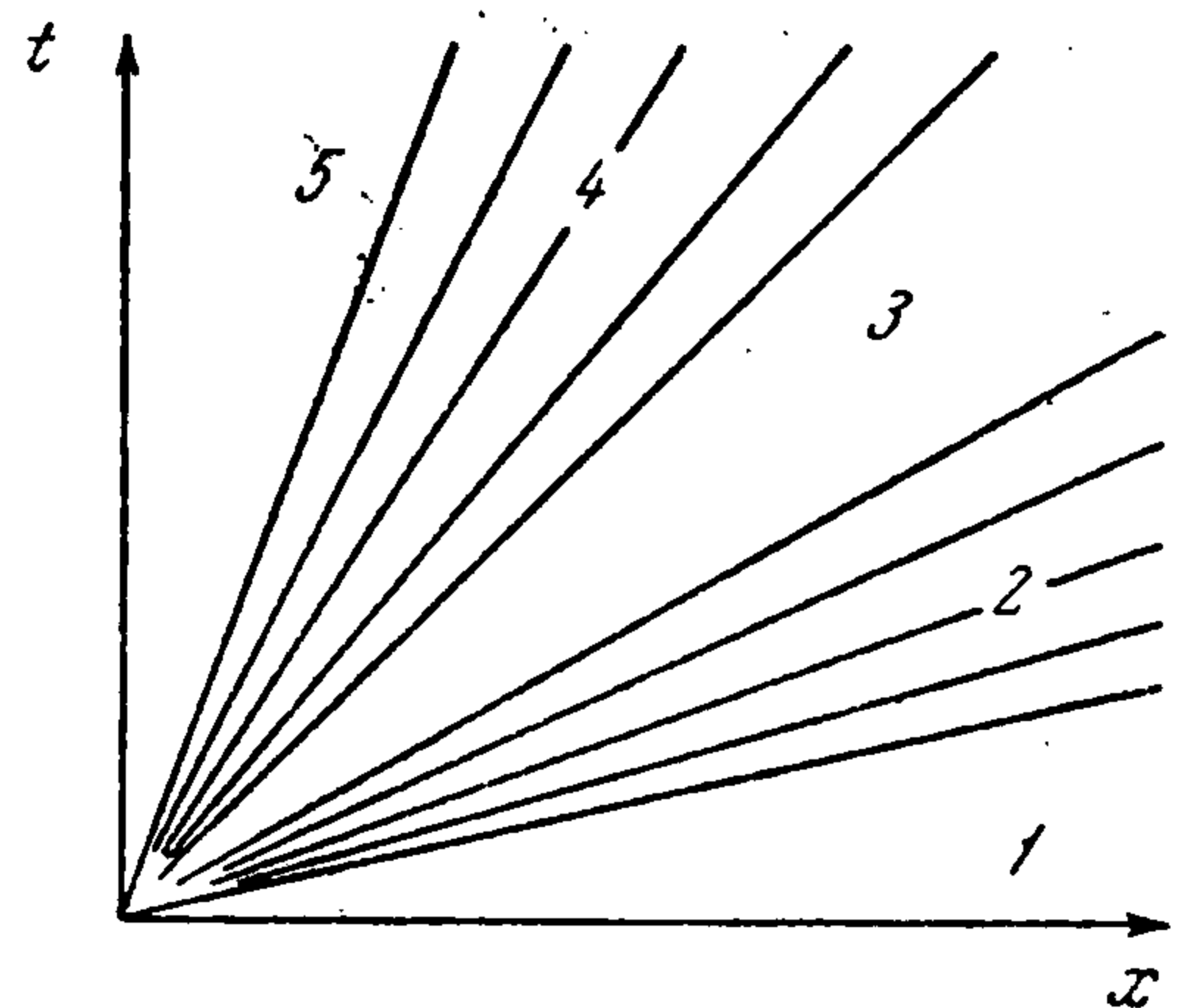
то производная $da_2^2/ds < 0$, $a_2^2 < K + \frac{4}{3}G$ при $1 > s > s_*$, где $s_* = 3kK/4G$.

