

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

П. П. Мосолов, В. П. Мясников

(Москва)

Модель вязко-пластической среды впервые была предложена Ф. Н. Шведовым [1] и, независимо от него, Бингамом [2] для описания движения структурообразующих суспензий в условиях чистого сдвига. Позднее Г. Генки [3] и А. А. Ильюшин [4] предложили пространственное обобщение уравнения состояния Шведова — Бингама и решили ряд задач для случая плоских течений вязко-пластической среды, имея в виду приложение полученных результатов к задачам о течениях металлов.

За последние 15—20 лет было опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию различных частных видов течений вязко-пластической среды на основе как точных, так и приближенных решений уравнений движения. Достаточно подробные обзоры полученных результатов содержатся в работах [5,6].

В задачах о течениях вязко-пластической среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает большие трудности при построении достаточно общих и эффективных методов их исследования. Наиболее общие приближенные методы, предложенные в работах [4,7-9], справедливы только при весьма жестких ограничениях, налагаемых на характер движения вязко-пластической среды.

Вместе с тем, из поля зрения специалистов, занимавшихся исследованием течений вязко-пластической среды, как-то выпала возможность вариационной постановки соответствующих задач, обладающая, как будет показано ниже, определенными преимуществами по сравнению с их формулировкой в терминах дифференциальных уравнений. Впервые вариационная постановка задач о плоских течениях вязко-пластической среды была дана в [4].

В настоящей статье предпринята попытка качественно исследовать общие свойства некоторых конкретных видов движений вязко-пластической среды на основе вариационной формулировки этих задач.

В § 1 сформулирован вариационный принцип для произвольных медленных течений вязко-пластической среды и указан конкретный вид функционалов в случаях плоских течений и течений в цилиндрических трубах под действием постоянного перепада давлений. Далее, в § 2 качественно исследуется характер течения в трубах. Показано, что в трубе с произвольным поперечным сечением всегда существует, по крайней мере, одно ядро, движущееся как твердое тело. В § 3 дана постановка задачи о движении тела произвольной конфигурации в плоском канале. Установлено, что возмущения, вызываемые движущимся телом, экспоненциально убывают при удалении от него. Показано также, что если предел текучести среды стремится к нулю, то решение задачи для вязко-пластической среды переходит в решение соответствующей задачи для вязкой жидкости.

Заключительный § 4 содержит доказательство теорем существования и единственности для широкого класса функционалов, содержащего как частные случаи функционалы, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Результаты, изложенные в настоящей работе, связаны с необходимостью проведения ряда громоздких выкладок и доказательств. Стремясь сделать изложение основных качественных выводов более четким и наглядным, авторы сочли целесообразным все громоздкие доказательства вынести в приложение в конце статьи; соответствующие ссылки даются в тексте статьи.

§ 1. Вариационный принцип для медленных движений вязко-пластической среды. Вязко-пластическая среда может быть в общем случае определена как такая среда, в которой вязкое течение появляется при условии, что интенсивность касательных напряжений сдвига σ превосходит некоторую величину τ_0 , называемую пределом текучести. При $\sigma < \tau_0$ среда находится в жестком состоянии.

Основываясь на термодинамических соотношениях для рассеивающих сплошных сред, аналитическое определение вязко-пластической среды может быть дано в форме некоторого вариационного принципа.

Вариационный принцип [4,10,11]. При неизменном потоке энергии через границу объема, занятого вязко-пластической средой, действительное движение отличается от любого кинематически возможного движения тем, что для действительного движения функционал

$$J = \int_{\omega} [X_v \dot{(e_{ij})} + X_p \dot{(e_{ij})} - F_i v_i] d\omega - \int_{\Gamma} t_i v_i dS \quad (1.1)$$

имеет минимальное значение.

В этом соотношении e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации сдвига, v_i , F_i — составляющие поля скоростей и внешних массовых сил по осям координат, t_i — проекции сил, действующих на поверхности Γ , ограничивающей объем ω , занимаемый вязко-пластической средой.

Рассеивающие потенциалы $X_v \dot{}$ и $X_p \dot{}$ [12] для вязко-пластической среды имеют вид

$$X_v \dot{(e_{ij})} = \frac{\mu \gamma^2}{2}, \quad X_p \dot{(e_{ij})} = \tau_0 \gamma \quad (1.2)$$

Здесь μ — коэффициент вязкости среды, γ — интенсивность тензора скоростей деформации сдвига (среда предполагается несжимаемой).

В случае плоских течений вязко-пластической среды и при отсутствии внешних массовых сил, соотношение (1.1) может быть представлено в виде

$$J(\Psi) = \int_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2] + \tau_0 [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2]^{1/2} \right\} d\omega - \int_{\Gamma} \left(t_x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - t_y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) ds, \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad Q = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Здесь Ψ — функция тока, x, y — неподвижная декартова система координат, u, v — составляющие вектора скорости частиц среды по осям координат.

На границе Γ области ω функция Ψ должна удовлетворять некоторым граничным условиям. Форма области ω и граничные условия, налагаемые на Ψ , определяются конкретными особенностями задачи.

Функционал $J(\Psi)$ не является, вообще говоря, дифференцируемым и поэтому не имеет соответствовавшего бы ему уравнения Эйлера.

Действительно:

$$\begin{aligned}
 J(\Psi + \lambda h) - J(\Psi) = & \int_{\omega} \frac{\mu}{2} [2\lambda P\Psi Rh + 2\lambda Q\Psi Qh + \lambda^2 (Ph)^2 + \\
 & + \lambda^2 (Qh)^2] d\omega + 2\tau_0 \int_{\omega} \frac{\lambda P\Psi Rh + \lambda Q\Psi Qh}{[(P\Psi + \lambda Ph)^2 + (Q\Psi + \lambda Qh)^2]^{1/2} + [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2]^{1/2}} d\omega + \\
 & + \int_{\omega} \frac{\lambda^2 (Ph)^2 + \lambda^2 (Qh)^2}{[(P\Psi + \lambda Ph)^2 + (Q\Psi + \lambda Qh)^2]^{1/2} + [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2]^{1/2}} d\omega \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Последний интеграл в области, где $P\Psi = Q\Psi = 0$, является существенным, что и означает недифференцируемость функционала $J(\Psi)$.

В силу указанного обстоятельства дифференциальная формулировка задачи о плоских течениях вязко-пластической среды, предложенная в работах [3,4], эквивалентна ее вариационной формулировке только в том случае, если интенсивность касательных напряжений всюду превосходит предел текучести среды.

В этом случае всюду

$$(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2 > 0$$

и функционал $J(\Psi)$, согласно (1.4), становится дифференцируемым.

Последнее замечание обуславливает пригодность формулировки задачи о плоских течениях в терминах дифференциальных уравнений только для весьма ограниченного класса задач. Использование же этой формулировки в других случаях всегда требует привлечения дополнительных предположений о характере движения, о форме областей, в которых среда находится в жестком состоянии, и т. п. Справедливость такого рода предположений каждый раз требует дополнительной тщательной проверки. Кроме того, остается открытым вопрос о единственности выбора формы областей, где среда находится в жестком состоянии. Примеры же такого рода неединственности для жестко-пластических моделей известны [13].

