

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НА ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ЦИЛИНДРАХ

И. М. Яворская

(Москва)

Изучается стационарная дифракция плоских упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах произвольной формы.

В § 1—7 рассматривается дифракция плоских продольных и поперечных волн на круговом цилиндре, свободном от напряжений. Решение подобных задач в виде рядов дано в [1], однако хорошая сходимость этих рядов обеспечивается лишь в случае, когда диаметр цилиндра a мал по сравнению с длиной волны: $a \ll 2\pi/k$. Будем интересоваться случаем больших частот, т. е. когда $k_1 a \gg 1$ и $k_2 a \gg 1$. В работах [2,3] предложен достаточно общий метод решения задач рассеяния упругих волн большой частоты на криволинейных поверхностях. Однако возникающие при этом явления изучаются (в соответствии с принципом Кирхгоффа) только в освещенной области. В работе [4] с помощью двойного преобразования Лапласа по времени и по углу изучается задача дифракции продольной упругой волны от линейного импульсного источника твердым цилиндром. Решение находится в освещенной области и в области тени для первых вступлений волн.

В данной работе используется метод, впервые предложенный Ватсоном [5] и развитый далее в работах В. А. Фока [6] и других авторов [7–10] и т. д. для задач акустики и электродинамики, метод преобразования суммы рядов в контурные интегралы (§ 2). Далее упругие смещения вне цилиндра, выраженные через интегралы по комплексному переменному, исследуются в различных областях упругого пространства § 3–6. Находится коротковолновая асимптотика для смещений. Дифракция продольной упругой волны на цилиндрической полости рассмотрена в § 7. В § 8 при помощи метода «геометрической теории дифракции», предложенного Келлером и его соавторами [11,12], изучается дифракция плоских волн на гладких выпуклых цилиндрах произвольной формы.

§ 1. Постановка задачи. На цилиндр радиуса a в бесконечном упругом пространстве (фиг. 1) падает плоская поперечная волна с потенциалом $\psi_0 = \exp(ik_2 r \cos \vartheta - i\omega t)$. Задача состоит в изучении смещений, возникающих в упругом пространстве вне цилиндра, вызванных дифракцией поперечной волны. Цилиндр считаем свободным от напряжений, т. е. $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{r\vartheta} = 0$ при $r = a$. Известно, что потенциалы продольных и поперечных волн в упругой среде удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь k_1 и k_2 — волновые числа продольных и поперечных волн. Решение уравнений (1.1) при указанных граничных условиях имеет вид [1]

$$\varphi_1 = \frac{4i}{\pi} \sum_0^{\infty} \varepsilon_n (i)^n \frac{A(n)}{\Delta_n} H_n^{(1)}(k_1 r) \sin n\vartheta$$

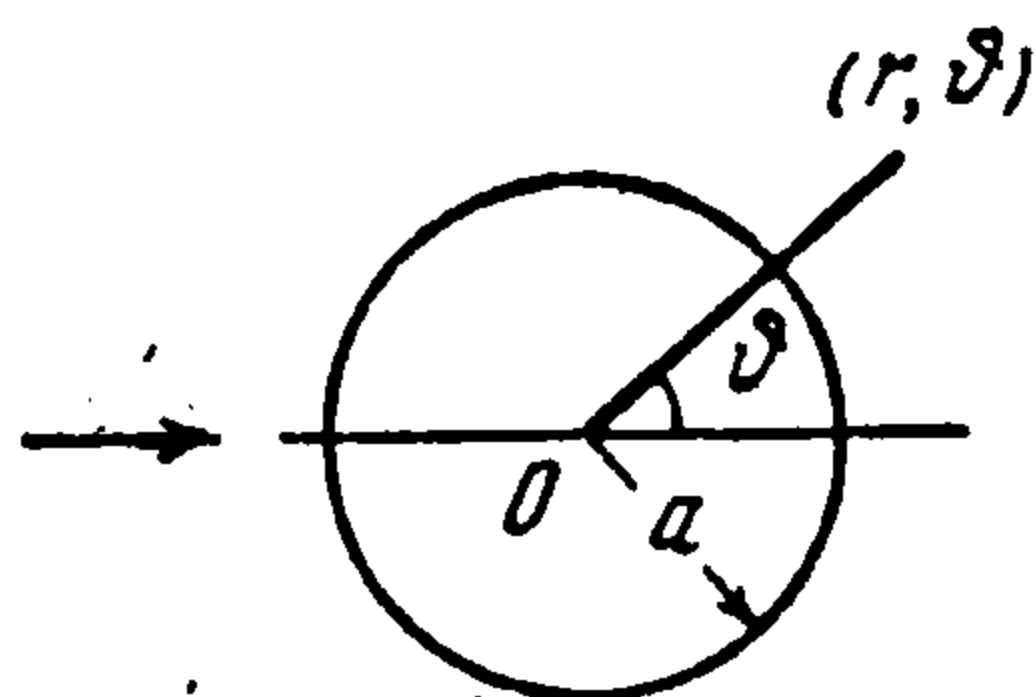
$$\psi_0 + \psi_1 = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n (i)^n \left[-\frac{\Delta_{n1}}{\Delta_n} H_n^{(1)}(k_2 r) + J_n(k_2 r) \right] \cos n\vartheta$$

где $H_n^{(1)}(\rho)$ — функции Ханкеля первого рода, $J_n(\rho)$ — функции Бесселя,

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad x = k_1 a, \quad y = k_2 a$$

$$\Delta_n = [4n^2 - (2n^2 - y^2)^2] H_n^{(1)}(x) H_n^{(1)}(y) + 4xy(n^2 - 1) H_n^{(1)'}(x) H_n^{(1)'}(y) - \\ - 2y^2 [x H_n^{(1)'}(x) H_n^{(1)}(y) + y H_n^{(1)'}(y) H_n^{(1)}(x)], \quad A(n) = n(2n^2 - 2 - y^2)$$

Функция Δ_{n1} аналогична Δ_n с заменой $H_n^{(1)}(y)$ на $J_n(y)$. Поле смещений вне цилиндра запишется так:



Фиг. 1

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi_0 + \psi_1)}{\partial \theta} = \quad (1.2) \\ = \frac{4ik_1}{\pi} \sum_0^\infty \varepsilon_n \frac{A(n)}{\Delta_n} H_n^{(1)'}(k_1 r) \sin n\theta e^{in\pi/2} + \\ + \frac{1}{r} \sum_0^\infty \varepsilon_n n \left[\frac{\Delta_{n1}}{\Delta_n} H_n^{(1)'}(k_2 r) - J_n(k_2 r) \right] \sin n\theta e^{in\pi/2}$$

Здесь и далее будем рассматривать формулы лишь для радиальной составляющей поля смещений u и только в окончательных результатах приведем выражения для тангенциальной компоненты v . Первая сумма в (1.2) представляет смещения в продольных (p) волнах, а вторая — в поперечных (s) волнах. Обозначим их соответственно через u^p и u^s .

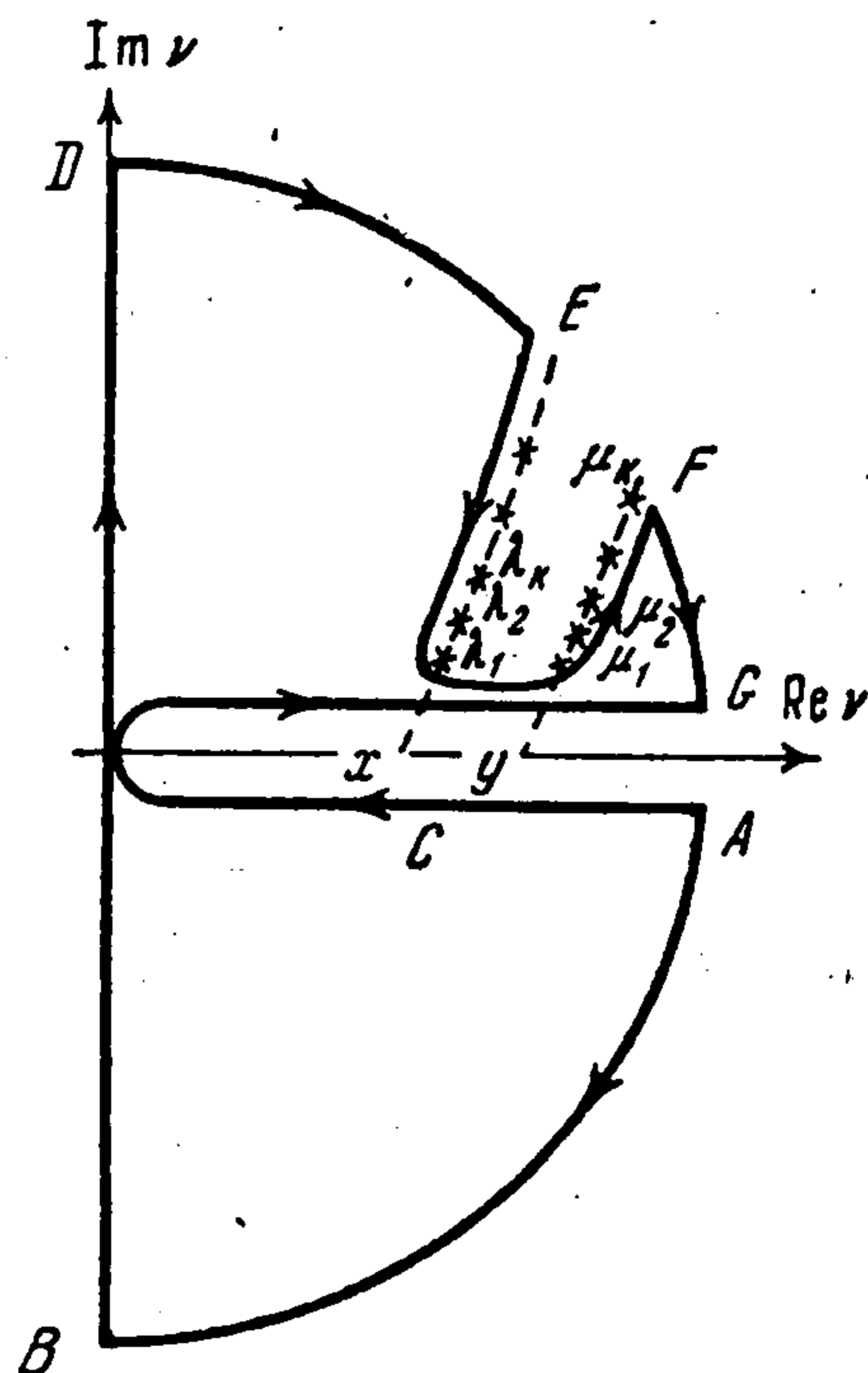
§ 2. Представление смещений в виде контурных интегралов. Если $k_1 a \gg 1$ и $k_2 a \gg 1$, то ряды (1.2) сходятся очень медленно. Поэтому преобразуем суммы рядов (1.2) методом Ватсона [5] в интегралы по петле C комплексной плоскости ν (фиг. 2)

$$u^p = -\frac{4k_1}{\pi} \int_C \frac{A(\nu)}{\Delta_\nu} H_\nu^{(1)'}(k_1 r) \frac{\sin \nu\theta}{\sin \nu\lambda} e^{-i\nu\pi/2} d\nu + u_R^p \equiv u_1^p + u_R^p \quad (2.1) \\ u^s = \frac{i}{r} \int_C \nu \left[\frac{\Delta_{\nu 1}}{\Delta_\nu} H_\nu^{(1)}(k_2 r) - J_\nu(k_2 r) \right] \frac{\sin \nu\theta}{\sin \nu\lambda} e^{-i\nu\pi/2} d\nu + u_R^s \equiv u_1^s + u_R^s$$

Здесь u_R^p, u_R^s — вычеты подынтегральных выражений в действительном нуле ν^* уравнения $\Delta_\nu = 0$.

Как будет показано в § 3, $\Delta_\nu = 0$ имеет, кроме ν^* , еще два ряда комплексных нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots$ и $\mu_1, \dots, \mu_k, \dots$, лежащих в первом квадранте. Поэтому интегралы по контуру C можно заменить через интегралы по контуру $ABDEFG$, где $A, B, D \dots$ — точки круга бесконечно большого радиуса, контур EF огибает ряды нулей λ_k и μ_k (фиг. 2). [Легко показать, что подынтегральные функции в (2.1) таковы, что все интегралы по частям бесконечных окружностей стремятся к нулю. И тогда каждый из интегралов по C в (2.1) представится в виде суммы двух интегралов по BD и EF .

Все интегралы по BD обратятся в нуль вследствие нечетности подынтегральных функ-



Фиг. 2

ций. Преобразуем (2.1), используя вронскиан цилиндрических функций

$$u_1^p = -\frac{4k_1}{\pi} \int_E^F \frac{A(\nu)}{\Delta_\nu} H_\nu^{(1)'}(k_1 r) \frac{\sin \nu \vartheta}{\sin \nu \pi} e^{-i\nu\pi/2} d\nu \quad (2.2)$$

$$u_1^s = \frac{i}{r} \int_E^F \nu \left\{ \left[\frac{J_\nu(y)}{H_\nu^{(1)}(y)} H_\nu^{(1)}(k_2 r) - J_\nu(k_2 r) \right] + \frac{4i}{\pi} \frac{B(\nu)}{\Delta_\nu} \frac{H_\nu^{(1)}(k_2 r)}{H_\nu^{(1)}(y)} \right\} \frac{\sin \nu \vartheta}{\sin \nu \pi} e^{-i\nu\pi/2} d\nu$$

$$(B(\nu) = 2x(1 - \nu^2) H_\nu^{(1)'}(x) + y^2 H_\nu^{(1)}(x))$$

Интегралы (2.2) можно вычислять через вычеты в нулях $\Delta_\nu = 0$

$$u_1^p = -8ik_1 \sum_k \frac{A(\nu_k)}{(\partial\Delta_\nu/\partial\nu)_{\nu_k}} H_{\nu_k}^{(1)'}(k_1 r) \frac{\sin \nu_k \vartheta}{\sin \nu_k \pi} \exp \frac{-i\nu_k \pi}{2} \quad (2.3)$$

$$u_1^s = -\frac{8i}{r} \sum_k \nu_k \frac{B(\nu_k)}{(\partial\Delta_\nu/\partial\nu)_{\nu_k}} \frac{H_{\nu_k}^{(1)}(k_2 r)}{H_{\nu_k}^{(1)}(y)} \frac{\sin \nu_k \vartheta}{\sin \nu_k \pi} \exp \frac{-i\nu_k \pi}{2} \quad (2.4)$$

через $\nu_1, \dots, \nu_k, \dots$ для краткости обозначим оба комплексных ряда нулей λ_k и μ_k функции Δ_ν .