4. Рассмотрим границы применимости системы (1.1). Система (1.1) описывает движение с пластическим сдвигом; условием пластичности сдвига будет $\lambda > 0$. Выясним, когда будет выполняться это условие. Используя третье уравнение системы (1.1), запишем (2.6) в виде

$$\left[a^2 - \left(1 + \frac{k}{s}\right) K \right] \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (4.1)$$

Используя (2.4) и первое уравнение (1.1) преобразуем второе уравнение (1.1)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{G}{a^2} - 1 \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(G - a^2) [a^2 s - (s + k) K]}{a^2 \tau \sqrt{1 - s^2}} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.2) \end{aligned}$$



Фиг. 2

Здесь учитывалось (4.1).

Нетрудно показать, что, используя (2.3), можно (4.2) преобразовать к виду

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2s \sqrt{F}} \left[a^2 - \left(K + \frac{4}{3}G \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

Таким образом, если материал сжат, то при нагрузке и разгрузке условие $\lambda > 0$ соответственно дает

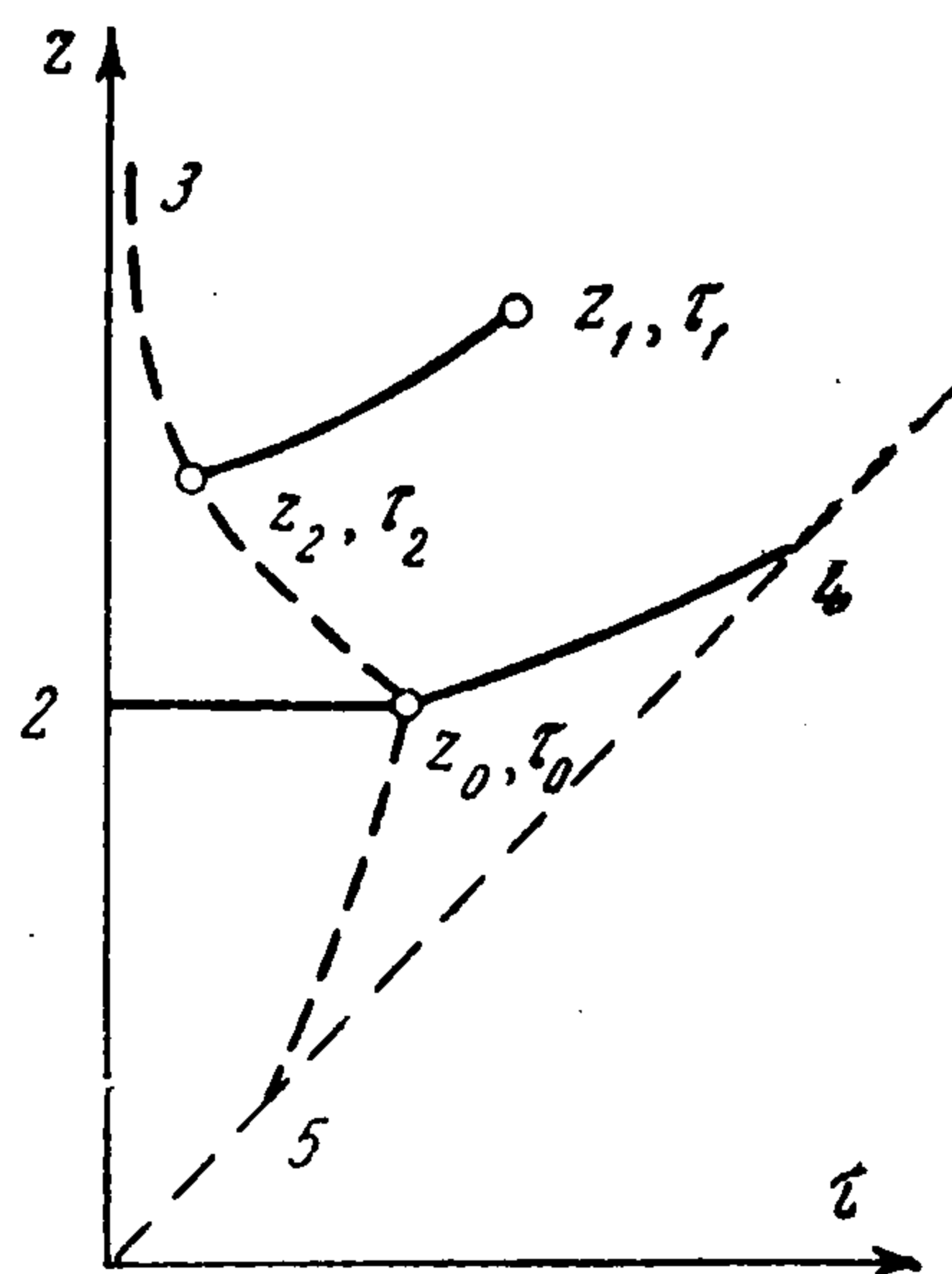
$$a^2 < K + \frac{4}{3}G \quad (\partial u / \partial x < 0) \quad (4.4)$$