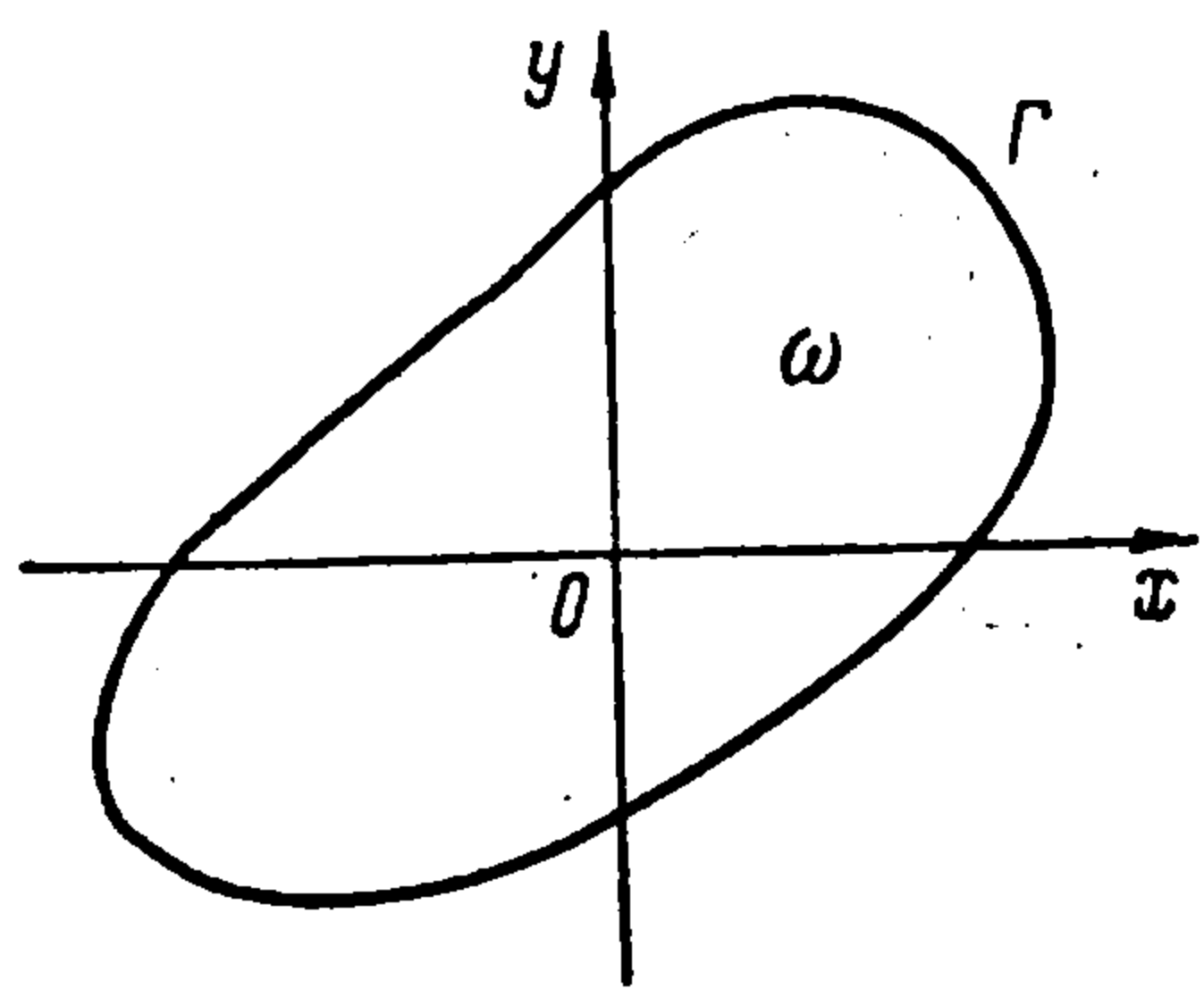
Рассмотрим теперь установившееся движение вязко-пластической среды в цилиндрических трубах с произвольным поперечным сечением под действием заданного постоянного градиента давлений или внешних массовых сил, например силы тяжести.

Траектории частиц среды при движении в трубе будут прямолинейными и скорости их $u(x, y)$ будут параллельны оси трубы. Функционал (1.1) в этом случае будет иметь вид

$$J(u) = \int_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \tau_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} - Cu \right\} d\omega \quad (1.5)$$

где интегрирование распространяется на все поперечное сечение трубы (фиг. 1). На поверхности трубы выполняются условия прилипания, так что для $u(x, y)$ будем иметь

$$u(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Аналогично можно показать, что функционал (1.5) также, вообще говоря, является недифференцируемым.

Перейдем теперь к исследованию свойств функций, минимизирующих функционалы (1.3) и (1.5). Существование и единственность таких функций будут доказаны в § 4.

§ 2. Качественный анализ течений в трубах. Течения вязко-пластической среды в цилиндрических трубах обладают рядом особенностей, отмеченных при исследовании движения в круглой трубе [14]. К ним относятся, например, наличие жесткого ядра внутри области течения и существование критического перепада давлений, превышение которого необходимо для поддержания стационарного движения с отличной от нуля скоростью.

Ниже будет показано, что эти особенности имеют место и в случае движения вязко-пластической среды в цилиндрических трубах с произвольным поперечным сечением и связаны с недифференцируемостью функционала (1.5).

Будем говорить, что течение в области существует или отсутствует соответственно, если

$$\int_{\omega} |u| d\omega > 0, \quad \int_{\omega} |u| d\omega = 0$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Течение в области ω отсутствует тогда и только тогда, когда

$$\tau_0 \int_{\omega} |\text{grad } h| d\omega - c \int_{\omega} h d\omega \geq 0 \quad (2.1)$$

для всех h , определенных в области ω и удовлетворяющих краевому условию (1.6).

Доказательство. Условия существования и отсутствия течения в области ω эквивалентны, очевидно, условиям $J(u) < 0$ или $J(u) = 0$ соответственно. Пусть неравенство (2.1) имеет место. Тогда $J(h) \geq 0$ для всех h , удовлетворяющих условию (1.6). Следовательно, $J(u) = 0$. Достаточность условия (2.1), таким образом, доказана. Предположим теперь, что течение в области ω отсутствует и существует величина h , удовлетворяющая условию (1.6), такая, что

$$\tau_0 \int_{\omega} |\text{grad } h| d\omega - c \int_{\omega} h d\omega < 0$$

Тогда найдется достаточно малое число $\lambda > 0$, для которого $J(\lambda h) < 0$. Но поскольку функция u минимизирует рассматриваемый функционал, то $J(u) \leq J(\lambda h)$, т. е. течение в ω существует, что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

Неравенство (2.1) является существенным при рассмотрении задач о движении вязко-пластической среды в трубах. Поэтому желательно установить условия, связанные с геометрией области ω и параметрами c , τ_0 , обеспечивающими выполнение неравенства (2.1).

Имеют место следующие леммы.

*Лемма *2.2*¹. Если $h(x, y)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию (1.6), то

$$K \int_{\omega} |\text{grad } h| d\omega \geq \int_{\omega} h d\omega, \quad K = \sup_{\omega' \subseteq \omega} \frac{\text{mes } \omega'}{\text{mes } \Gamma'} \quad (2.2)$$

где ω' — произвольная подобласть² области ω с границей Γ' .

*Лемма *2.3*. Существует подобласть ω_1 с границей Γ_1 , для которой

$$K = \frac{\text{mes } \omega_1}{\text{mes } \Gamma_1}$$

причем, если P — точка Γ_1 , не лежащая на Γ , то связная часть множества $\Gamma_1 \setminus \Gamma$, содержащая P , является дугой окружности, касающейся Γ .

Граница Γ в лемме 2.3 предполагается гладкой, кроме, может быть, конечного числа точек.

*Лемма * 2.4*. Если область ω p -связна, а d — внутренний радиус области, равный $\max \rho(P, \Gamma)$, $\rho(P, \Gamma)$ — расстояние между точкой P и границей области для всех точек $P \in \omega$, то постоянная K в лемме 2.2 допускает оценки $(d/2) \leq K \leq 8pd$, причем оценка снизу является точной.

Из лемм 2.1—2.4 следует, что необходимым и достаточным условием отсутствия течения в области ω является условие $c \leq \tau_0 / K$. Если $c < \tau_0 / 8pd$, то течение в ω отсутствует. Наоборот, если $c > 2\tau_0 / d$, то течение в ω всегда существует.

Равенство $c = \tau_0 / K$ определяет критическую величину перепада давлений между концами трубы, превышение которого является необходимым и достаточным условием для существования стационарного течения с отличным от нуля расходом.

Лемма 2.3 позволяет эффективно находить значение величины K для ряда областей. Например, для круга радиуса R , $K = R/2$; для кольца внешнего радиуса R_1 и внутреннего радиуса R_2 , $K = 1/2 (R_1 - R_2)$; для квадрата со стороной a и прямоугольника со сторонами a, b ($a > b$) соответственно

$$K = \frac{a}{2 + \sqrt{\pi}}, \quad K = \frac{ab}{a + b + \sqrt{(a-b)^2 + \pi ab}}$$

Заметим, что из всех труб с равными площадями поперечных сечений наименьшее значение критического перепада давлений достигается для круглой трубы.

Сформулируем и докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2.1. Если функция $u(x, y)$ минимизирует (1.5), то

$$\int_{\omega} |u| d\omega \leq \frac{2K}{\mu} (cK - \tau_0) \text{mes } \omega \quad (2.3)$$

¹ Доказательства лемм и теорем, помеченных звездочкой, изложены в приложении в конце статьи.

² Величины $\text{mes } \omega'$ и $\text{mes } \Gamma'$ можно считать площадью области ω' и длиной границы Γ' . Более строго их нужно понимать как лебеговские меры соответствующих множеств.

Доказательство. Будем предполагать, что $J(u) < 0$, так как в противном случае $u \equiv 0$ и неравенство (2.3) очевидно. Но тогда

$$\frac{\mu}{2 \operatorname{mes} \omega} \left(\int_{\omega} |\operatorname{grad} u| d\omega \right)^2 + \tau_0 \int_{\omega} |\operatorname{grad} u| d\omega - cK \int_{\omega} |\operatorname{grad} u| d\omega < 0$$

Следовательно,

$$\int_{\omega} |\operatorname{grad} u| d\omega \leq \frac{2 \operatorname{mes} \omega}{\mu} (cK - \tau_0)$$

Используя (2.2) и (2.4), получаем утверждение теоремы 2.1.

*Теорема * 2.2.* Функция $u(x, y)$, минимизирующая (1.5), непрерывна в области ω .

До сих пор были установлены только общие свойства минимизирующей функции, включая и теорему о ее непрерывности.

Однако наибольший интерес с механической точки зрения представляет анализ структуры минимизирующей функции.