Сходимость рядов (2.3) и (2.4) следует из сходимости рядов (1.2). Однако для практического применения рядов (2.3) и (2.4) требуется их быстрая сходимость, начиная с первых членов ряда. Как увидим далее, ряды (2.3) и (2.4) хорошо сходятся и пригодны для применения в ограниченных областях пространства. Чтобы распространить решение на остальные области, преобразуем интегралы (2.2), пользуясь соотношениями

$$\frac{\sin \nu \vartheta}{\sin \nu \pi} = -\frac{\sin \nu (\pi - \vartheta)}{\sin \nu \pi} e^{i\nu\pi} + e^{i\nu(\pi - \vartheta)}, \quad \frac{\cos \nu \vartheta}{\sin \nu \pi} = \frac{\cos \nu (\pi - \vartheta)}{\sin \nu \pi} e^{i\nu\pi} - i e^{i\nu(\pi - \vartheta)} \quad (2.5)$$

Тогда каждое из смещений (2.2) будет состоять из суммы двух интегралов по EF . Первые интегралы, как и ранее, вычисляются через вычеты в нулях Δ_ν , вторые — могут быть вычислены методом перевала и при этом появятся добавки u_{1R}^p, u_{1R}^s , являющиеся вычетами подынтегральных функций в нуле $\nu = \nu^*$. Таким образом,

$$u^p = 8ik_1 \sum_k \frac{A(\nu_k)}{(\partial\Delta_\nu/\partial\nu)_{\nu_k}} H_{\nu_k}^{(1)'}(k_1 r) \frac{\sin \nu_k (\pi - \vartheta)}{\sin \nu_k \pi} \exp \frac{i\nu_k \pi}{2} + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{4k_1}{\pi} \int \frac{A(\nu)}{\Delta_\nu} H_\nu^{(1)'}(k_1 r) e^{i\nu(1/2\pi - \vartheta)} d\nu + u_R^p + u_{1R} \equiv u_2^p + U^p + u_{2R}^p$$

$$u^s = \frac{8i}{r} \sum_k \nu_k \frac{B(\nu_k)}{(\partial\Delta_\nu/\partial\nu)_{\nu_k}} \frac{H_{\nu_k}^{(1)}(k_2 r)}{H_{\nu_k}^{(1)}(y)} \frac{\sin \nu_k (\pi - \vartheta)}{\sin \nu_k \pi} \exp \frac{i\nu_k \pi}{2} + \quad (2.7)$$

$$- \frac{i}{r} \int \nu \left[\frac{H_\nu^{(2)}(y)}{2} + \frac{4i}{\pi} \frac{B(\nu)}{\Delta_\nu} \right] \frac{H_\nu^{(1)}(k_2 r)}{H_\nu^{(1)}(y)} e^{i\nu(1/2\pi - \vartheta)} d\nu +$$

$$+ u_R^s + u_{1R}^s \equiv u_2^s + U^s + u_0 + u_{2R}^s$$

В выражениях (2.6) и (2.7) ряды u_2^p и u_2^s по ν_k быстро сходятся везде, а через U^p и $U^s + u_0$ обозначены интегралы по соответствующему перевальному контуру.

§ 3. Корни уравнения $\Delta_\nu = 0$ при $k_1 a \gg 1$ и $k_2 a \gg 1$. Поверхностные волны. Все проведенные до сих пор рассуждения были точными. Далее будем изучать коротковолновую асимптотику упругих смещений $k_1 a \gg 1$, $k_2 a \gg 1$, поэтому заменим входящие в решение цилиндрические функции их асимптотическим представлением.

В областях комплексной плоскости ν , где

$$|\nu^2 - x^2| \gg Ax^{4/3}, \quad |\nu^2 - y^2| \gg Ay^{4/3}, \quad A \sim 2.5 \quad (3.1)$$

(будем называть эти области дебаевскими), верна для цилиндрических функций аргументов x и y асимптотика Дебая [13, 14].

Для областей, где неравенства (3.1) не выполняются, назовем их фоковскими областями, следует использовать для цилиндрических функций более сложную асимптотику Ханкеля — Фока [6]

$$H_\nu^{(1)}(\rho) = \frac{-i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} w(t), \quad J_\nu(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} v(t) \\ H_\nu^{(2)}(\rho) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} w(e^{3/2\pi i} t), \quad t = (\nu - \rho) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-1/3} \quad (3.2)$$

Здесь $w(t) = u(t) + iv(t)$ — функции Эйри [6].

При $x \gg 1$ и $y \gg 1$ корни уравнения $\Delta_\nu = 0$ имеют порядок этих величин. Поэтому, отбросив члены высших порядков, получим

$$\Delta_\nu \approx -(2\nu^2 - y^2)^2 H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(1)}(y) \mp 4xy\nu^2 H_\nu^{(1)'}(x) H_\nu^{(1)'}(y) = 0 \quad (3.3)$$

Вне фоковских областей вблизи действительной оси это уравнение принимает вид

$$\Delta_\nu \approx H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(1)}(y) [- (2\nu^2 - y^2)^2 \mp 4\nu^2 \sqrt{\nu^2 - x^2} \sqrt{\nu^2 - y^2}] = 0$$

Выражение в квадратных скобках есть уравнение Релея, которое имеет действительный положительный корень $\nu^x = \kappa y$, где $\kappa > 1$, и зависит от $\varepsilon = x/y < 1$. Другие нули уравнения (3.3) λ_k и μ_k располагаются в первом квадранте вблизи линий нулей функций $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(1)}(y)$, проходящих соответственно через точки $\nu = x$ и $\nu = y$. В фоковской области функции $H_\nu^{(1)}(x)$ справедливо

$$|\nu^2 - x^2| \sim Ax^{4/3} \text{ или } |t| = (1/2x)^{1/3} |\nu - x| \sim 1$$

Поэтому

$$\Delta_\nu \approx -4x^3y \sqrt{1 - \varepsilon^2} \pi^{-1/2} (1/2x)^{-2/3} [w'(t) - q_1 w(t)] H_\nu^{(1)}(y) = 0 \quad (3.4) \\ (q_1 = i(2\varepsilon^2 - 1)^2 4^{-1} \varepsilon^{-3} (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} (1/2x)^{1/3})$$

При $q_1 = 0$ корни (3.4) совпадают с t_k' — нулями $w'(t)$, а при $q_1 = \infty$ — с t_k^0 — нулями $w(t)$. Уравнения типа (3.4) подробно изучены в [6, 7], там же приведены ряды для вычислений t_k — корней уравнения (3.4) при $|q_1 / \sqrt{t_k}| > 1$ и $|q_1 / \sqrt{t_k}| < 1$. Для $|q_1 / \sqrt{t_k}| \sim 1$ следует воспользоваться уравнением $dt/dq_1 = 1/(t - q_1^2)$, которое — следствие (3.4) и определения функции Эйри $w(t)$, и численно решать его при начальных условиях $t_k = t_k'$ при $q_1 = 0$ или $t_k = t_k^0$ при $q_1 = \infty$. Корни уравнения (3.4) располагаются в первом квадранте вблизи прямой $\arg t = 1/3\pi$.

В фоковской области функции $H_\nu^{(1)}(y)$

$$\Delta_\nu = -4iy^4 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \pi^{-1/2} (1/2y)^{-2/3} [w'(\tau) - q_2 w(\tau)] H_\nu^{(1)}(x) = 0 \quad (3.5) \\ q_2 = 4^{-1} (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} (1/2y)^{1/3}, \quad \tau = (\nu - y) (1/2y)^{-1/3}$$

Корни τ_k уравнения (3.5) лежат вблизи прямой $\arg \tau = 1/3\pi$ в первом квадранте.

Пользуясь вышеприведенной асимптотикой, дадим интерпретацию слагаемым со значком R в (2.1). Математически они вычисляются как вычеты подынтегральных функций в полюсе $\nu^x = \kappa y$. На поверхности цилиндра выражения для этих смеще-

ний с точностью до y^{-1} порядка принимают вид

$$(u_R^p)_a = 2 \sqrt{2\pi y k_2 \kappa^2} (2\kappa^2 - 1)^3 \Lambda^2(\varepsilon, a) \Lambda(1, a) \Delta_0^{-1} e^{y\Theta} \sin \kappa y \vartheta$$

$$(u_R^s)_a = -4 \sqrt{2\pi y k_2 \kappa^4} (2\kappa^2 - 1)^2 \Lambda^2(\varepsilon, a) \Lambda(1, a) \Delta_0^{-1} e^{y\Theta} \sin \kappa y \vartheta$$

$$(v_R^p)_a = -2 \sqrt{2\pi y k_2 \kappa^3} (2\kappa^2 - 1)^3 \Lambda(1, a) \Delta_0^{-1} e^{y\Theta} \cos \kappa y \vartheta$$

$$(v_R^s)_a = \sqrt{2\pi y k_2 \kappa} (2\kappa^2 - 1)^4 \Lambda(1, a) \Delta_0^{-1} e^{y\Theta} \cos \kappa y \vartheta$$

$$\Delta_0 = [8\kappa^6 (\varepsilon^2 - 1) + 4\kappa^2 - 1] \sin \kappa y \vartheta$$

$$\Lambda(\varepsilon, r) = \sqrt[4]{\kappa^2 a^2 / r^2 - \varepsilon^2}, \quad \Theta = \sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa |\arccos \kappa| - 1/2 i \kappa \pi$$

А вблизи поверхности цилиндра

$$u_R^p \approx (u_R^p)_a (a/r)^{1/2} \Lambda(\varepsilon, r) \Lambda^{-1}(\varepsilon, a) \exp[-(r-a) k_2 \Lambda^2(\varepsilon, a)]$$

$$v_R^p \approx (v_R^p)_a (a/r)^{3/2} \Lambda(\varepsilon, a) \Lambda^{-1}(\varepsilon, r) \exp[-(r-a) k_2 \Lambda^2(\varepsilon, a)]$$

$$u_R^s \approx (u_R^s)_a (a/r)^{1/2} \Lambda(1, a) \Lambda^{-1}(1, r) \exp[-(r-a) k_2 \Lambda^2(\varepsilon, 1)]$$

$$v_R^s \approx (v_R^s)_a (a/r)^{1/2} \Lambda(1, r) \Lambda^{-1}(1, a) \exp[-(r-a) k_2 \Lambda^2(\varepsilon, 1)]$$

Таким образом, смещения со значком R распространяются по поверхности цилиндра со скоростью $\pm b/\kappa$ и экспоненциально затухают с увеличением расстояния от него, т. е. они соответствуют смещениям в поверхностной волне Релея.

§ 4. Геометрическая часть поля смещений. Изучим физический смысл тех составляющих смещений, которые в (2.6) и (2.7) выражаются интегралами по перевальным контурам. В области, где выполняются (3.1), $k_1 r - x \gg x^{1/3}$ и $k_2 r - y \gg y^{1/3}$ применим для цилиндрических функций асимптотику Дебая. Заметим, что перевальный путь для первого слагаемого в интеграле (2.7) надо проводить через две седловые точки v_0 и v_{00} ($v_0 < y < v_{00}$) и через первый нуль функции $H_\nu^{(2)}(y)$.

$$U^p = \frac{2\sqrt{2}}{r\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} \int \frac{v(2v^2 - y^2) [(k_1^2 r^2 - v^2)(x^2 - v^2)(y^2 - v^2)]^{1/4}}{\Delta^+(v)} e^{i\Phi_1} dv \quad (4.1)$$

$$U^s \mp u_0 = \frac{e^{3i\pi/4}}{r\sqrt{2\pi}} \int \frac{\Delta^-(v)}{\Delta^+(v) \sqrt[4]{k_2^2 r^2 - v^2}} e^{i\Phi_2} dv - \frac{e^{3i\pi/4}}{r\sqrt{2\pi}} \int \frac{v}{\sqrt[4]{k_2^2 r^2 - v^2}} e^{i\Phi_3} dv \quad (4.2)$$

$$\Phi_1(v) = \sqrt{k_1^2 r^2 - v^2} - \sqrt{x^2 - v^2} - \sqrt{y^2 - v^2} - \quad (4.3)$$

$$-v \left(\arccos \frac{v}{k_1 r} - \arccos \frac{v}{x} - \arccos \frac{v}{y} - 1/2\pi \mp \vartheta \right)$$

$$\Phi_2(v) = \sqrt{k_2^2 r^2 - v^2} - 2\sqrt{y^2 - v^2} - v \left(\arccos \frac{v}{k_2 r} - 2\arccos \frac{v}{y} - 1/2\pi \mp \vartheta \right)$$

$$\Phi_3(v) = \sqrt{k_2^2 r^2 - v^2} - v \left(\arccos v/k_2 r - 1/2\pi \mp \vartheta \right)$$

$$\Delta^\pm(v) = 4v^2 \sqrt{x^2 - v^2} \sqrt{y^2 - v^2} \pm (2v^2 - y^2)^2$$

В (4.2) первый интеграл берется по контуру, проходящему через левую седловую точку v_0 , а второй — через правую v_{00} , и дает поле смещений в падающей волне u_0 .