$$a^2 > K + \frac{4}{3}G \quad (\partial u / \partial x > 0) \quad (4.5)$$

В поперечной волне ($a_1^2 \leq G$) при нагрузке сдвиг происходит пластически, при разгрузке — упруго при всех значениях параметров. В продольной же волне в случаях 1°, 2° и 3° ($s \leq s_*$) сдвиг происходит пластически при разгрузке и упруго при нагрузке, в случае 3° ($s > s_*$) упруго — при разгрузке и пластически — при нагружении. Эти результаты отличаются от результатов работы [4] (стр. 89), где допущена ошибка.

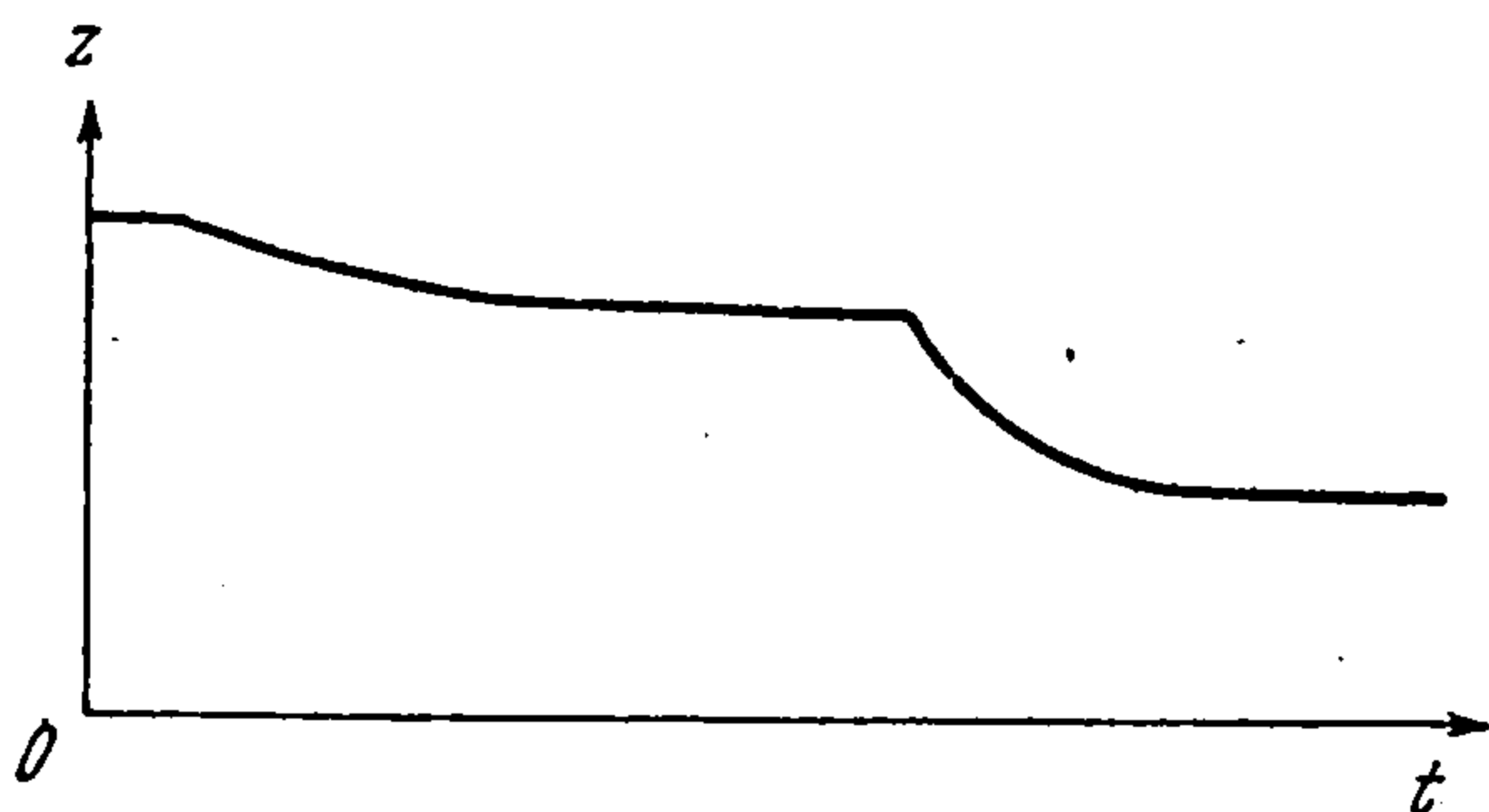
5. Построим решение исходной краевой задачи, комбинируя продольную и поперечную волну и учитывая, что постоянное движение также является решением системы (1.1). Положим $\gamma \equiv 0$ и ограничимся случаем, когда для нагрузочной ветви диаграммы (p, ρ) выполняется условие (3.5), для разгрузочной — (3.3). В плоскости x, t получим следующую картину (фиг. 2): области 1, 3 и 5 есть области постоянного движения, область 2 есть область распространения продольной волны, область 4 — поперечной. В области 1 имеем $\sigma = \sigma_0, \tau = \tau_0$, в области 5 имеем $\sigma = \sigma_1, \tau = \tau_1$; в области 3 положим $\sigma = \sigma_2, \tau = \tau_2$. Обозначим $\sqrt{F(p)} = z$, тогда третье уравнение (1.1) однозначно определяет связь между σ, τ и z, τ ; в дальнейшем напряженное состояние будем описывать величинами z, τ , причем положим $z_i = \sqrt{F(p_i)}$.