*Теорема * 2.3.* Любой локальный максимум минимизирующей функции достигается на области, каждая связная компонента которой содержит круг радиуса $R_1 = \tau_0 / 8rc$ и не содержит круга радиуса, большего $R_2 = 2\tau_0 / c$, причем

$$\max u \leq \left(\frac{8rc}{\tau_0} \right)^2 \frac{2K \operatorname{mes} \omega}{\pi\mu} (cK - \tau_0)$$

Подобласть ω' области ω , на которой $u(x, y)$ достигает локального максимума, будем называть ядром течения.

Существование ядер течения является важной качественной характеристикой движения. Оно означает, что в трубе при движении по ней вязко-пластической среды всегда существует, по крайней мере, одно ядро, имеющее конечные размеры при любом конечном перепаде давлений и движущееся как твердое тело с постоянной скоростью. В функционале (1.5) члены, содержащие градиенты $u(x, y)$, в ω' обращаются в нуль, что свидетельствует об отсутствии внутри ядер диссипации механической энергии.

Легко показать, что в случае односвязной области ω каждая связная компонента ядра также односвязна. Укажем достаточные условия, которым должна удовлетворять область ω , обеспечивающие существование односвязного ядра. Эти условия основаны на важном принципе мажорации одного течения другим. Обозначим функционал (1.5) через $J_{\omega}(u)$, указывая индексом область, на которой функционал определен.

Теорема 2.4 (принцип мажорации). Пусть u — функция, минимизирующая функционал $J_{\omega}(u)$, и w — функция, минимизирующая $J_{\Omega}(w)$, причем $\omega \subseteq \Omega$. Тогда $u \leq w$ на ω .

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда в некоторой точке M из ω будем иметь $u(M) > w(M)$. Обозначим через $H(M)$ связную область, содержащую точку M , в которой $u > w$.

Очевидно, что $H(M) \subset \omega$. Предположим, что

$$\begin{aligned} & \int_{H(M)} \left(\frac{\mu}{2} |\text{grad } u|^2 + \tau_0 |\text{grad } u| - cu \right) d\omega \geq \\ & \geq \int_{\bar{H}(M)} \left(\frac{\mu}{2} |\text{grad } w|^2 + \tau_0 |\text{grad } w| - cw \right) d\omega \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию u^* в области ω

$$u^* = w \quad \text{в } H(M), \quad u^* = u \quad \text{в } \omega \setminus H(M)$$

Ясно, что $J_\omega(u^*) \leq J_\omega(u)$. Но это неравенство противоречит теореме о единственности минимизирующей функции. Следовательно,

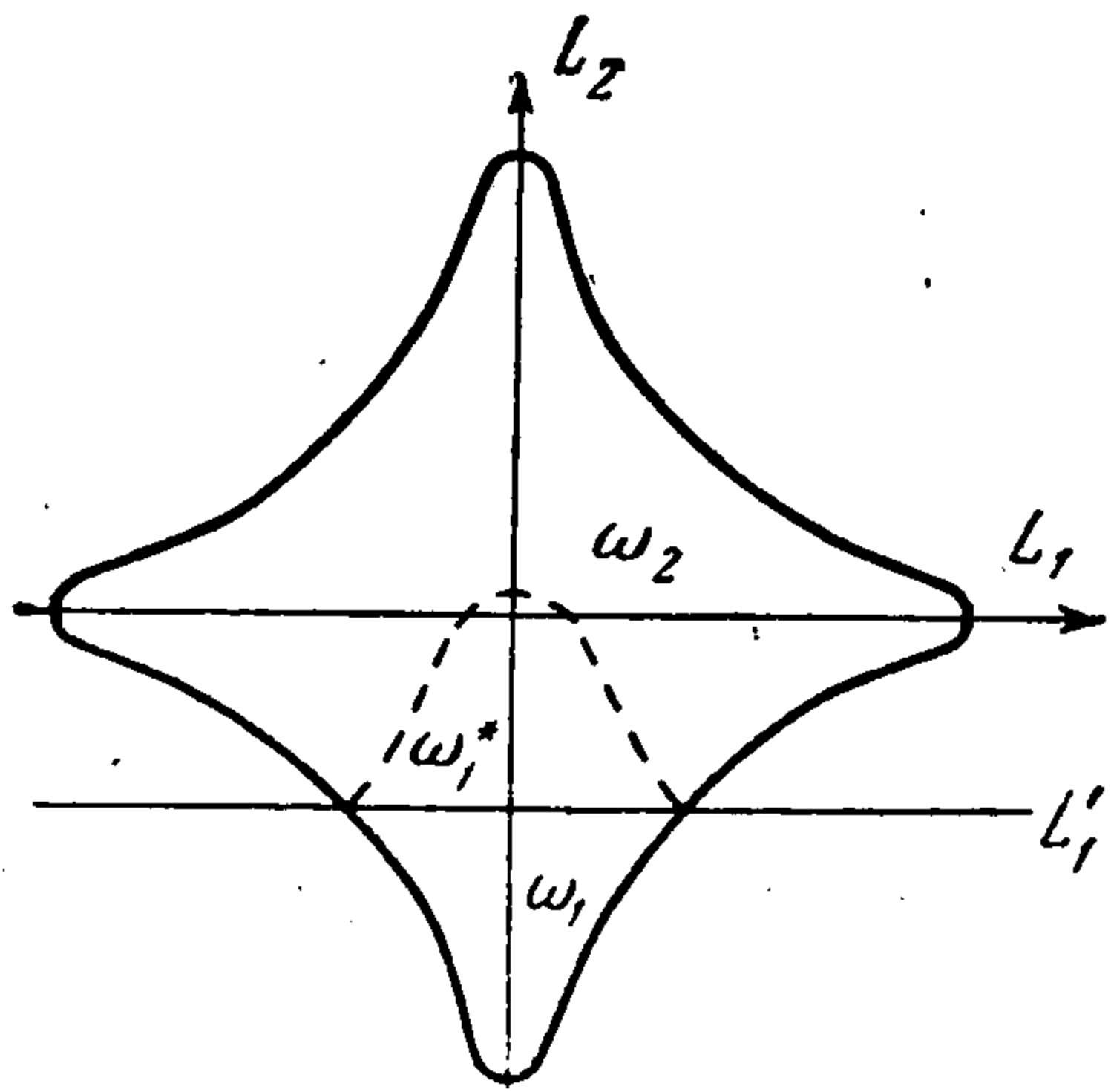
$$\begin{aligned} & \int_{H(M)} \left(\frac{\mu}{2} |\text{grad } u|^2 + \tau_0 |\text{grad } u| - cu \right) d\omega \leq \\ & \leq \int_{H(M)} \left(\frac{\mu}{2} |\text{grad } w|^2 + \tau_0 |\text{grad } w| - cw \right) d\omega \end{aligned}$$

Введем в этом случае функцию w^* в области Ω

$$w^* = u \quad \text{в } H(M), \quad w^* = w \quad \text{в } \Omega \setminus H(M)$$

В результате получим $J_\Omega(w^*) \leq J_\Omega(w)$,

что также противоречит теореме единствен-



Фиг. 2

ности. Таким образом, получаем утверждение теоремы 2.4.

Из принципа мажорации можно получить следующее следствие. Пусть K_1 и K_2 — соответственно максимальный круг, содержащийся в ω , и минимальный круг, содержащий ω , а u_1 и u_2 — функции, минимизирующие (1.5) в кругах K_1 и K_2 . Тогда для функции u , минимизирующей функционал (1.5) в области ω , имеет место неравенство $u_1 \leq u \leq u_2$.

Рассмотрим область ω и некоторую прямую L , делящую эту область на две подобласти ω_1 и ω_2 . Предположим, что область ω_1^* , симметричная области ω_1 относительно L , целиком содержится в области ω_2 (фиг. 2).

Определение 2.1. Если любой прямой L' , параллельной L и пересекающей ω , область ω разбивается на две подобласти ω_1' и ω_2' так, что $\omega_1^* \subseteq \omega_2'$, то область ω называется сильно симметричной в направлении прямой L .

Обозначим через $u^*(x, y)$ поверхность, симметричную поверхности $u(x, y)$ относительно вертикальной плоскости, проходящей через прямую L . Совершенно аналогично теореме 2.4 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.5. Если $\omega_1^* \subseteq \omega_2$, то в области ω_1^* имеем $u^*(x, y) \subseteq u(x, y)$.

Теперь можно указать условия, обеспечивающие существование односвязного ядра течения.

Теорема 2.6. Пусть область ω сильно симметричная в направлениях l_1 и l_2 . Тогда минимизирующая функция имеет односвязное ядро.