Седловая точка v^0 для интегралов (4.1), согласно (4.3), определится уравнением

$$\Phi_1'(v^0) = -\arccos(v^0/k_1 r) \mp \arccos(v^0/x) \mp \arccos(v^0/y) \mp 1/2\pi - \vartheta = 0 \quad (4.4)$$

Положим $v^0/y = \sin \alpha_1$, $v^0/x = \sin \beta_1$, $v^0/k_1 r = \sin \delta_1$, уравнение (4.4) будет удовлетворено, если $\delta_1 = \alpha_1 + \beta_1 \mp \vartheta - \pi$.

Геометрический смысл углов указан на фиг. 3. Метод седловой точки для (4.1) применим, пока $|v^{02} - x^2| \gg Ax^{1/3}$ и $\cos \beta_1 \gg x^{-1/3}$. Точка $v^0 = x$ соответствует в физическом пространстве углам $\beta_1 = 1/2\pi$ и $\alpha = \alpha^x$ (α^x — угол полного внутреннего отражения). Таким образом, седловая аппроксимация для вычисления продольных смещений перестает быть справедливой вблизи границы тени для продольных волн (фиг. 4)

$$r_1 = a / \cos(\vartheta^x - \vartheta) \quad (\vartheta^x = \pi - \alpha^x) \quad (4.5)$$

Точка перевала v_0 для (4.2) определится условием

$$\Phi_2'(v_0) = -\arccos(v_0/k_1r) + 2\arccos(v_0/y) + 1/2\pi - \vartheta = 0 \quad (4.6)$$

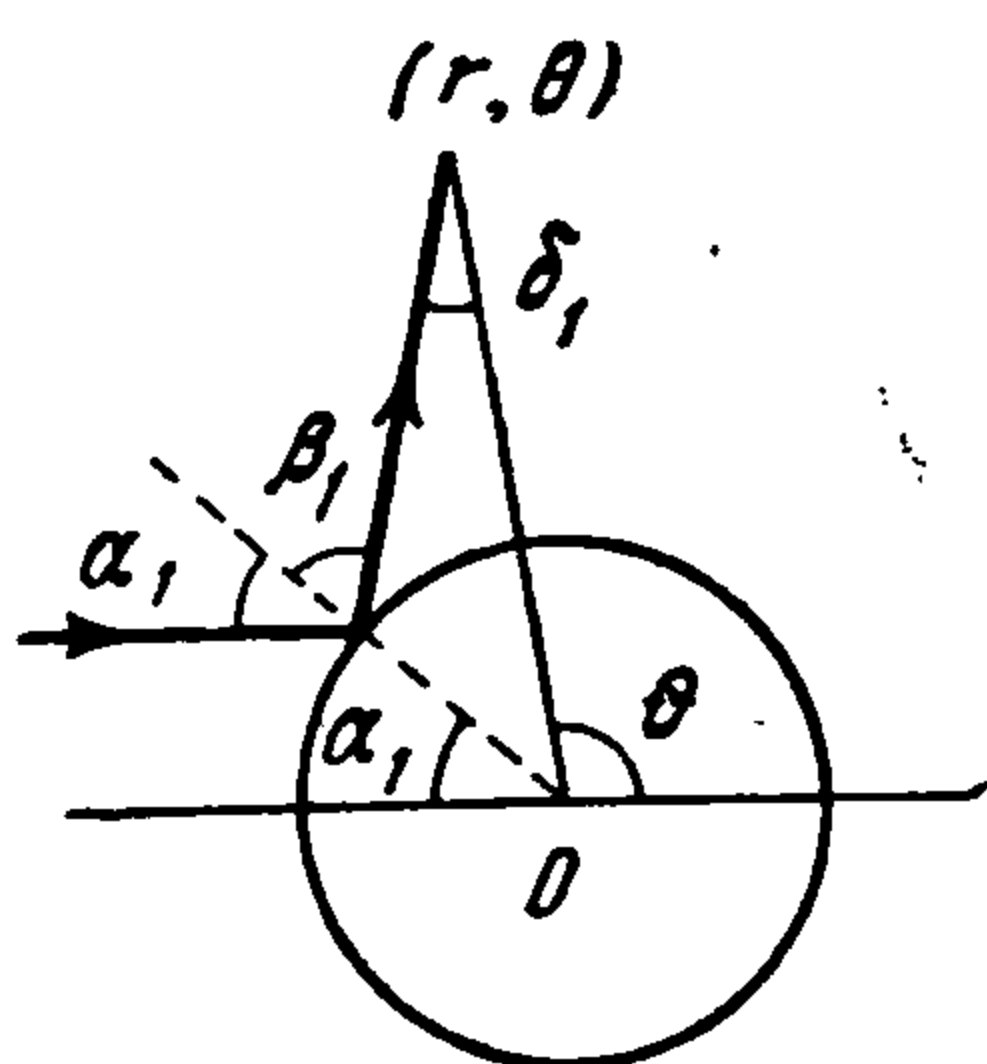
Положим (фиг. 5) $v_0/y = \sin \alpha_2$ и $v_0/k_1r = \sin \delta_2$. Тогда (4.6) удовлетворится, если $\delta_2 = 2\alpha_2 + \vartheta - \pi$. Формально метод седловой точки для интегралов (4.2) можно применять, пока $|v_0^2 - y^2| \gg Ay^{4/3}$ и $\cos \alpha_2 \gg y^{-1/3}$, т. е. вдали от границы тени для поперечных смещений

$$r_2 = a / \cos(1/2\pi - \vartheta) \quad (4.7)$$

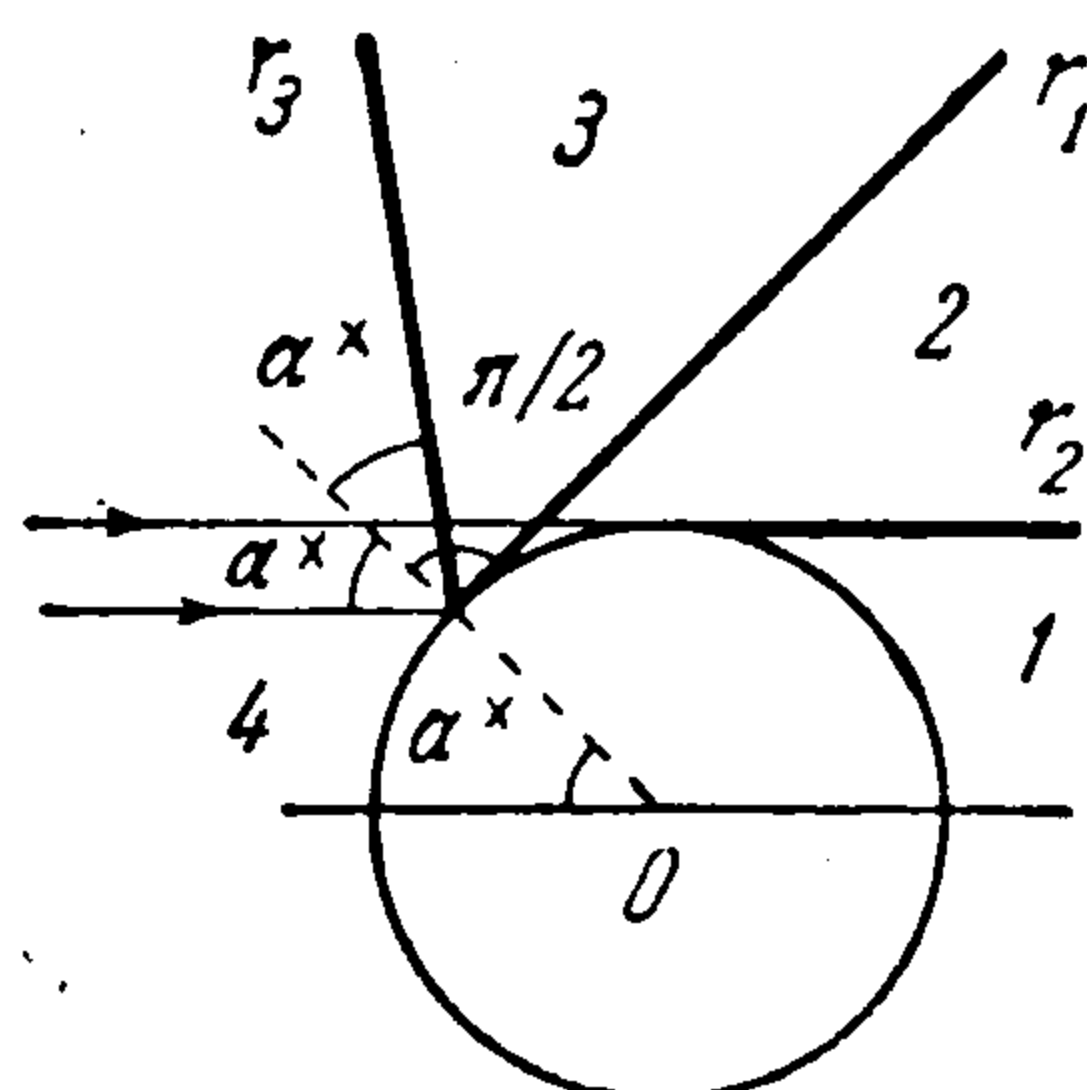
Из области применимости метода следует также исключить окрестность точки $v_0 = x$, которая в физическом пространстве соответствует области вблизи прямой

$$r_3 = a\varepsilon / \cos(2\alpha^x + \vartheta + 1/2\pi) \quad (4.8)$$

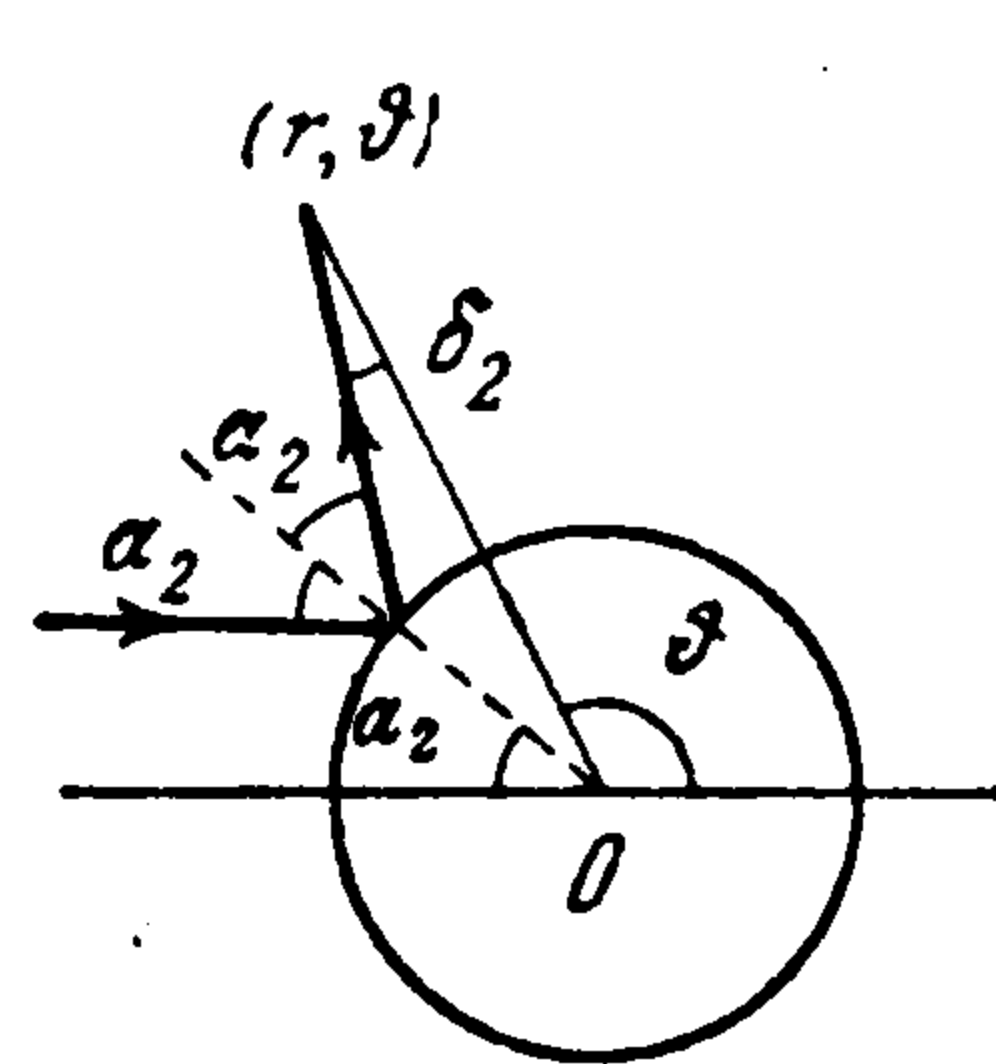
Кроме того, нужно учесть, что при преобразовании контура EF в путь наименьшего спуска в (2.7) при $v_0 > x$ между ними будут находиться некоторые полюса



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

подынтегральной функции. Получим поле смещений в геометрически отраженных волнах

$$U^p = -\frac{4ik_2a \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 (2 \sin^2 \alpha_1 - 1) \Omega(\varepsilon, a, \alpha_1) \Omega(\varepsilon, r, \alpha_1)}{r D^+(\alpha_1) W(\varepsilon, \alpha_1)} \times e^{ik_2a [\Omega(\varepsilon, r, \alpha_1) - \Omega(\varepsilon, a, \alpha_1) - \cos \alpha_1]} \quad (4.9)$$

$$V^p = \frac{4ik_2a \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 (2 \sin^2 \alpha_1 - 1) \Omega(\varepsilon, a, \alpha_1)}{r D^+(\alpha_1) W(\varepsilon, \alpha_1)} \times e^{ik_2a [\Omega(\varepsilon, r, \alpha_1) - \Omega(\varepsilon, a, \alpha_1) - \cos \alpha_1]}$$

$$U^s = \frac{ik_2a \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 D^-(\alpha_2)}{r D^+(\alpha_2) W(1, \alpha_2)} e^{ik_2a [\Omega(1, r, \alpha_2) - 2 \cos \alpha_2]} \quad (4.10)$$

$$V^s = -\frac{ik_2a \cos \alpha_2 \Omega(1, r, \alpha_2) D^-(\alpha_2)}{r D^+(\alpha_2) W(1, \alpha_2)} e^{ik_2a [\Omega(1, r, \alpha_2) - 2 \cos \alpha_2]}$$