Если рассмотрим, как меняется напряженное состояние при фиксированном x с течением времени, то увидим, что вначале оно постоянно, потом при прохождении продольной волны меняется по формулам (2.9) и (2.10) с $a^2 = a_2^2$ от z_0, τ_0 до z_2, τ_2 , потом [постоянно, затем меняется на поперечной волне до z_1, τ_1 и остается постоянным.

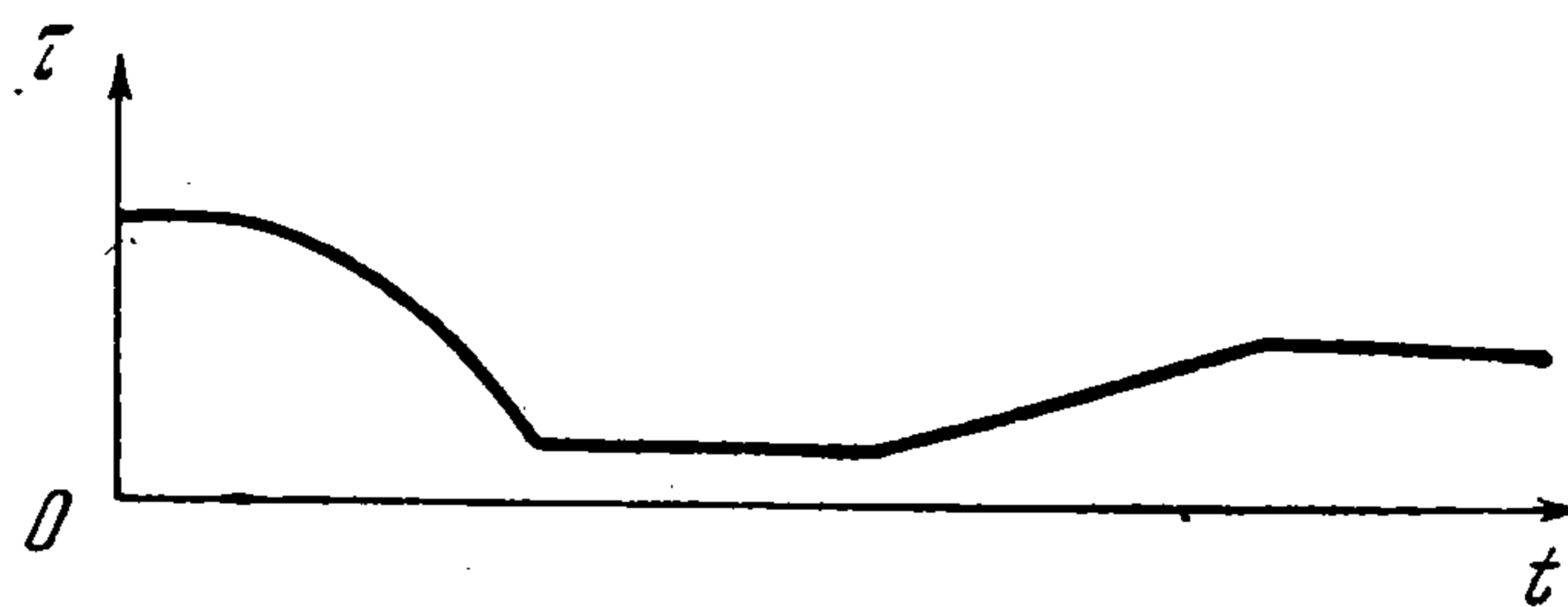


Фиг. 3

Формулы (2.9) и (2.10) можно рассматривать как параметрическое представление некоторой кривой в плоскости (z, τ) . Существуют два семейства таких кривых; первое семейство соответствует различным поперечным волнам ($a^2 = a_1^2$), второе — продольным ($a^2 = a_2^2$); выбор кривой из семейства осуществляется фиксацией z_0 . Возьмем в плоскости (z, τ) точку (z_0, τ_0) и проведем через нее кривые первого и второго семейства. На фиг. 3 точка $z_0\tau_0$ отмечена числом 1, кривая (1.4) представляет собой кривую возможных переходов при фиксированном x на поперечной волне сжатия, кривая (1.3) — продольной волне сжатия и т. д. Возмож-



Фиг. 4



Фиг. 5

ны пять случаев: точка (z_1, τ_1) лежит: (а) в области (1.3.4), (в) в области (1.2.3) и т. д. Рассмотрим случай (а). Если решение задачи существует, то на кривой (1.3) должна быть точка (z_2, τ_2) такая, что выпущенная из нее кривая первого семейства пройдет через (z_1, τ_1) .

Это значит, что

$$z_2 = z_0 \exp \Phi_2(s_0, s_2), \quad z_1 = z_2 \exp \Phi_1(s_2, s_1)$$

$$\Phi_i(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{kK}{a_i^2 - (1 + ks)K} ds \quad (s_2 > s_0, s_1 < s_2)$$

Отсюда получим уравнение для s_2

$$z_0 \exp [\Phi_1(s_2, s_1) + \Phi_2(s_0, s_2)] = z_1 \quad (5.1)$$

При $s_2 = s_0$ левая часть (5.1) меньше правой, поскольку левая часть определяет некую точку на кривой (1.4), а (z_1, τ_1) лежит выше этой кривой; при $s_2 \rightarrow 1$ левая часть (5.1) стремится к бесконечности, поэтому существует s_2 такое, что левая часть равна правой, что и исчерпывает вопрос.