Доказательство. Из определения сильно симметричной в направлении l области ω следует, что область ω односвязна и имеет ось симметрии L ,

параллельную l , причем областью ω_2 является подобласть, содержащая точки L . Проведем доказательство теоремы от противного. Пусть ядро течения содержит, по крайней мере, два односвязных компонента Q_1 и Q_2 . Тогда одна из осей симметрии, например L_1 , не является осью симметрии для одной из областей Q_1 или Q_2 . Пусть для определенности это будет область Q_1 . Возможны два случая: 1) ось L_1 пересекает Q_1 ; 2) ось L_1 не пересекает Q_1 . Первый случай невозможен, так как, в силу теоремы 2.5, подобласти Q_1 , получающиеся от пересечения этой области с прямой L_1 , должны переходить друг в друга при отражении относительно L_1 , что означает симметричность Q_1 относительно L_1 и противоречит сделанному предположению. Покажем, что невозможен и второй случай. Действительно, область Q_1 расположена по одну сторону от прямой L_1 и имеет пограничную полосу, состоящую из точек со значениями, меньшими, чем в Q_1 . Будем перемещать L_1 параллельно самой себе до встречи с областью Q_1 . Полученную прямую обозначим через L_1' . Очевидно, что при отражении поверхности $u = u(x, y)$ относительно вертикальной плоскости, проходящей через L_1' , приходим к противоречию с теоремой 2.5. Теорема доказана.

Из теоремы 2.6 следует, что течения вязко-пластической среды по трубам с поперечными сечениями в виде правильных многоугольников, эллипсов и т. п. имеют односвязные ядра. Ряд сильно симметричных по направлениям областей (не обязательно выпуклых) можно построить по следующему правилу. Рассмотрим на плоскости (x, y) угол $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/k$ (k — целое, $k \geq 2$) и рассмотрим в этом угле такую кривую, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки, лежащие на этой кривой, то

$$\operatorname{tg} \left(\frac{k-2}{2k} \pi \right) \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Отразим эту кривую последовательно относительно лучей $r \geq 0$, $\varphi = \pi s/k$ ($s = 1, 2, \dots, 2k-1$). Полученный замкнутый контур ограничивает область, сильно симметричную в k направлениях ($\varphi = 0, \pi/k, \dots, (k-1)\pi/k$). Верно и обратное утверждение: любая область, сильно симметричная в k направлениях, может быть построена указанным способом. Из теорем 2.5 и 2.6 следует, что в сильно симметричной в k направлениях области ядро течения также сильно симметрично в тех же k направлениях.

Остановимся в заключение еще на некоторых геометрических свойствах области течения. Введем следующие определения.

Определение 2.2. Связной компонентой области течения назовем открытую связную подобласть ω' области ω , в которой $u(x, y) > 0$.

Заметим, что связная компонента течения не допускает непрерывных сдвигов и поворотов, оставляющих ее внутри ω .

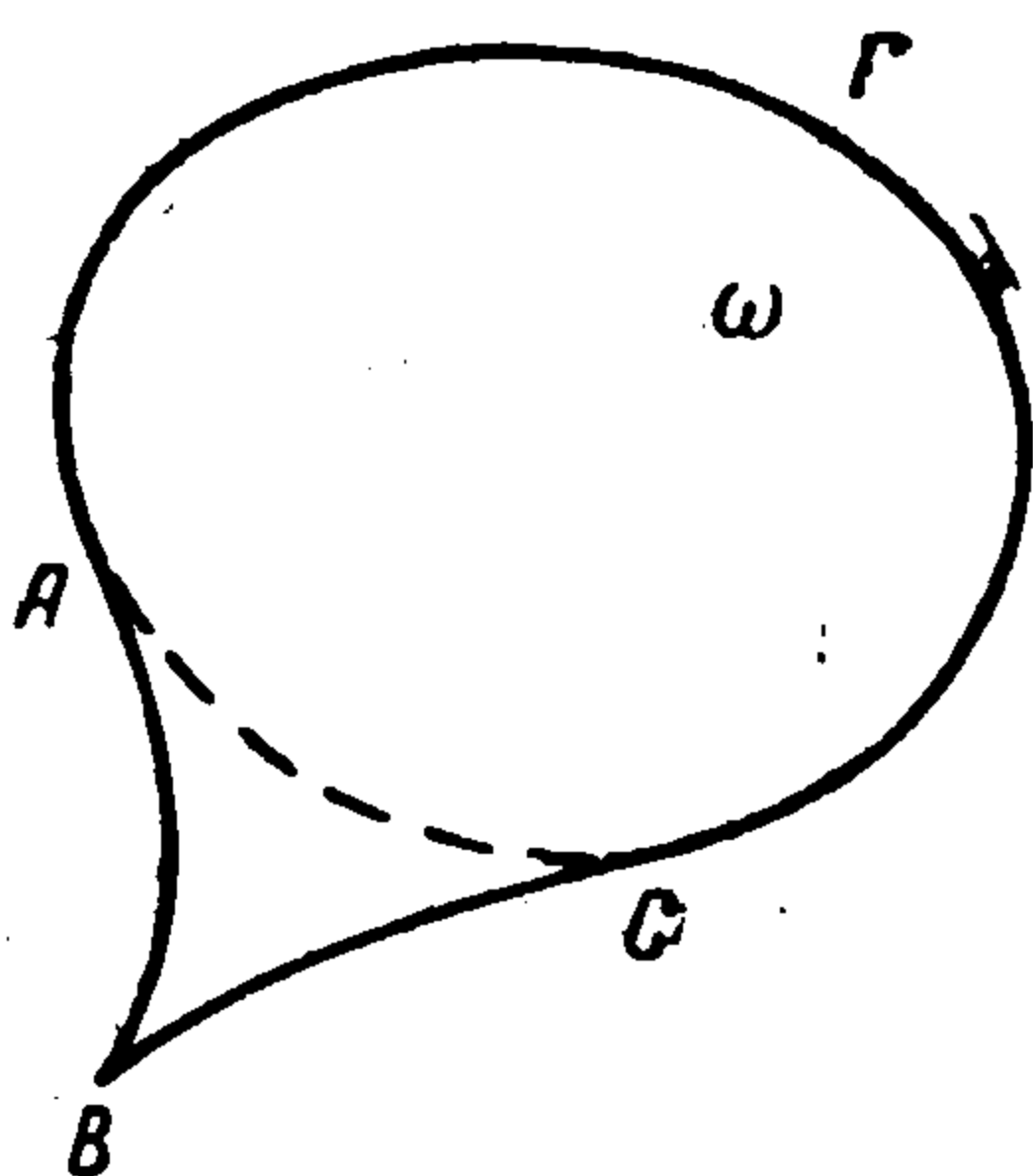
Определение 2.3. Часть границы связной компоненты области течения называется внутренней, если она не имеет общих точек с границей области ω .

Имеет место следующая теорема.

Теорема * 2.7. Связная часть внутренней границы связной компоненты области течения ω' выпукла.

Полученные результаты позволяют дать следующую качественную картину движения вязко-пластической среды по трубам с произвольным поперечным сечением.

В общем случае стационарное движение вязко-пластической среды в трубе возможно, если перепад давлений между концами трубы превосходит некоторую критическую величину, зависящую от предела текучести среды и геометрии поперечного сечения. Внутри области течения всегда существует, по крайней мере, одно ядро, внутри которого среда находится в жестком состоянии, движущееся как твердое тело с постоянной скоростью. Если поперечное сечение трубы является односвязной и сильно симметричной областью, то такое ядро будет единственным и также односвязным и сильно симметричным. Из теоремы 2.7 следует, что область течения обязана, по крайней мере, на некоторых участках примыкать к стенкам трубы. В случае, когда



Фиг. 3

форма поперечного сечения трубы имеет вид, указанный на фиг. 3, застойная зона в отрожке ABC (т. е. область, где скорость течения равна нулю), если она существует, будет иметь вогнутую в сторону отрожка границу.

Таким образом, функциональная формулировка задачи в рассматриваемом случае оказалась весьма эффективной при исследовании качественных особенностей течения. Следует особо подчеркнуть, что при таком подходе жесткие ядра получены как естественный элемент теории, в то время как при формулировке этой же задачи в терминах дифференциальных уравнений существование таких ядер заранее неизвестно и требует введения в теорию таких трудно определяемых элементов, как неизвестные границы этих ядер. При построении строгой теории течений вязко-пластической среды функциональная формулировка задачи является поэтому более полной, так как не связана с предположениями о существовании или отсутствии ядер, предположение о существовании таких областей всегда представляет из себя дополнительную важную физическую гипотезу.

§ 3. Обтекание тела плоским потоком вязко-пластической среды. Рассмотрим задачу о движении тела произвольной конфигурации в плоском канале конечной ширины.

Обозначим через $2d$ ширину канала, а через v — скорость движения тела. В системе координат, жестко связанной с движущимся телом, и при отсутствии внешних массовых сил соответствующий функционал будет иметь вид

$$J(\Psi) = \int_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2] + \tau_0 [(P\Psi)^2 + (Q\Psi)^2]^{1/2} \right\} d\omega \quad (3.1)$$

где интегрирование распространяется на всю полосу, за исключением области, ограниченной контуром Γ (фиг. 4).