Здесь

$$D^\pm(\alpha) = \Delta^\pm(y \sin \alpha) y^{-4}, \quad \Omega(\varepsilon, r, \alpha) = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 / a^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$W(\varepsilon, \alpha) = \sqrt{\Omega(\varepsilon, r, \alpha) [\Omega(\varepsilon, a, \alpha) + \cos \alpha] - \cos \alpha \Omega(\varepsilon, a, \alpha)}$$

§ 5. Дифракционные составляющие смещений. Каждое из смещений в (2.3) и (2.4) представляется фактически суммой двух рядов вычетов в полюсах λ_k и μ_k . Для практического применения этих рядов их сходимость должна быть настолько быстрой, чтобы было достаточно взять один или несколько первых членов ряда. Так как при вычислении начальных членов ряда вычетов ближайшие к x или y полюсы лежат в фоковских областях функций $H_v^{(1)}(x)$ или $H_v^{(1)}(y)$, то необходимо для этих функций исполь-

зовать асимптотику Ханкеля — Фока. Тогда вместо (2.3) получим

$$\begin{aligned} u_1^p &= -L \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r - 1/2 \pi)] \sin \lambda_k \vartheta}{w(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\sin \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi} \\ v_1^p &\equiv iL \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r - 1/2 \pi)] \cos \lambda_k \vartheta}{w(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\cos \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$L \equiv L(\varepsilon, k_1, k_2, a, r) =$$

$$= k_2 (2\varepsilon^2 - 1) \pi^{1/2} \varepsilon^{-1/2} (1 - \varepsilon^2)^{-1/4} \exp [i(k_1 \sqrt{r^2 - a^2} - k_2 a \sqrt{1 - \varepsilon^2})] \\ \lambda_k = x + (1/2 x)^{1/3} t_k$$

Здесь t_k — корни уравнения (3.4). Вблизи прямой $\arccos t = 1/3 \pi$ справедлива асимптотическая формула [6]

$$w(t_k) \approx \frac{2e^{1/4 i\pi} (-1)^{k-1}}{\sqrt[4]{t_k} \sqrt{1 - q_1^2/t_k^2}} \quad (5.2)$$

Поэтому быстрая сходимость рядов (5.1) определится множителем

$$\exp i F_1 = \exp [i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos (a/r) - \vartheta + 1/2 \pi)]$$

и так как λ_k имеют положительную мнимую часть, то это условие

$$\operatorname{Im} F_1 > 0, \text{ или } z_1 = \arccos \varepsilon - \arccos (a/r) - \vartheta + 1/2 \pi > 0 \quad (5.3)$$

будет выполняться в области правее линии (4.5) на фиг. 4. Ряды по μ_k в (2.3) дают чисто поверхностные возмущения. Аналогичным образом получим, что быстрая сходимость рядов по λ_k в (2.4) будет везде, где

$$z_2 = 2 \arccos \varepsilon - \arccos (\varepsilon a/r) - \vartheta + 1/2 \pi > 0 \quad (5.4)$$

т. е. на фиг. 4 в области правее линии (4.8), а сами ряды для поперечных смещений имеют следующую асимптотику: (5.5)

$$\begin{aligned} u_{11}^s &= iM \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (2 \arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r - 1/2 \pi)] \sin \lambda_k \vartheta}{t_k - q_1^2} \frac{\sin \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi} \\ v_{11}^s &= -M \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (2 \arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r - 1/2 \pi)] \cos \lambda_k \vartheta}{t_k - q_1^2} \frac{\cos \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi} \end{aligned}$$

$$M \equiv M(\varepsilon, k_1, k_2, a, r) = k_1 8^{-1/2} \varepsilon^{-2} (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} (2\varepsilon^2 - 1)^2 (\pi k_2 a)^{1/2} \times \\ \times (2/k_1 a)^{1/3} \exp [ik_2 (\sqrt{r^2 - a^2} \varepsilon^2 - 2a \sqrt{1 - \varepsilon^2}) + 1/4 i\pi]$$

Быстрая сходимость рядов по μ_k в (2.4) определяется условием

$$z_3 = -\arccos (a/r) - \vartheta + 1/2 \pi > 0, \text{ или } r < a / \cos (1/2 \pi - \vartheta) \quad (5.6)$$

Это область геометрической тени I на фиг. 4.

Асимптотика рядов (2.4) по μ_k следующая: (5.7)

$$\begin{aligned} u_{12}^s &= iN(k_2, r, a) \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [-i\mu_k (\arccos a/r + 1/2 \pi)] \sin \mu_k \vartheta}{w^2(\tau_k)(\tau_k - q_2^2)} \frac{\sin \mu_k \vartheta}{\sin \mu_k \pi} \\ v_{12}^s &= -N(k_2, r, a) \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [-i\mu_k (\arccos a/r + 1/2 \pi)] \cos \mu_k \vartheta}{w^2(\tau_k)(\tau_k - q_2^2)} \frac{\cos \mu_k \vartheta}{\sin \mu_k \pi} \end{aligned}$$

$$N(k, r, a) = (8\pi k)^{1/2} a^{-1/2} (1/2 ka)^{1/3} \exp [i(k \sqrt{r^2 - a^2} - 1/4 \pi)]$$

Здесь τ_k — корни уравнения (3.5), $\mu_k = y + (1/2 y)^{1/2} \tau_k$.

Ряды (5.5) и (5.7) показывают, что падение поперечной волны на тело вызывает два типа поперечных волн дифракции, физический смысл которых станет ясным из § 8.

Каждый из рядов (5.1), (5.5) и (5.7) имеет свою область сходимости (фиг. 4), определяемую одним из неравенств (5.3), (5.4) и (5.6). Вне этих областей сходимости решение для смещений надо брать в форме (2.6) и (2.7). Асимптотика первых слагаемых u_2^p и u_2^s в (2.6) и (2.7) приводит к рядам, аналогичным (5.1), (5.5) и (5.7), которые, однако, хорошо сходятся везде

$$u_2^p = L \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r + 1/2 \pi)] \sin \lambda_k (\pi - \vartheta)}{w(t_k) (t_k - q_1^2) \sin \lambda_k \pi}$$

$$u_2^p = iL \left(\frac{a}{r} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (\arccos \varepsilon - \arccos a/r + 1/2 \pi)] \cos \lambda_k (\pi - \vartheta)}{w(t_k) (t_k - q_1^2) \sin \lambda_k \pi}$$

$$u_{21}^s = -iM \left(\frac{a}{r} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (2 \arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r + 1/2 \pi)]}{t_k - q_1^2} \times$$

$$\times \frac{\sin \lambda_k (\pi - \vartheta)}{\sin \lambda_k \pi} \quad (5.9)$$

$$u_{21}^s = -M \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [i\lambda_k (2 \arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r + 1/2 \pi)]}{t_k - q_1^2} \times$$

$$\times \frac{\cos \lambda_k (\pi - \vartheta)}{\sin \lambda_k \pi}$$

$$u_{22}^s = -iN(k_2, r, a) \left(\frac{a}{r} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp [-i\mu_k (\arccos a/r - 1/2 \pi)]}{w^2(\tau_k) (\tau_k - q_2^2)} \times$$

$$\times \frac{\sin \mu_k (\pi - \vartheta)}{\sin \mu_k \pi} \quad (5.10)$$

$$u_{22}^s = -N(k_2, r, a) \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp [-i\mu_k (\arccos a/r - 1/2 \pi)]}{w^2(\tau_k) (\tau_k - q_2^2)} \times$$

$$\times \frac{\cos \mu_k (\pi - \vartheta)}{\sin \mu_k \pi}$$

Ряды (5.1), (5.5), (5.7) — (5.10) представляют дифракционные составляющие смещений в продольных и поперечных волнах. Таким образом, поле продольных смещений представляется в областях 1 и 2 (фиг. 4) рядами (5.1) и в областях 3, 4 — суммой геометрических членов (4.9) и рядов (5.8). Поперечные составляющие смещений представляются рядами (5.5) и (5.7), однако вследствие того, что их области хорошей сходимости различны, суммарное решение может быть практически использовано лишь в области 1 — области их общей сходимости. Вне 1 области надо воспользоваться решениями в виде суммы рядов (5.9) и (5.10) и интегралов (4.2). Интегралы (4.2) дают геометрическую часть поля поперечных смещений (4.10), пока $v_0 < x$, это соответствует в физическом пространстве области 4 (фиг. 4). Когда $v_0 > x$, между путем наимыбстрейшего спус-

ка и EF будут находиться ближайšie к точке x нули λ_k функции $\Delta_\nu = 0$ (фиг. 6). Поэтому интегралы (4.2) дадут два слагаемых: геометрическую часть плюс сумма вычетов подынтегральной функции в нулях λ_k . Эта последняя сумма вместе с рядом (5.9) даст ряд (5.5), который хорошо сходится везде вне области 4. Таким образом, в областях 2 и 3 поле поперечных смещений будет состоять из начального поля, отраженного и дифракционного, представленного рядами (5.5) и (5.10).

Суммируя все изложенное и опуская составляющие поверхностных смещений, полное поле смещений в каждой области можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{Область 1} \quad u &= u_1^p + u_{11}^s + u_{12}^s, & v &= v_1^p + v_{11}^s + v_{12}^s \\ \text{Область 2} \quad u &= u_1^p + u_{11}^s + u_{22}^s + U^s, & v &= v_1^p + v_{11}^s + v_{22}^s + V^s \\ \text{Область 3} \quad u &= u_2^p + U^p + u_{11}^s + u_{22}^s + U^s \\ & v &= v_2^p + V^p + v_{11}^s + v_{22}^s + V^s \\ \text{Область 4} \quad u &= u_2^p + U^p + u_{21}^s + u_{22}^s + U^s \\ & v &= v_2^p + V^p + v_{21}^s + v_{22}^s + V^s \end{aligned}$$

§ 6. Анализ смещений в переходных областях. Формулы для продольных составляющих поля смещений (4.9) и (5.1) перестают быть справедливыми в области ω_1 вблизи прямой (4.5), а для поперечных составляющих (4.10), (5.5) и (5.7) в областях ω_2 и ω_3 — вблизи прямых (4.7) и (4.8) (фиг. 4). В физическом пространстве ω_1 соответствует области полутени для продольных составляющих смещений, ω_3 — области полутени для поперечных составляющих и ω_2 — переходной области вблизи угла полного внутреннего отражения. В плоскости ν эти области соответствуют фокусским областям для цилиндрических функций. Покажем, как вычислять поле смещений в этих областях.

В области ω_1 продольные смещения следует брать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых — ряды (5.8), быстро сходящиеся всюду, другое — интеграл по EF в (2.6), для вычисления которого используем асимптотику Ханкеля — Фока (3.2) для $H_\nu^{(1)}(x)$. Тогда

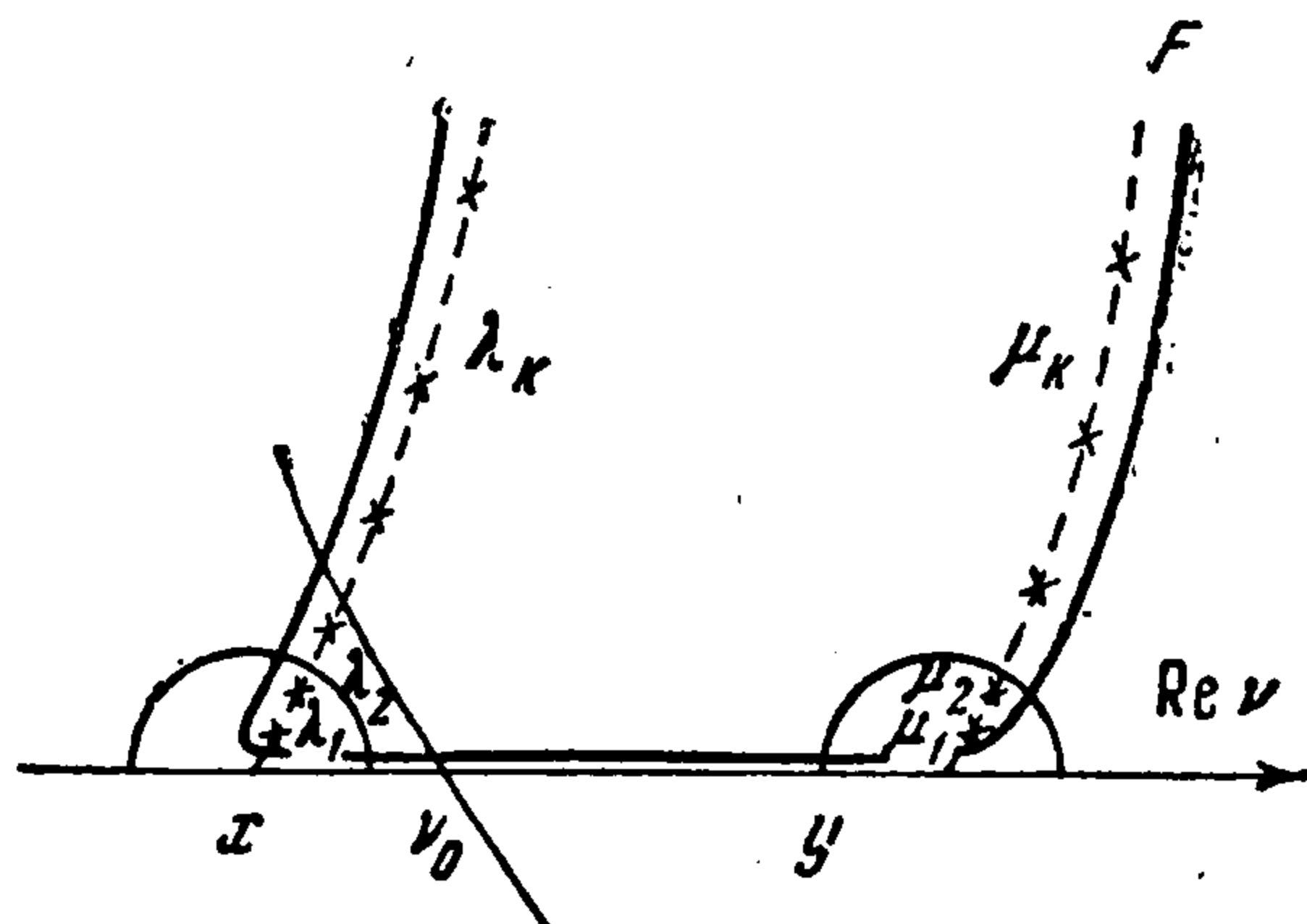
$$U^p = \frac{ik_1}{2\varepsilon \sqrt{\pi\varepsilon}} \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \int_E^F \frac{2\varepsilon^2 p^2(t) - 1}{p(t)} \frac{V(t, r, 1)}{V(t, a, \varepsilon)} \frac{\exp(i\psi_1) dt}{w'(t) - q(t)w(t)} \quad (6.1)$$