На фиг. 4 и 5 показаны для рассмотренного случая зависимости от времени z и τ при фиксированном x . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Можно рассматривать и другие краевые задачи для системы (1.1); их решение строится аналогично.

Кроме рассмотренных в п.3 непрерывных решений системы (1.1) — можно рассматривать и разрывные решения типа ударных волн. Согласно критерию устойчивости, скорость ударной волны должна быть больше скорости малых возмущений перед фронтом и меньше их скорости за фронтом. Отсюда следует, что ударная волна сжатия может существовать, если $da/dp > 0$, разрежения — $da/dp < 0$.

Имеем

$$\frac{da}{dp} = \frac{1}{2a} \frac{da^2}{ds} \frac{ds}{dp} \quad (5.2)$$

из (2.7) и (3.2) имеем $ds/dp > 0$ на продольной волне, $ds/dp < 0$ — на оперечной. Теперь из (5.2) видно, что ударная волна может существовать лишь в случае 2° и она будет волной разрежения.

В физически важном случае, когда для нагрузочной части диаграммы (p, ρ) выполняется условие (3.5), на разгрузочной (3.3) ударная волна существовать не может.

В заключение автор благодарит Н. В. Зволинского за ценные советы и указания.

Поступила 28 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. О основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Зволинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
3. Зволинский Н. В., Рыков Г. В. Отражение пластической волны от преграды. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
4. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Одномерные квазистатические движения грунта. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
5. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Задача о поршне для уравнений динамики грунтов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6.
7. Андиферов В. С., Рахматулин Х. А. Распространение сжимающе-сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.