На границе Γ функция $\Psi(x, y)$ должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \Psi|_{y=-d} = -Ud, \quad \Psi|_{y=d} = Ud, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}|_{y=-d} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}|_{y=d} = U \\ \Psi|_{\Gamma} = c, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь c — некоторая постоянная, равная нулю при обтекании симметричного тела, если его ось симметрии совпадает со средней линией канала. Решение задачи будем искать в виде

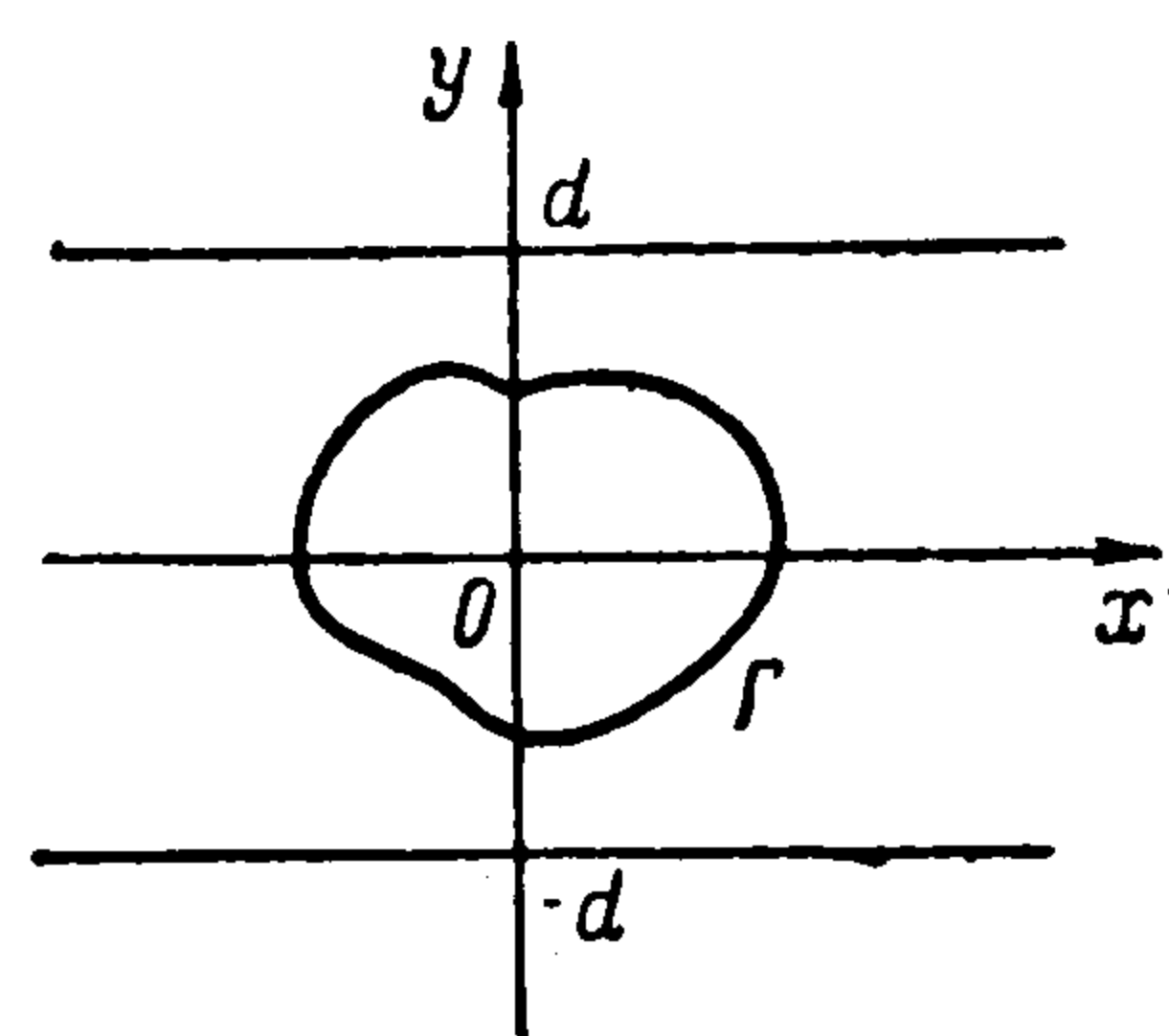
$$\Psi(x, y) = Uy + \varphi(x, y) + u(x, y) \quad (3.3)$$

Функция $u(x, y)$ обращается в нуль вместе со своей нормальной производной при $y = \pm d$ и на контуре Γ , а $\varphi(x, y)$ есть фиксированная финитная в полосе функция, удовлетворяющая на Γ условиям

$$\begin{aligned} [\varphi(x, y) + Uy]_{\Gamma} = c \\ \frac{\partial}{\partial n} [\varphi(x, y) + Uy]_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.1), получим

$$\begin{aligned} J(u) = \int_{\omega} \left\{ \frac{\mu}{2} [(P\varphi + Pu)^2 + (Q\varphi + Qu)^2] + \right. \\ \left. + \tau_0 [(P\varphi + Pu)^2 + (Q\varphi + Qu)^2]^{1/2} \right\} d\omega \end{aligned} \quad (3.5)$$



Фиг. 4

Остановимся на анализе некоторых свойств функции $u(x, y)$, минимизирующей функционал (3.5).

Обозначим через Π_k полуполосу $\{x \geq k; -d \leq y \leq d\}$, а через Π_{sk} — прямоугольник $\{s \leq x \leq k, -d \leq y \leq d\}$. Пусть $v(x, y)$ непрерывна и суммируема с квадратом в Π_k вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Кроме того, пусть

$$\int_{\Pi_k} |Pv| d\omega < C, \quad \int_{\Pi_k} |Qv| d\omega < 2c$$

Тогда имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_k} |Pv| d\omega \geq \frac{1}{\sqrt{2}d} \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| d\omega, \quad \int_{\Pi_k} |Pv| d\omega \geq \frac{1}{\sqrt{2}d} \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| d\omega \\ \int_{\Pi_k} |Pv| d\omega \geq \frac{1}{2d^2} \int_{\Pi_k} |v| d\omega, \quad \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|^2 d\omega \geq \frac{1}{4d^2} \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 d\omega \\ \int_{\Pi_k} (Qv)^2 d\omega \geq \frac{1}{d^2} \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 d\omega, \quad \int_{\Pi_k} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|^2 d\omega \geq \frac{1}{16d^4} \int_{\Pi_k} |v|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теорема 3.1. Для минимизирующей (3.5) функции $u(x, y)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_x} \Phi(u) d\omega \leq \frac{1}{2} J(u) C \frac{x-L}{p} - 1 \quad x > L \\ \Phi(u) = \frac{\mu}{2} [(Pu)^2 + (Qu)^2] + \tau_0 [(Pu)^2 + (Qu)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

причем $C < 1$, p — достаточно большое положительное число и $2L$ — длина тела, находящегося в канале.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x)$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq s, \quad s \geq L \\ -2(k-s)^{-2}(x-s)^2 + 1, & s \leq x \leq (k+s)/2, \quad k > s \\ 2(k-s)^{-2}(x-k)^2, & (k+s)/2 \leq x \leq k \\ 0, & x \geq k \end{cases}$$

В силу теоремы о единственности минимизирующей функции

$$J(u) \leq J(uh) \quad (3.7)$$

Используя 3.6) и (3.7) с учетом определения $h(x)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_k} \Phi(u) d\omega \leq \\ & \leq \int_{\Pi_{sk}} \left\{ \frac{\mu}{2} C_1 \left(\frac{d}{k-s} \right) [(Pu)^2 + (Qu)^2] + \tau_0 C_2 \left(\frac{d}{k-s} \right) [(Pu)^2 + (Qu)^2]^{1/2} \right\} d\omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$C_1 \left(\frac{d}{k-s} \right) = \frac{4d}{k-s} \left[s + \frac{26d}{k-s} + \frac{32d^2}{(k-s)^2} + \frac{128d^3}{(k-s)^3} \right]$$

$$C_2 \left(\frac{d}{k-s} \right) = \left(\frac{36 \sqrt{2} d}{k-s} \right)^{1/2} + \frac{(4 + 6 \sqrt{2}) d}{k-s} + \frac{8d^2}{(k-s)^2}$$

Пусть

$$C \left(\frac{d}{k-s} \right) = \max \left\{ C_1 \left(\frac{d}{k-s} \right), C_2 \left(\frac{d}{k-s} \right) \right\}$$

Тогда из неравенства (3.8) вытекает оценка

$$\int_{\Pi_k} \Phi(u) d\omega \leq C \left(\frac{d}{k-s} \right) \int_{\Pi_{sk}} \Phi(u) d\omega \quad (3.9)$$

Положим теперь $k - s = p$. Очевидно, что при достаточно большом p всегда $C(d/p) < 1$. Зафиксируем это число p и пусть r — целое положительное число такое, что

$$\frac{x-L}{p} - 1 < r \leq \frac{x-L}{p}$$

Из (3.9) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_x} \Phi(u) d\omega & \leq C \left(\frac{d}{p} \right) \int_{\Pi_{x-p}, x} \Phi(u) d\omega \leq C \left(\frac{d}{p} \right) \int_{\Pi_{x-p}} \Phi(u) d\omega \leq \dots \\ & \dots \leq \left[C \left(\frac{d}{p} \right) \right]^r \int_{\Pi_{x-rp}} \Phi(u) d\omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

Окончательно из (3.10) получаем утверждение теоремы

$$\int_{\Pi_x} \Phi(u) d\omega \leq \left[C \left(\frac{d}{p} \right) \right]^{\frac{x-L}{p} - 1} \int_{\Pi_L} \Phi(u) d\omega \leq \frac{1}{2} J(u) \left[C \left(\frac{d}{p} \right) \right]^{\frac{x-L}{p} - 1} \quad (3.11)$$

Теорема 3.1 позволяет оценить скорость убывания функции $u(x, y)$ при удалении вдоль по каналу от движущегося тела.