Здесь $\nu = x \mp (1/2x)^{1/3}t \equiv xp(t)$

$$V(t, r, \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2 p(t)}{r^2}\right)^{1/4}, \quad q(t) = i \frac{[2\varepsilon^2 p^2(t) - 1]^2 (1/2x)^{1/3}}{4\varepsilon^3 p^2(t) \sqrt{1 - \varepsilon^2 p^2(t)}}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= xp(t) [1/2\pi - \vartheta - \arccos(ap(t)/r) \mp \arccos \varepsilon p(t)] \mp \\ &\mp k_1 r V^2(t, r, 1) - y V^2(t, a, \varepsilon) \end{aligned}$$

Величина z_1 , определяемая (5.3), вблизи границы тени равна $\sim \cos \beta_1$. Поэтому в области ω_1 справедливо $|z_1| \sim x^{-1/3}$, в области света для продольных смещений 3, 4 (фиг. 4) $z_1 x^{1/3} \ll -1$ и в области глубокой тени 1, 2 (фиг. 4) $z_1 x^{1/3} \gg 1$. В области полутени, где $|z_1| x^{1/3} \sim 1$, интегралы (6.1) следует вычислять методом квадратур. При этом удобно преобразовать контур интегрирования в ломаный контур Γ , ко-



Фиг. 6

торый идет от $\infty \exp(2\pi i/3)$ до 0 по прямой $\arg t = 2/3\pi$ и от 0 до ∞ по вещественной оси, и воспользоваться представлением функции w на комплексном луче $\arg t = 2/3\pi$ [6].

Преобразованные интегралы вычисляются по таблицам функций $u(t)$ и $v(t)$ и их производных, приведенным в [6]. Когда $z_1 x^{1/3} \ll -1$, главный участок интегрирования в интегралах (6.1) после надлежащей деформации контура будет лежать вблизи больших отрицательных значений t . При этих t применима для функций Эйри асимптотическая формула [6]

$$w(t) = (-t)^{-1/4} \exp[2/3i(-t)^{3/2} + 1/4\pi i]$$

Подставляя это значение в (6.1), вычислим интегралы методом стационарной фазы и получим при углах падения близких к α^* , результат, совпадающий с формулами для геометрических составляющих смещений.

Когда $z_1 x^{1/3} \gg 1$, интегралы (6.1) можно вычислять через вычеты подынтегральных функций в нулях (3.4); получим ряды, которые хорошо сходятся в области тени и в сумме с рядами (5.8) дают ряды, совпадающие с полученным ранее решением (5.1) в области тени. Таким образом, решение в области полутени как бы сшивает решения для света и тени.

Формулы для составляющих поперечных смещений перестают быть верными в областях ω_2 и ω_3 . Для области ω_2 возьмем решение в виде (2.7), причем ряды по v_k заменим их асимптотическим представлением — рядами (5.9) и (5.10), при вычислении второго интеграла по EF следует воспользоваться асимптотикой Ханкеля — Фока для $H_\nu^{(1)}(x)$. Тогда

$$U^s = - \frac{i}{2r} \int_E^F v \frac{H_\nu^{(2)}(y)}{H_\nu^{(1)}(y)} H_\nu^{(1)}(k_2 r) e^{i\nu(1/2\pi - \theta)} dv - \\ - ik_1 \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 a}} e^{i\pi/4} \int_E^F \frac{p(t) w'(t) \exp(i\psi_2) dt}{V(t, r, \varepsilon) [w'(t) - q(t)w(t)]} \quad (6.2)$$

Здесь

$$\psi_2 = k_2 r V^2(t, r, \varepsilon) - 2y V^2(t, a, \varepsilon) + xp(t) [1/2\pi - \theta - \\ - \arccos \varepsilon p(t)/r + 2\arccos \varepsilon p(t)]$$

В переходной области вблизи угла полного внутреннего отражения $|z_2| \sim y^{-2/3}$ и второй интеграл в (6.2) следует опять вычислять методом квадратур, преобразовав контур интегрирования в контур Γ .

В области 4 (фиг. 4) $z_2 y^{2/3} \ll -1$, и главный участок интегрирования в интеграле (6.2) в методе стационарной фазы будет лежать вблизи больших отрицательных значений t . Тогда интегралы (6.2) дадут решение, совпадающее на некотором участке области 4 с полученным решением (4.10). Для области $z_2 y^{2/3} \gg 1$ и $x < x \mp (1/2x)^{1/3} t < y$ значение t будет велико и положительно. Поэтому для $w(t)$ следует использовать асимптотическое выражение [6]

$$u(t) = t^{-1/4} \exp(2/3t^{3/2}), \quad v(t) = 1/2 t^{-1/4} \exp(-2/3t^{3/2})$$

Кроме того, следует учесть, что между линией наискорейшего спуска и контуром интегрирования будут лежать полюсы подынтегральной функции (6.2). Тогда на некотором интервале интегрирования $t > 0$, лежащем вне фоковской области $v \sim x$, u^s в (6.2) будет состоять из двух частей: первая, вычисленная как интеграл вблизи седловой точки, совпадет с геометрическими составляющими поперечных смещений; вторая — ряд по вычетам в t_k , который в сумме с рядом (5.9) дает ряд (5.5) для u_{11}^s , который хорошо сходится при $z_2 x^{1/3} \gg 1$. Таким образом, формулы (6.2) сшивают решения в областях 3 и 4.

В области ω_3 опять возьмем решение в виде (2.7), заменим ряды по v_k их асимптотическим представлением (5.9) и (5.10), а при вычислении интеграла по EF используем асимптотику Ханкеля — Фока для $H_\nu^{(1)}(y)$. При преобразовании контура EF плоскости v в соответствующий контур Γ в плоскости t заметим, что между ними

лежат полюса $x \pm (1/2x)^{1/2}t_k$ подынтегрального выражения, поэтому интеграл по EF заменится интегралом по Γ в плоскости τ плюс ряд по вычетам подынтегрального выражения в $x \pm (1/2x)^{1/2}t_k$. Последний ряд в сумме с (5.9) опять дает ряд (5.5). Таким образом, в области ω_3 решение представляется рядами (5.5) и (5.10) и интегралами по контуру Γ в плоскости τ . Эти интегралы, так же как и (6.1), следует вычислять методом квадратур. Нетрудно показать, что при $z_3y^{1/3} \ll -1$, т. е. в области света для поперечных составляющих, интегралы дают геометрическое поле смещений, совпадающее на некотором интервале с (4.10).

Для $z_3y^{1/3} \gg 1$, т. е. в области глубокой тени, интегралы вычисляются через вычеты подынтегральных функций и дают ряд, который в сумме с (5.10) совпадает с рядом (5.7). Таким образом, решения в областях ω_1 , ω_2 и ω_3 сшиваются решения, полученные ранее в § 4 и 5.

§ 7. Дифракция продольной волны. Можно рассмотреть в той же постановке, что и в § 1, падение на цилиндр продольной упругой волны с потенциалом $\varphi_0 = \exp(ik_1r \cos \vartheta - i\omega t)$. Полное решение этой задачи на поверхности цилиндра дано в [15], здесь приведем формулы для смещений в волнах дифракции, поскольку они будут нам необходимы в § 8

$$u_3^p = N(k_1, r, a) \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp[-i\lambda_k(\arccos a/r + 1/2\pi)] \cos \lambda_k \vartheta}{w^2(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\cos \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi} \quad (7.1)$$

$$v_3^p = iN(k_1, r, a) \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp[-i\lambda_k(\arccos a/r + 1/2\pi)] \sin \lambda_k \vartheta}{w^2(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\sin \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi}$$

и для поперечных составляющих (7.2)

$$u_3^s = -iP \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k(\arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r - 1/2\pi)] \cos \lambda_k \vartheta}{w(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\cos \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi}$$

$$v_3^s = -P \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \sum_k \frac{\exp[i\lambda_k(\arccos \varepsilon - \arccos \varepsilon a/r - 1/2\pi)] \sin \lambda_k \vartheta}{w(t_k)(t_k - q_1^2)} \frac{\sin \lambda_k \vartheta}{\sin \lambda_k \pi}$$

$$P \equiv P(\varepsilon, k_2, a, r) =$$

$$k_2 (2\varepsilon^2 - 1) \pi^{1/2} (1 - \varepsilon^2)^{-1/4} \exp[ik_2(\sqrt{r^2 - a^2\varepsilon^2} - a\sqrt{1 - \varepsilon^2})]$$

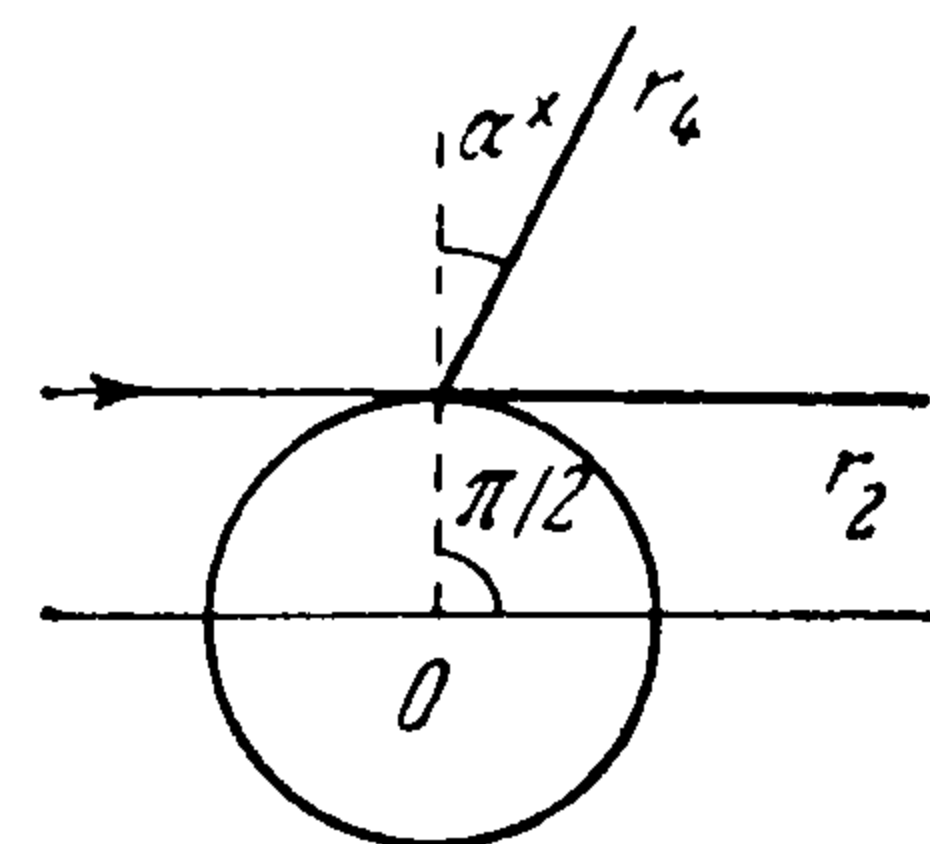
Область хорошей сходимости рядов (7.1) определяется условием

$$-\arccos(a/r) - \vartheta + 1/2\pi > 0$$

т. е. областью геометрической тени (фиг. 7). Для рядов (7.2) область быстрой сходимости лежит правее луча, уравнение которого $r_4 = a\varepsilon / \cos(\vartheta^* - \vartheta)$, т. е.

$$\arccos \varepsilon - \arccos(\varepsilon a/r) - \vartheta + 1/2\pi > 0$$

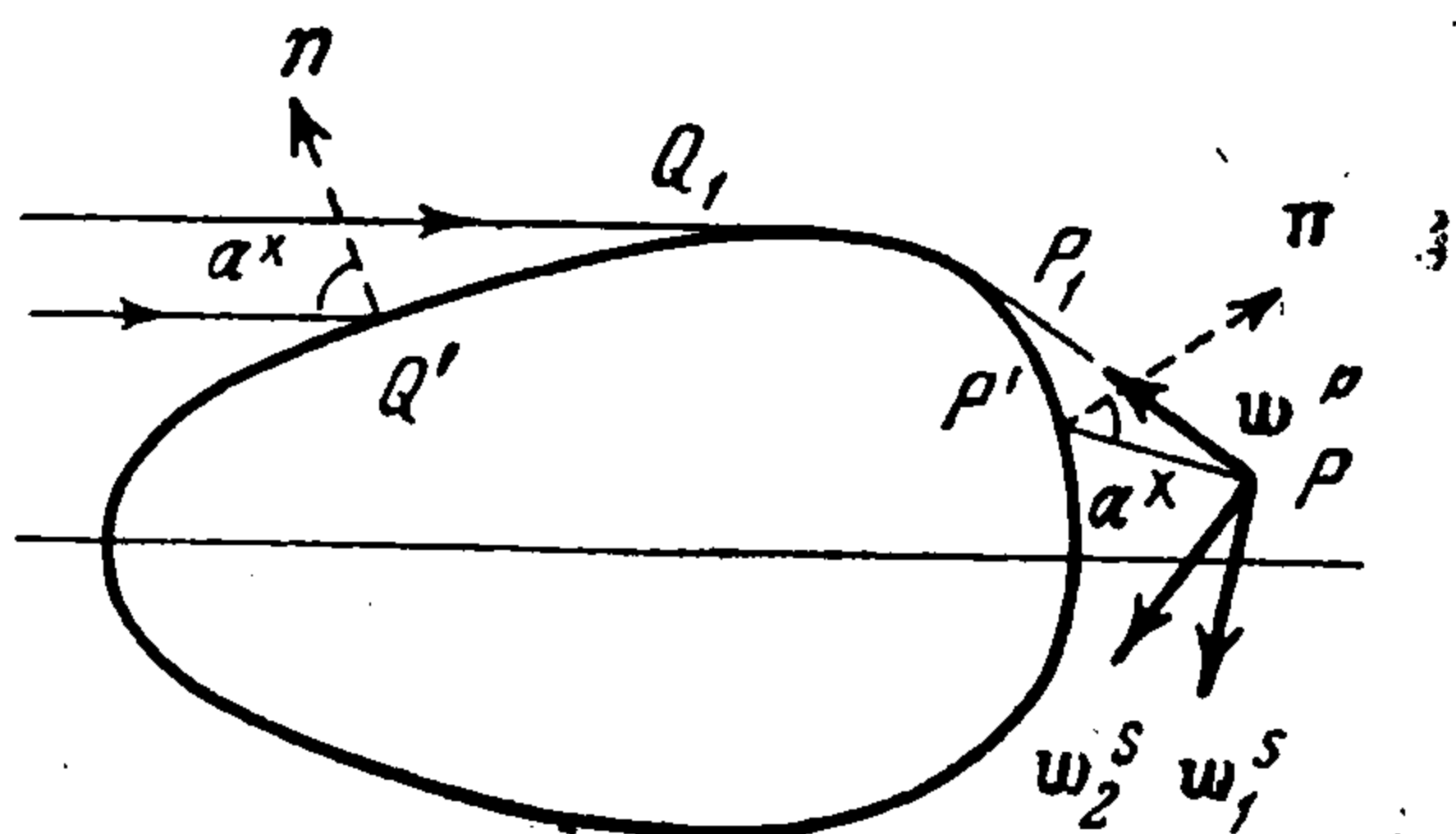
Вне своих областей сходимости продольные и поперечные составляющие смещений представляются суммой геометрических и дифракционных членов. Последние представляются рядами, аналогичными (7.1) и (7.2), с заменой множителей $\sin \lambda_k \vartheta$ и $\cos \lambda_k \vartheta$ согласно (2.5) на $-\sin \lambda_k(\pi - \vartheta) \exp(i\lambda_k \pi)$ и $\cos \lambda_k(\pi - \vartheta) \exp(i\lambda_k \pi)$; эти ряды быстро сходятся везде.



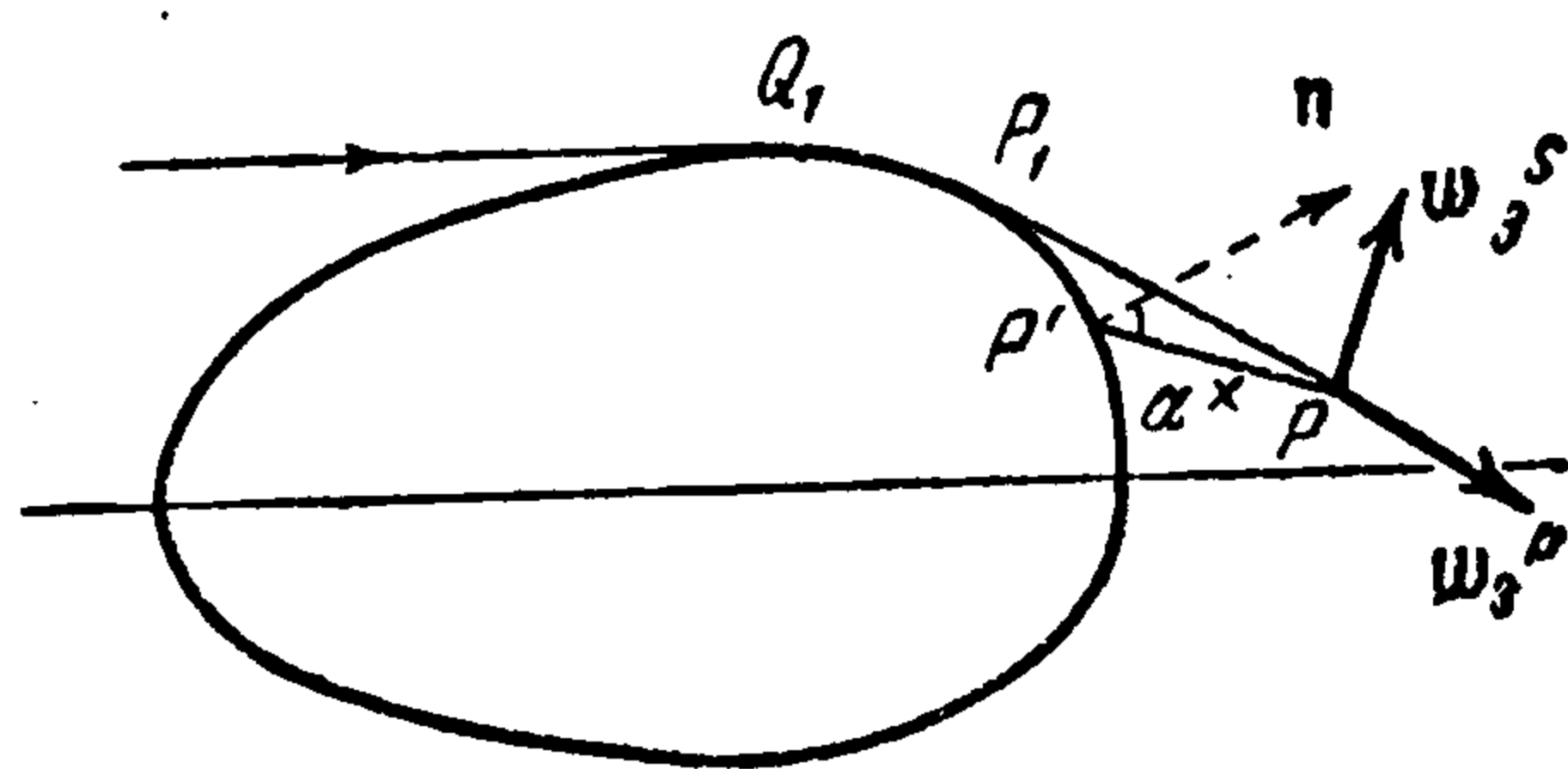
Фиг. 7

§ 8. Геометрическая теория дифракции плоских упругих волн произвольным выпуклым цилиндром. Метод геометрической теории дифракции Келлера используем с некоторыми видоизменениями для решения задач о дифракции упругих волн.

Задачу будем ставить так: гармоническая волна, продольная или поперечная, падает на гладкий выпуклый цилиндр в однородной упругой



Фиг. 8



Фиг. 9

среде. Необходимо найти дифракционное поле смещений вне дифрагирующего тела. В отличие от [11, 12], будем считать, что дифракционные лучи производятся не только начальными поперечными и продольными лучами, касающимися поверхности тела, но и начальными поперечными лучами, падающими на тело под углом полного внутреннего отражения α^x . И еще, поверхностный продольный дифракционный луч будет испускать, кроме продольных дифракционных лучей по касательной, также и поперечные дифракционные лучи под углом α^x к нормали на поверхности тела.

Все эти дифракционные лучи будут соответствовать расширенному принципу Ферма, т. е. они содержат геодезические дуги по поверхности тела и прямые от тела к рассматриваемой точке P (фиг. 8 и 9). Дифракционное поле w на каждом луче будем характеризовать амплитудой A , которая является вектором для векторного поля, и фазой δ .

Дифракционное поле $w_d(P)$ в точке P в случае падения поперечной волны будет складываться из суммы полей на лучах трех типов: продольного и поперечного дифракционных лучей испущенных в точке P_1 (фиг. 8), и поперечного дифракционного луча, типа головного, испущенного в P' . Пусть начальный луч в точке Q_i характеризуется амплитудой $A_0(Q_i)$ и фазой $\delta_0(Q_i)$. Поле смещений в точке P , связанное с тремя дифракционными лучами, начинающимися в Q_1 и Q' , будет

$$w_d(P) = w^p(P) + w_1^s(P) + w_2^s(P) \quad (8.1)$$

Здесь w^p , w_2^s — смещения на продольных и поперечных лучах P_1P и w_1^s — на поперечном луче $P'P$. Предполагается, что направление амплитуды смещений вдоль прямого луча остается постоянным, а величина определяется той же конструкцией, что и для скалярного поля, данного в [12]. Тогда

$$w^p(P) = A_0(Q') \exp\{ik_2\delta_0(Q') + ik_1(\sigma_1 + s_1)\} (s_1)_{P_1}^{-1/2} \times \sum_k D_{k,p}^s(Q') D_{k,p}^p(P_1) \exp\left\{-\int_0^{\sigma_1} \alpha_k(\sigma) d\sigma\right\} \quad (8.2)$$

$$w_1^s(P) = A_0(Q') \exp \{ ik_2 [\delta_0(Q') + s_2] + ik_1 \sigma_2 \} [\rho / (\rho + s_2)]_{P'}^{1/2} \times \\ \times \sum_k D_{k,p}^s(Q') D_{k,s}^p(P') \exp \left\{ - \int_0^{\sigma_2} \beta_k(\sigma) d\sigma \right\} \quad (8.3)$$

$$w_2^s(P) = A_0(Q_1) \exp \{ ik_2 [\delta_0(Q_1) + s_1 + \sigma_3] \} (s_1)_{P_1}^{-1/2} \times \\ \times \sum_k D_{k,s}^s(Q_1) D_{k,s}^s(P_1) \exp \left\{ - \int_0^{\sigma_3} \gamma_k(\sigma) d\sigma \right\} \quad (8.4)$$

где σ_i — расстояние вдоль поверхности по геодезической дуге: $\sigma_1 = Q'P_1$, $\sigma_2 = Q'P'$, $\sigma_3 = Q_1P_1$; s_i — расстояния по прямой: $s_1 = P_1P$ и $s_2 = P'P$; ρ — кривизна волнового фронта; $D(Q_i)$ — коэффициенты дифракции в точке Q_i , равные отношению амплитуд различных лучей в этой точке; верхний индекс в коэффициенте D означает, какой тип луча, — продольный (p) или поперечный (s) — преобразуется в другой, тип которого обозначен нижним индексом. Так, $D_{k,p}^s(Q_i)$ — это отношение амплитуды поперечного луча к амплитуде дифракционного продольного луча в точке Q_i и т. д.; γ_k обозначает показатель затухания поперечного поверхностного луча вследствие испускания поперечных лучей; α_k и β_k — показатели затухания продольного поверхностного луча вследствие испускания продольных и поперечных дифракционных лучей. Индекс k показывает, что поле в поверхностных дифракционных лучах состоит из набора различных частот. Каждая частота характеризуется своим собственным коэффициентом дифракции и показателем затухания: либо α_k , либо β_k , либо γ_k . На основании принципа взаимности предполагается, что коэффициенты дифракции с одинаковыми нижними и верхними индексами являются одинаковыми функциями своих переменных.

Зная форму тела и координаты точки P , всегда можно найти направление смещения (фиг. 8 и 9); если знак смещений выбран неверно, то это учтется при определении соответствующего коэффициента дифракции его знаком.

В случае падения на тело продольной волны в точке касания образуется дифракционный продольный поверхностный луч. Он дает начало двум семействам дифракционных продольных и поперечных лучей. Дифракционное поле в точке P (фиг. 9) будет равно

$$w_d(P) = w_3^p(P) + w_3^s(P) \quad (8.5)$$

$$w_3^p = A_0(Q_1) \exp \{ ik_1 [\delta_0(Q_1) + \sigma_3 + s_1] \} (s_1)_{P_1}^{-1/2} \times \\ \times \sum_k D_{k,p}^p(Q_1) D_{k,p}^p(P_1) \exp \left\{ - \int_0^{\sigma_3} \alpha_k(\sigma) d\sigma \right\} \quad (8.6)$$

$$w_3^s = A_0(Q_1) \exp \{ ik_1 [\delta_0(Q_1) + \sigma_4] + ik_2 s_2 \} \left(\frac{\rho}{\rho + s_2} \right)_{P'}^{1/2} \times \\ \times \sum_k D_{k,p}^p(Q_1) D_{k,s}^p(P') \exp \left\{ - \int_0^{\sigma_4} \beta_k(\sigma) d\sigma \right\} \quad (8.7)$$

Здесь σ_4 — геодезическая дуга между Q_1 и P' (фиг. 9).

Далее, согласно Келлеру, будем считать, что коэффициенты дифракции $D(Q_i)$ и экспоненты затухания в первом приближении зависят от природы полей k_1 и k_2 и свойств тела в точке Q_i (точнее, от радиуса кривизны тела в точке Q_i). Поэтому можно определить коэффициенты дифракции и экспоненты затухания, решив задачу дифракции продольных и поперечных волн любым телом простой формы.

Так, для решения задачи о дифракции плоских упругих волн цилиндрическим телом произвольной формы достаточно найти решение для дифракции плоских упругих волн круговым цилиндром радиуса a для соответствующих граничных условий и произвести асимптотическое разложение решения по $1/k_1a$ и $1/k_2a$; затем сравнить асимптотическое разложение с решением методом Келлера и найти коэффициенты дифракции и экспоненты затухания как функции k_1 , k_2 и a . Тогда, зная форму тела, можно построить решение при помощи найденных коэффициентов.