Действительно, обозначим

$$Lu = (Pu)^2 + (Qu)^2$$

Заметим, что если μ и τ_0 ограничены сверху, то $J(u) < k$, где k не зависит от μ и τ_0 . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \max_{\Pi_x} |u(x, y)| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Pi_x} |Qu| d\omega \leq \frac{1}{2} \int_{\Pi_x} (Lu)^{1/2} d\omega \\ \max_{\Pi_x} |u(x, y)|^2 &\leq 12d^2 \int_{\Pi_x} Lu d\omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из неравенств (3.11) и (3.12) находим

$$\frac{\mu}{24d^2} \max_{\Pi_x} |u|^2 + 2\tau_0 \max_{\Pi_x} |u| \leq \frac{k}{2} \left[C \left(\frac{d}{p} \right) \right]^{\frac{x-L}{p} - 1}$$

Последняя оценка позволяет сделать два важных качественных вывода. Первый из них состоит в том, что величина $u(x, y)$ убывает при $x \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью. Это означает, что возмущения, вызываемые движущимся в канале телом, практически сосредоточены в некоторой его окрестности.

Такой вывод качественно хорошо соответствует сделанному в [9] предположению о локализации в области с конечными размерами возмущений, вызываемых в вязко-пластической среде движущимся телом, и подтверждается результатами экспериментов [10].

Второй качественный вывод, который можно сделать на основании последней оценки, имеет важное значение при исследовании предельных переходов при $\tau_0 \rightarrow 0$ или $\mu \rightarrow 0$.

Если в уравнениях состояния вязко-пластической среды положить $\tau_0 = 0$ или $\mu = 0$, то эти уравнения формально перейдут в хорошо известные уравнения состояния вязкой жидкости или идеально пластической среды. Тем не менее, утверждение, что решения задач о течениях вязко-пластической среды при соответствующих предельных переходах будут стремиться к решениям соответствующих задач о движении вязкой жидкости или идеально пластической среды, не является очевидным. Наличие же такой сходимости явилось бы дополнительным аргументом, свидетельствующим в пользу математической и физической корректности модели вязко-пластической среды. Кроме того, это обстоятельство может оказаться весьма полезным при разработке эффективных методов расчета.

Теорема 3.1 позволяет утверждать, что функция $u(x, y)$ имеет суммируемые в области ω производные до второго порядка включительно при всех значениях параметра τ_0 , включая и $\tau_0 = 0$. Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно показать, что $u(x, y)$ имеет суммируемые до второго порядка включительно частные производные в полуполосе Π_L . Заметим, что

$$\Pi_x = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_{x+kr, x+(k+1)p}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_x} (Lu)^{1/2} d\omega &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Pi_{x+kp, x+(k+1)p}} (Lu)^{1/2} d\omega \leq 2pd \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\Pi_{x+kp}} Lu d\omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2pd \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\mu} J(u) \left[C \left(\frac{d}{p} \right) \right]^{\frac{x-L+kp}{p} - 1} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как правая часть в (3.13) конечна, то высказанное утверждение действительно справедливо.

Докажем теперь, что при $\tau_0 \rightarrow 0$ течения вязко-пластической среды переходят в соответствующие течения вязкой жидкости как в случае канала, так и в случае движения вязко-пластической среды по трубам.

Обозначим через $J_{\tau}^{(1)}(u)$ и $J_{\tau}^{(2)}(u)$ соответственно функционалы (1.5) и (3.5), а через $u_{\tau}^{(1)}$ и $u_{\tau}^{(2)}$ — минимизирующие функции. Пусть $J_0^{(i)}(u)$ — функционал, получающийся из $J_{\tau}^{(i)}(u)$ при $\tau_0 = 0$ ($i = 1, 2$).

Лемма 3.1. Для непрерывной и суммируемой с квадратом вместе со своей первой производной функции $u_{\tau}^{(1)}$ справедливы оценки

$$\left(\frac{\mu}{2} \int_{\omega} |\text{grad } u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega \right)^{1/2} < k_1, \quad J_{\tau}^{(1)}(u_{\tau}^{(1)}) \geq -k_2$$

где k_1 и k_2 не зависят от τ_0 .

Доказательство. Поскольку $J_{\tau}^{(1)}(u)$ рассматривается на функциях, заданных в ограниченной области ω , из (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \int_{\omega} |\text{grad } u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega &\leq C \int_{\omega} |u_{\tau}^{(1)}| d\omega \leq C \left(\int_{\omega} |u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 \left(\int_{\omega} |\text{grad } u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega \right)^{1/2}, \quad J_{\tau}^{(1)}(u_{\tau}^{(1)}) \geq \\ &\geq \frac{\mu}{2} \int_{\omega} |\text{grad } u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega - C_2 \left(\int_{\omega} |\text{grad } u_{\tau}^{(1)}|^2 d\omega \right)^{1/2} \geq -\frac{2C_2^2}{\mu} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Сформулируем и докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3.2. Функции $u_{\tau}^{(i)}$ при $\tau_0 \rightarrow 0$ сильно сходятся к функциям $u_0^{(i)}$, минимизирующим функционалы $J_0^{(i)}(u)$, в пространствах функций, суммируемых вместе со своими частными производными до i -го порядка включительно.

Доказательство. В силу леммы 3.1 и соотношений (3.12) и (3.13) имеем $-c < J_{\tau}^{(i)}(u_{\tau}^{(i)}) < J_{\theta}^{(i)}(u_{\theta}^{(i)})$ при $\theta < \tau$. Но тогда $J_{\tau}^{(i)}(u_{\tau}^{(i)}) \rightarrow a_{\tau}^{(i)}$ при $\tau_0 \rightarrow 0$.

Далее, так как

$$\left(\frac{\mu}{2} \int_{\omega} |\text{grad } u|^2 d\omega \right)^{1/2} < C, \quad \left(\frac{\mu}{2} \int_{\omega} Lu d\omega \right)^{1/2} < C \quad (3.14)$$

то $u_{\tau}^{(i)}$ при $\tau_0 \rightarrow 0$ слабо сходятся к некоторой функции $u_*^{(i)}$ в пространстве функций, суммируемых с квадратом до i -го порядка включительно. В силу теоремы единственности минимизирующей функции $J_{\tau}^{(i)}(u_0^{(i)}) \geq \geq J_{\tau}^{(i)}(u_{\tau}^{(i)})$. На основании известных теорем о слабых пределах [16]

получим

$$J_0^{(i)}(u_0^{(i)}) \geq \lim_{\tau \rightarrow 0} J_0^{(i)}(u_\tau^{(i)}) \geq J_0^{(i)}(u_*^{(i)})$$

Теорема доказана.

§ 4. Абсолютный минимум функционалов. Рассмотрим функции $u(x)$, определенные в области ω n -мерного пространства $R^{(n)}$ [$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$]. Относительно ω будем предполагать, что она имеет конечную ширину по переменному x_n , т. е. если $x_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ и $x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ — две точки из ω , то $|x_n^1 - x_n^2| < d$. Через ω_N обозначим область, состоящую из таких x , что $|x_i| \leq N$ ($i \leq n - 1$). Пусть на функциях $u(x)$, заданных в ω , определены выражения $\|u\|_1, \dots, \|u\|_{p+1}$, обладающие свойствами преднорм, т. е. такие, что

$$\|u + v\|_i \leq \|u\|_i + \|v\|_i, \quad \|\lambda u\|_i = |\lambda| \|u\|_i \quad (4.1)$$

Рассмотрим сужение функций $u(x)$ на ω_N ; предположим, что выражения (4.1) индуцируют соответствующие преднормы $\|u\|_{1,N}, \|u\|_{2,N}, \dots, \|u\|_{p,N}, \|u\|_{p+1,N}$ в ω_N , причем

$$\|u\|_{p+1}^2 = \int_{\omega} u^2 d\omega, \quad \|u\|_{p+1,N}^2 = \int_{\omega_N} u^2 d\omega \quad (4.2)$$

Введем банаховы пространства $A(\omega), A(\omega_N), B(\omega), B(\omega_N), C(\omega)$ и $C(\omega_N)$, в которых нормы определены следующим образом:

$$\|u\|_{A(\omega)} = \sum_{i=1}^{p+1} \|u\|_i, \quad \|u\|_{A(\omega_N)} = \sum_{i=1}^{p+1} \|u\|_{i,N} \quad (4.3)$$

$$\|u\|_{B(\omega)} = \sum_{i=1}^k \|u\|_i + \|u\|_{p+1}, \quad \|u\|_{B(\omega_N)} = \sum_{i=1}^k \|u\|_{i,N} + \|u\|_{p+1,N} \quad (4.4)$$

$$\|u\|_{C(\omega)} = \sum_{i=k+1}^{p+1} \|u\|_i, \quad \|u\|_{C(\omega_N)} = \sum_{i=k+1}^{p+1} \|u\|_{i,N} \quad (4.5)$$

Пространства $A(\omega_N), B(\omega_N)$ и $C(\omega_N)$ являются сужением пространств $A(\omega), B(\omega)$ и $C(\omega)$ на область ω_N .

Относительно введенных преднорм сделаем следующее предположение: если $u(x) \in B(\omega)$, то $u(x)$, рассмотренное на ω_N , принадлежит $B(\omega_N)$, и при этом

$$\|u\|_i \geq \|u\|_{i,N}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|u\|_{i,N} = \|u\|_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.6)$$

Аналогично, если $u(x) \in C(\omega)$, то $u(x) \in C(\omega_N)$ и

$$\|u\|_{i,N} \geq \|u\|_i, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|u\|_{i,N} = \|u\|_i \quad (i = k + 1, \dots, p + 1) \quad (4.7)$$

Предположим, что введенные пространства обладают следующими свойствами.

1°. Шар $\|u\|_{B(\omega)} \leq K$ в пространстве $B(\omega)$ слабо компактен.

2°. Топология в пространстве $B(\omega_N)$ сильнее, чем в пространстве $C(\omega_N)$, т. е.

$$\|u\|_{B(\omega_N)} \geq C_N \|u\|_{C(\omega_N)}$$

3°. Вложение пространства $B(\omega_N)$ в $L_2(\omega_N)$ вполне непрерывно.

4°. Если $u(x) \in B(\omega)$ и $\|u\|_{p+1} = 0$, то $\|u\|_{B(\omega)} = 0$.

5°. Пусть в $A(\omega)$ выделено некоторое подпространство $A_1(\omega)$. Сужение $A(\omega)$ на ω_N дает $A(\omega_N)$ и $A_1(\omega)$ дает $A_1(\omega_N)$. Если $v(x)$ при $x \in \omega$, рассмотренное на ω_N , дает элемент $A_1(\omega_N)$ при всех N и $\|v\|_{A(\omega_N)} < C$ независимо от N , то $v(x) \in A_1(\omega)$.

Пусть на пространстве $A(\omega)$ определен функционал $J(u)$, имеющий структуру

$$J(u) = \Phi(\|u\|_1, \dots, \|u\|_p) + T(u), \quad \varphi_i(x) \in A(\omega) \quad (4.8)$$

причем функционал $T(u)$ допускает расширение на пространство $B(\omega)$ и является слабо непрерывным [16]. Функция $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ непрерывна по всем переменным и такова, что если $0 \leq \lambda_i \leq a_i$ и $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \geq \Phi(a_1, \dots, a_p)$, то $\lambda_i = a_i$. Функционал $J(u)$ предполагается возрастающим и ограниченным снизу.

Рассмотрим функционал $J(u)$ на некотором подпространстве $A_1(\omega)$ пространства $A(\omega)$.

Теорема 4.1. Функционал $J(u)$ достигает на $A_1(\omega)$ своего минимума.

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность u_i из $A_1(\omega)$. Функционал $J(u)$ возрастающий и, следовательно,

$$\|u_i\|_{A(\omega)} < C \quad (4.9)$$

Но тогда и $\|u_i\|_{B(\omega)} < C$. Так как шар в $B(\omega)$ слабо компактен, то существует u_0 из $B(\omega)$, являющийся слабым пределом $u_i(x)$

$$u_i \rightarrow u_0, \quad i \rightarrow \infty, \quad u_0 \in B(\omega) \text{ в } B(\omega)$$

Тогда

$$u_i + \varphi_k \rightarrow u_0 + \varphi_k, \quad i \rightarrow \infty \text{ в } B(\omega)$$

Покажем, что $u_0(x) \in A(\omega)$. В силу сделанных предположений относительно пространств функции $u_i + \varphi_k$ и $u_0 + \varphi_k$ можно рассматривать как элементы пространств $B(\omega_N)$ и $A(\omega_N)$, причем $u_i + \varphi_k \rightarrow u_0 + \varphi_k$, $i \rightarrow \infty$ в $A(\omega_N)$. Последнее соотношение нуждается в доказательстве. Действительно, так как $u_i(x)$ сходятся слабо в $A(\omega_N)$ к какому-то пределу, а непрерывные функционалы в $L_2(\omega_N)$ есть непрерывные функционалы в $A(\omega_N)$, то на этих функционалах $u_0 + \varphi_k$ и слабый предел в $A(\omega_N)$ дают одинаковые значения. Следовательно, в силу 4°, доказываемое соотношение справедливо. Далее, на основании известных теорем о слабых пределах [17]

$$\lim \|u_n + \varphi_j\|_{A(\omega_N)} \geq \|u_i + \varphi_j\|_{A(\omega_N)}, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

Из требований, наложенных на функцию Φ , 5° и (4.9) вытекает, что

$$\lim \|u_n + \varphi_j\|_{A(\omega)} \geq \|u_0 + \varphi_j\|_{A(\omega)}, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

В дальнейшем потребуется следующее уточнение неравенства (4.11)

$$\lim \|u_i + \varphi_j\|_j \geq \|u_0 + \varphi_j\|_j \quad (j = 1, 2, \dots, p+1), \quad i \rightarrow \infty$$

Рассмотрим банаховы пространства $D_i(\omega_N)$ и $D_i(\omega)$ с нормами

$$\|u\|_{D_i(\omega_N)} = \|u\|_{i,N} + \|u\|_{p+1,N}, \quad \|u\|_{D_i(\omega)} = \|u\|_i + \|u\|_{p+1}$$

Из слабой сходимости в $B(\omega_N)$ следует слабая сходимость в $D_i(\omega_N)$, так как $B(\omega_N) \subset D_i(\omega_N)$ и $B^*(\omega_N) \supset D_i^*(\omega_N)$, где звездочкой обозначено сопряженное пространство.

В силу предположения 3° сходимость к $u_0 + \varphi_j$ в $L_2(\omega_N)$ сильная и из неравенства

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u_i + \varphi_j\|_{D_j(\omega_N)} \geq \|u_0 + \varphi_j\|_{D_j(\omega_N)}$$

следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i + \varphi_j\|_{j,N} \geq \|u_0 + \varphi_j\|_{j,N}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i + \varphi_j\|_j \geq \|u_0 + \varphi_j\|_j$$

Заметим, что $u_0(x) \in A_1(\omega)$, так как сужение u_0 на ω_N принадлежит $A_1(\omega_N)$ и в силу предположения 5° убеждаемся, что $u_0 \in A_1(\omega)$.

Докажем, что на $u_0(x)$ реализуется минимум. Очевидно, можно считать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i + \varphi_j\|_j = a_j \geq \|u_0 + \varphi_j\|_j \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

Тогда

$$J(u_0) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} J(u_i) = \Phi(a_1, \dots, a_p)$$

Далее

$$\Phi (\|u_0 + \varphi_1\|_1, \dots, \|u_0 + \varphi_p\|_p) \geq \Phi (a_1, \dots, a_p)$$

Следовательно, в силу свойств функции Φ , $a_j = \|u_0 + \varphi_j\|_j$ и теорема 4.1 доказана. Предположим дополнительно, что преднормы $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_k$ обладают свойством равномерной выпуклости [16], т. е. если $v_1, v_2 \in D_j(\omega)$, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|v_1\|_j = \|v_2\|_j = 1$ и $\|v_1 + v_2\|_j \geq 2(1 - \delta)$ имеет место неравенство

$$\|v_1 - v_2\|_j < \varepsilon \quad (4.12)$$

Кроме того, предположим, что на подпространстве $A_1(\omega)$ имеем

$$\|u\|_i \geq c \|u\|_{p+1} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Теорема 4.2. $u_i(x)$ сходятся сильно в $B(\omega)$.

Доказательство. Рассмотрим элементы $(u_i + \varphi_j) / \|u_i + \varphi_j\|_j$, $(u_0 + \varphi_j) / \|u_0 + \varphi_j\|_j$. Заметим, что $\|u_i + \varphi_j\|_j \neq 0$, так как если $\|u_0 + \varphi_j\|_j = 0$, то $\|u_i + \varphi_j\|_j \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $u_i + \varphi_j$ сильно сходятся к нулю. Имеем

$$\left\| \frac{u_i + \varphi_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} + \frac{u_0 + \varphi_j}{\|u_0 + \varphi_j\|_j} \right\|_j \geq \frac{\|u_i + 2\varphi_j + u_0\|_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} - \frac{|\|u_i + \varphi_j\|_j - \|u_0 + \varphi_j\|_j|}{\|u_i + \varphi_j\|_j}$$

причем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|u_i + 2\varphi_j + u_0\|_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} \geq 2, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\|u_i + \varphi_j\|_j - \|u_0 + \varphi_j\|_j|}{\|u_i + \varphi_j\|_j} = 0$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{u_i + \varphi_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} + \frac{u_0 + \varphi_j}{\|u_0 + \varphi_j\|_j} \right\|_j \geq 2 - \delta(i) \quad (\delta(i) \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty)$$

Но тогда в силу равномерной выпуклости

$$\varepsilon \geq \left\| \frac{u_i + \varphi_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} - \frac{u_0 + \varphi_j}{\|u_0 + \varphi_j\|_j} \right\|_j \geq \frac{\|u_i - u_0\|_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} - \left| \frac{\|u_i + \varphi_j\|_j - \|u_0 + \varphi_j\|_j}{\|u_i + \varphi_j\|_j} \right| \quad (4.13)$$

что и доказывает сильную сходимость u_i в $B(\omega)$.