Применим предыдущий метод к нахождению смещений в упругой среде при дифракции на круговом цилиндре плоских упругих волн.

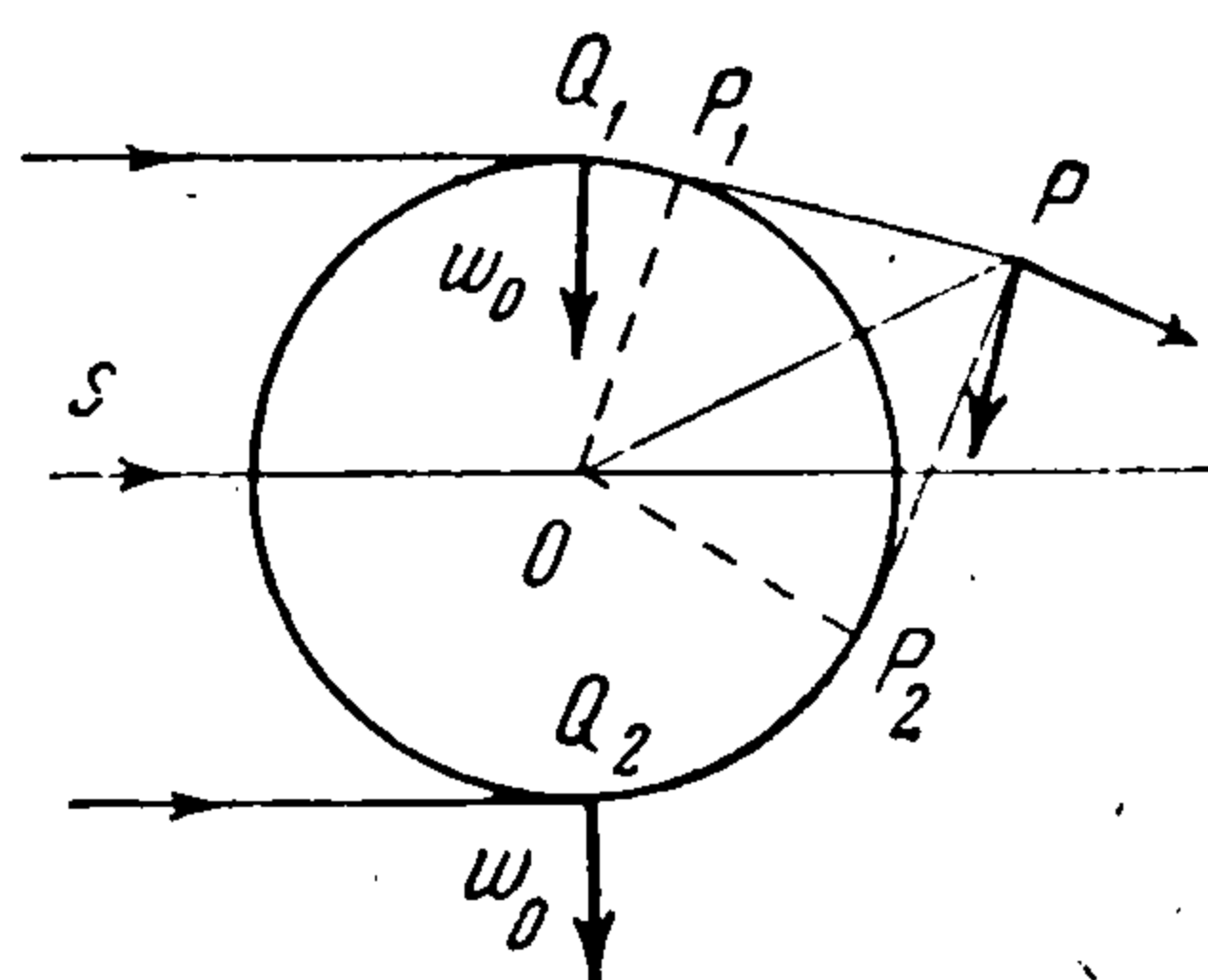
Сделаем следующее замечание: поскольку цилиндр имеет постоянный радиус кривизны и упругая среда однородна, то экспоненты затухания — постоянные величины вдоль луча и зависят лишь от k_1 , k_2 и a .

Теперь рассмотрим задачу о падении поперечной волны на круговой цилиндр. В точку P , находящуюся в геометрической тени, придут три типа дифракционных лучей: продольные (8.2), поперечные (8.4) и поперечные типа головных (8.3). Кроме трех лучей, пришедших в точку P с верхней стороны цилиндра, необходимо учесть три луча с нижней стороны цилиндра и все те лучи, которые попадают в точку после того, как обогнут цилиндр n раз.

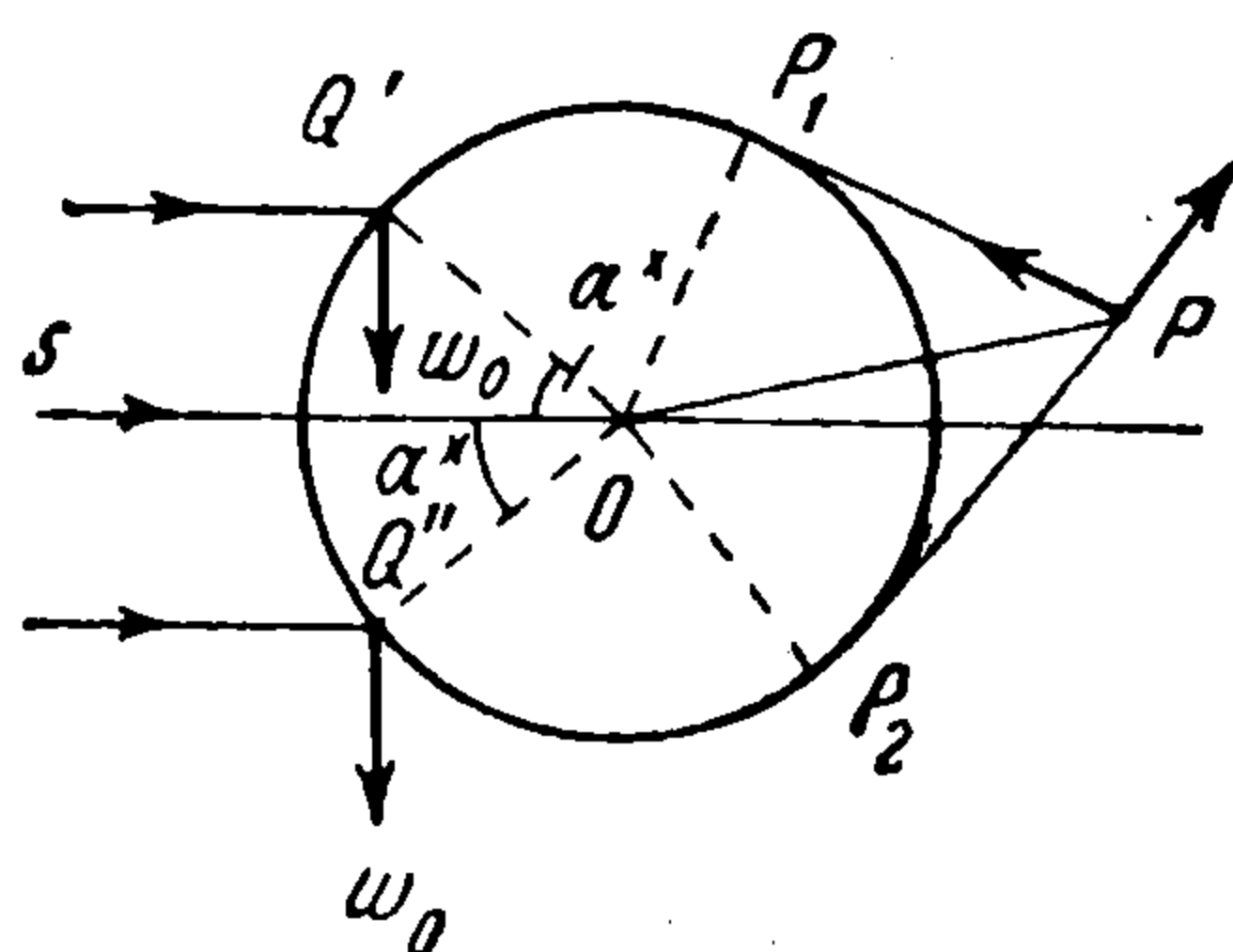
Суммируя поля на всех этих лучах и учитывая ориентацию смещений, найдем поле на поперечных лучах в точке P (фиг. 10)

$$u_2^s(P) = -ik_2 \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} a^{-1/2} e^{ik_2 \sqrt{r^2 - a^2}} \sum_k (D_{k,s})^2 \times \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{a}{r}\right) (ik_2 - \gamma_k) a\right] \frac{\sin \vartheta a (ik_2 - \gamma_k)}{\sin \pi a (ik_2 - \gamma_k)} \quad (8.8)$$

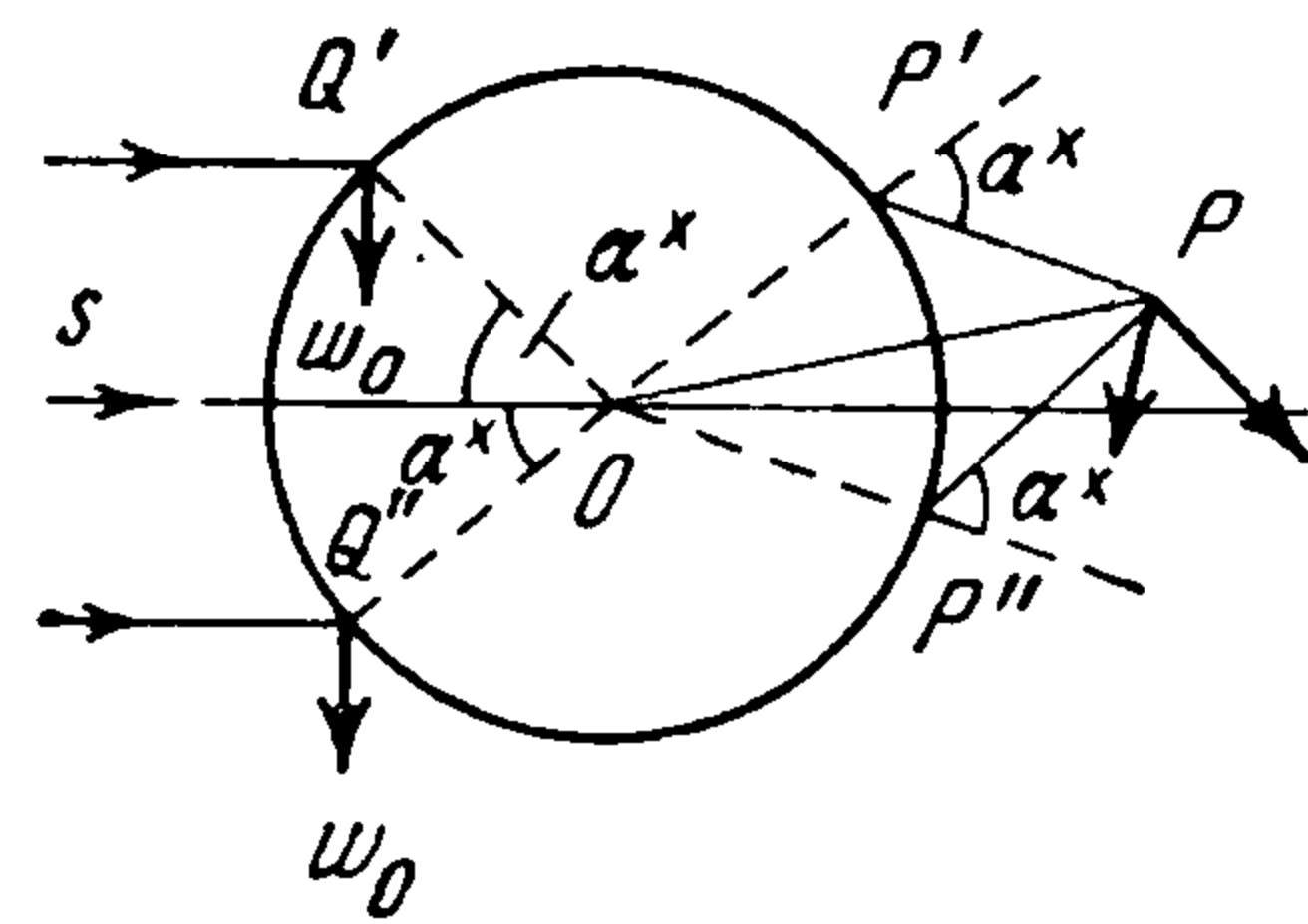
Здесь и далее приводятся формулы только для радиальной компоненты поля дифракционных смещений u . На фиг. 10—14 стрелками в точке P



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

обозначены принятые нами направления смещений на соответствующих верхних P_1P , $P'P$ и нижних P_2P , $P''P$, дифракционных лучах. Поперечные лучи, падающие на цилиндр под углом α^x , дадут начало продольным и поперечным дифракционным лучам.

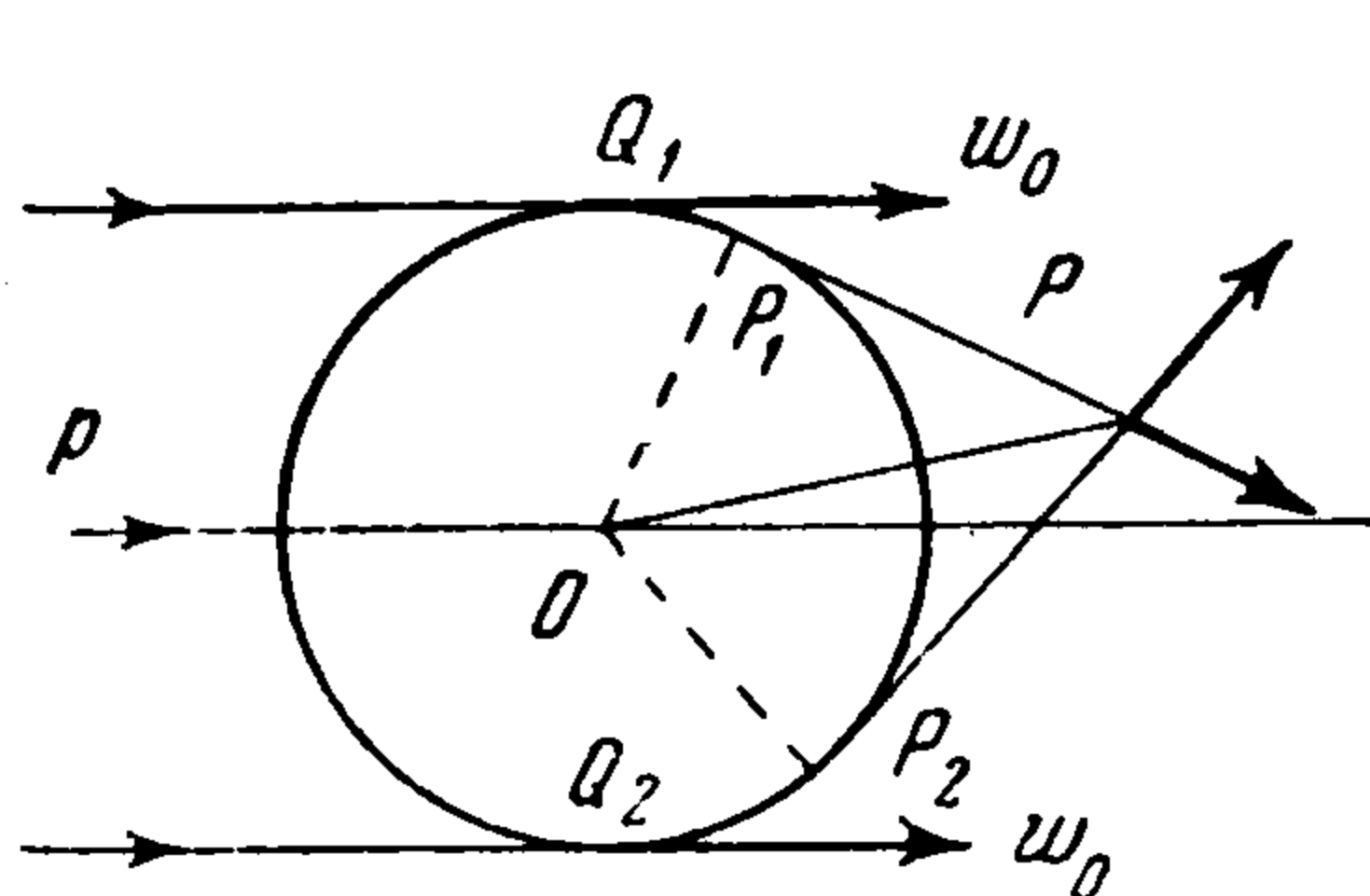
Составляющие смещений на продольных лучах (фиг. 11) будут

$$u^p(P) = -ik_2 \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} a^{-1/2} e^{i(k_1 \sqrt{r^2 - a^2} - k_2 a \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \sum_k D_{k,p}^s D_{k,p}^p \times \exp \left[\left(\arccos \varepsilon - \arccos \frac{a}{r} - \frac{\pi}{2} \right) (ik_1 - \alpha_k) a \right] \frac{\sin \vartheta a (ik_1 - \alpha_k)}{\sin \pi a (ik_1 - \alpha_k)} \quad (8.9)$$

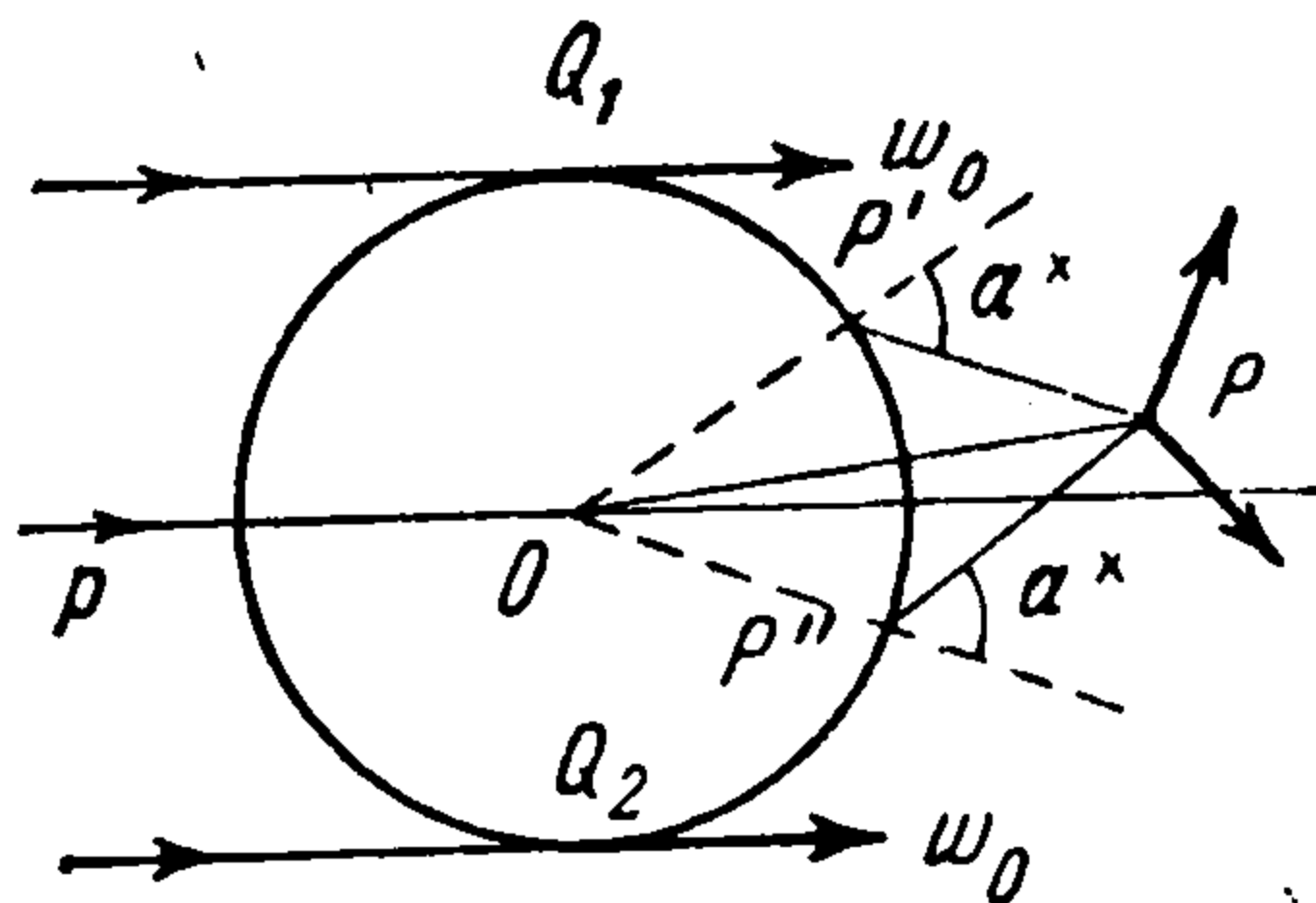
и для поперечных смещений (фиг. 12) типа головных

$$u_1^s(P) = -ik_2 \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/4}}{(1 - \varepsilon^2 a^2 / r^2)^{1/4}} \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} e^{ik_2 (\sqrt{r^2 - \varepsilon^2 a^2} - 2a \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \times \sum_k D_{k,p}^s D_{k,s}^p \exp \left[\left(2 \arccos \varepsilon - \arccos \frac{\varepsilon a}{r} - \frac{\pi}{2} \right) (ik_1 - \beta_k) a \right] \frac{\sin \vartheta a (ik_1 - \beta_k)}{\sin \pi a (ik_1 - \beta_k)} \quad (8.10)$$

Сравнивая полученные результаты для смещений (8.8) — (8.10) с асимптотическими формулами для области геометрической тени из точного метода (5.7) — (5.9), можем получить только произведения коэффициентов



Фиг. 13



Фиг. 14

дифракции. Однако этого недостаточно. Для решения задачи методом Келлера для тела произвольной формы нужно знать отдельно значения этих коэффициентов как функций k_1 , k_2 и радиуса кривизны тела.

Поэтому рассмотрим еще случай падения на цилиндр плоской продольной волны с теми же граничными условиями. Поле в точке P получим как сумму полей на всех дифракционных продольных (8.6) и поперечных (8.7) лучах, проходящих через P .

Составляющие смещений в продольных дифракционных волнах (фиг. 13)

$$u_3^p = -k_1 \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} a^{-1/2} e^{ik_1 \sqrt{r^2 - a^2}} \sum_k (D_{k,p}^p)^2 \times \exp \left[- \left(\arccos \frac{a}{r} + \frac{\pi}{2} \right) (ik_1 - \alpha_k) a \right] \frac{\cos \vartheta a (ik_1 - \alpha_k)}{\sin \pi a (ik_1 - \alpha_k)} \quad (8.11)$$

Поле на поперечных дифракционных лучах найдем аналогичным образом (фиг. 14)

$$u_3^s = -k_1 \varepsilon (1 - \varepsilon^2)^{1/4} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/4} \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2} e^{ik_2 (\sqrt{r^2 - a^2 \varepsilon^2} - a \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \times \sum_k D_{k,p}^p D_{k,s}^p \exp \left[\left(\arccos \varepsilon - \arccos \frac{\varepsilon a}{r} - \frac{\pi}{2} \right) (ik_1 - \beta_k) a \right] \frac{\cos \vartheta a (ik_1 - \beta_k)}{\sin \pi a (ik_1 - \beta_k)} \quad (8.12)$$

Сравнивая (8.11) и (8.12) с асимптотическими формулами точного решения для области геометрической тени (7.1) и (7.2) и аналогичные вы-

ражения для дифракции поперечной волны, получим

$$\alpha_k = \beta_k = ik_1 - i\lambda_k a^{-1} = -ia^{-1} (k_1 a / 2)^{1/2} t_k \quad (8.13)$$

$$\gamma_k = ik_2 - i\mu_k a^{-1} = -ia^{-1} (k_2 a / 2)^{1/2} \tau_k$$

где t_k и τ_k — корни уравнений (3.4) и (3.5), и пять уравнений для четырех коэффициентов дифракции. Откуда найдем

$$D_{k,s} = \left(\frac{8\pi}{k_2}\right)^{1/4} \frac{ie^{-i\pi/8}}{w(\tau_k)(\tau_k - q_2^2)^{1/2}} \left(\frac{k_2 a}{2}\right)^{1/6}, \quad D_{k,p} = \left(\frac{8\pi}{k_1}\right)^{1/4} \frac{ie^{-i\pi/8}}{w(t_k)(t_k - q_1^2)^{1/2}} \left(\frac{k_1 a}{a}\right)^{1/6}$$

$$D_{k,s}^p = \left(\frac{k_1 \pi}{8}\right)^{1/4} \frac{2\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \frac{e^{i/8}}{(t_k - q_1^2)^{1/2}} \left(\frac{2}{k_1 a}\right)^{1/6} \quad (8.14)$$

$$D_{k,p}^s = -\left(\frac{k_1 \pi a^2}{8}\right)^{1/4} \frac{2\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^{1/2}(1 - \varepsilon^2)^{1/4}} \frac{e^{i\pi/8}}{(t_k - q_1^2)^{1/2}} \left(\frac{2}{k_1 a}\right)^{1/6}$$

Заметим, что поверхность дифрагирующего тела является каустикой дифракционных лучей (кроме поперечных дифракционных лучей типа головных), и смещения в методе Келлера на поверхности поэтому становятся бесконечными. Для того чтобы определить смещения на поверхности, обратимся к асимптотическому разложению для точного решения. Вблизи поверхности при $r \rightarrow a$ используем для функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(k_1 r)$ и $H_\nu^{(1)}(k_2 r)$ и их производных асимптотические формулы Ханкеля — Фока вместо дебаевских. Поэтому вблизи и на теле выражения для смещений, полученные методом Келлера, нужно умножить на отношение асимптотического выражения Ханкеля — Фока соответствующей функции к асимптотическому выражению Дебая.

В заключение автор приносит благодарность Г. А. Скуридину и Н. В. Зволинскому за ценные замечания и обсуждение работы.

Поступила 22 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Основные задачи математической теории дифракции. ОНТИ, 1934.
2. Скуридин Г. А. К теории рассеяния упругих волн на криволинейной границе. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 2.
3. Скуридин Г. А. Приближенная теория головной волны, возникающей на цилиндрическом включении в однородной упругой среде. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
4. Gilbert F., Knoroff L. Scattering of impulsive elastic waves by a rigid cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 9.
5. Watson G. N. The diffraction of electric waves by the Earth. Proc. Roy. Soc. A, 1918, vol. 95, No. 666.
6. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, 1946.
7. Bremmer H. Terrestrial radio waves. Elsevier Publishing Company. New York, Amsterdam, London, Brussels, 1949.
8. Franz W. Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel. Z. Naturforsch. 1954, B. 9a, No. 9.
9. Imai I. Die Beugung electromagnetischer Wellen an einem Kreiszyliner. Z. Phys., 1954, B. 137, No. 1.
10. Горяинов А. С. Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре. Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 5.
11. Keller J. B., Lewis R. M., Secier B. D. Asymptotic solution of some diffraction problems. Commun Pure and Appl. Math., 1956, vol. 9, No. 2.
12. Levy B. R., Keller J. B. Diffraction by a smooth object. Commun Pure and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 1.
13. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Макаров Г. И. Об асимптотических представлениях цилиндрических функций. Уч. зап. ЛГУ, 1953, вып. 27, № 170.
14. Хенл, Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. Изд. «Мир», 1964.
15. Яворская И. М. Дифракция плоской продольной волны на круговом цилиндре. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 6.