Теорема 4.3. Если преднорма имеет вид $\|u\|^2 = (u, u)$, где (u, v) — билинейная положительная симметричная форма, то эта преднорма равномерно выпукла.

Доказательство. Пусть

$$\|u\| = \|v\| = 1, \quad \|u + v\| > 2(1 - \delta), \quad \text{или } (u, v) \geq 1 - 4\delta + 2\delta^2$$

Тогда

$$\|u - v\| = \sqrt{2 - 2(u, v)} < 2\sqrt{2\delta}$$

Укажем теперь дополнительные требования на преднормы $\|\cdot\|_j$, $j \geq k + 1$, обеспечивающие сильную сходимость u_i к u_0 в $A(\omega)$.

(а) пусть преднормы $\|\cdot\|_j$, $j > k$ могут быть определены на функциях $u(x)$, где $x \in \omega \setminus \omega_N$. Обозначим эти преднормы через $\|\cdot\|_{j, N^0}$.

(б) $\lim \|u\|_{j, N^0} = 0$, $u \in D_j(\omega)$, $N \rightarrow \infty$.

(в) Каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta(\|u\|_j, \varepsilon)$ такое, что если $|\|u\|_j - \|u\|_{j, N}| < \delta$, то $\|u\|_{j, N^0} < \varepsilon$, причем $\delta(\|u\|_j, \varepsilon)$ непрерывно зависит от $\|u\|_j$ при $\|u\|_j \neq 0$.

(г) $\|u\|_j \leq f[\varphi(\|u\|_{j, N}) + \Psi(\|u\|_{j, N^0})]$ и $\varphi(0) = \Psi(0) = f(0) = 0$;

функции f, φ, Ψ — непрерывны.

(е) Если $\lim \|u\|_j = 0$, то $\lim \|u_i\|_{j, N^0} = 0$ при $i \rightarrow \infty$

Теорема 4.4. При сделанных выше предположениях относительно преднормы $\|\cdot\|_j$ последовательность $u_i(x)$ сходится к $u_0(x)$ сильно в $D_j(\omega)$.

Доказательство. Из теоремы 4.3 следует, что в $L_2(\omega)$ имеется сильная сходимость.

Таким образом, нужно доказать, что

$$\lim \|u_i - u_0\|_j = 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

Далее, из (d) имеем

$$\|u_i - u_0\|_j \leq f [\varphi (\|u_i - u_0\|_{j, N}) + \Psi (\|u_i - u_0\|_{j, N^0})]$$

$$\|u_i - u_0\|_{j, N^0} \leq \|u_i + \varphi_j\|_{j, N^0} + \|u_i + \varphi_j\|_{j, N}$$

Если $\|u_0 + \varphi_j\|_j = 0$, то $\lim \|u_i + \varphi_j\|_{j, N^0} = 0$ при $i \rightarrow \infty$, и так как $\|u_i - u_0\|_{j, N} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, то из предыдущих неравенств следует, что $\|u_i - u_0\|_{j, N} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $\|u_0 + \varphi_j\|_j \neq 0$. Тогда при достаточно большом N

$$\|u_0 + \varphi_j\|_{j, N^0} \leq \delta (N)$$

Кроме того, пусть N настолько велико, что

$$|\|u_0 + \varphi_j\|_j - \|u_0 + \varphi_i\|_{j, N}| < 1/3\delta$$

При выборе достаточно больших значений i будем иметь

$$|\|u_i + \varphi_j\|_j - \|u_0 + \varphi_j\|_j| < 1/3\delta, \quad |\|u_i + \varphi_j\|_{j, N} - \|u_0 + \varphi_j\|_{j, N}| < 1/3\delta$$

Следовательно,

$$|\|u_i + \varphi_j\|_{j, N} - \|u_i + \varphi_j\|_j| < \delta$$

Из условия (с) вытекает, что $\|u_i + \varphi_j\|_{j, N^0} < \varepsilon$.

Таким образом, аргументы у функций φ и ψ , а следовательно и у f , становятся сколь угодно малыми при достаточно больших значениях i . Теорема доказана.

Определение. Функционал $J(u)$ называется строго выпуклым, если

$$J [1/2 (u_1 + u_2)] < 1/2 [J(u_1) + J(u_2)] \quad \text{при } u_1 \neq u_2$$

Теорема единственности. Если функционал обладает свойством строгой выпуклости и $a = J(u_1) = J(u_2) = \inf J(u)$, где $u, u_1, u_2 \in A_1(\omega)$, то $u_1 = u_2$.

Доказательство. Так как u_1 и u_2 принадлежат $A_1(\omega)$, то $1/2 (u_1 + u_2) \in A_1(\omega)$. Но тогда

$$J [1/2 (u_1 + u_2)] < 1/2 [J(u_1) + J(u_2)] = a$$

что противоречит условию теоремы.

Перейдем теперь к приложению полученных результатов к исследованию конкретных течений вязко-пластической среды. Обозначим в (3.5)

$$\|u + \varphi\|_1 = \left\{ \int_{\omega} \frac{\mu}{2} [(P(\varphi + u))^2 + (Q(\varphi + u))^2] d\omega \right\}^{1/2}$$

$$\|u + \varphi\|_2 = \tau_0 \int_{\omega} [(P(\varphi + u))^2 + (Q(\varphi + u))^2]^{1/2} d\omega$$

Тогда

$$J(u) = \|u + \varphi\|_1^2 + \|u + \varphi\|_2 \quad (4.15)$$

Таким образом, $J(u)$ есть частный случай функционала (4.8), причем $\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_2$ и, очевидно, удовлетворяет требованиям, наложенным на эту функцию.

Функционал $T(u)$ в рассматриваемом случае равен нулю.

Проверим условия 1° — 5°. Имеем $p = 2$, $k = 1$. Пространство $B(\omega)$ является гильбертовым и, следовательно, условие 1° выполнено. Условие 2° тривиально следует из неравенства Коши — Буняковского, причем $C_N = \text{mes } \omega_N$. Условия 3° и 4° справедливы в силу известных теорем вложения [18].

В качестве подпространства $A_1(\omega)$ будем рассматривать замыкание пространства $C_0^\infty(\omega)$ в метрике $A(\omega)$. При этом справедливость условия 5° очевидна.

Относительно преднормы $\|\cdot\|_1$ справедливо более сильное утверждение, а именно, что она является равномерно выпуклой в силу теоремы 4.3.

Покажем теперь, что условия (а) — (е) выполнены. Определим $\|u\|_{j, N^0}$ так:

$$\|u\|_{1, N^0} = \left\{ \int_{\omega \setminus \omega_N} \frac{\mu}{2} [(Pu)^2 + (Qu)^2] d\omega \right\}^{1/2}, \quad \|u\|_{2, N^0} = \tau_0 \int_{\omega \setminus \omega_N} [(Pu)^2 + (Qu)^2]^{1/2} d\omega$$

Условия (а) и (б) при этом, очевидно, выполняются. Так как при этом $\|u\|_i \geq \|u\|_{i, N^0}$, то условие (е) также выполнено. Условия же (с) и (д) непосредственно следуют из следующих очевидных соотношений:

$$\|u\|_1 - \|u\|_{1, N} \geq \frac{\|u\|_{1, N}^2}{2\|u\|_1}, \quad \|u\|_2 - \|u\|_{2, N} = \|u\|_{2, N^0}, \quad \|u\|_1 = (\|u\|_{1, N}^2 + \|u\|_{1, N^0}^2)^{1/2}$$

Проверим последнее условие строгой выпуклости функционала. Действительно,

$$\begin{aligned} \|^{1/2}(u_1 + u_2)\|_2 &\leq ^{1/2}(\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2) \\ \|^{1/2}(u_1 + u_2)\|_1^2 &\leq ^{1/2}(\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2) \end{aligned}$$

причем равенство в последних соотношениях имеет место только при $u_1 = u_2$.

Таким образом, доказаны существование и единственность решения задачи о движении тела в плоском канале, представимого в виде (2.7), причем сумма последних двух слагаемых является функцией из пространства $W_2^{(2)}(\omega) \cap W_1^{(2)}(\omega)$. На основании известных теорем вложения решение есть непрерывная функция.

Для случая течения в трубе функционал (1.5) представим в виде

$$J(u) = \|u\|_1^2 + \|u\|_2 + T(u), \quad \|u\|_1^2 = \int_{\omega} \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] d\omega \quad (4.16)$$

$$\|u\|_2 = \tau_0 \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} d\omega, \quad T(u) = - \int_{\omega} \epsilon u d\omega$$

Очевидно, функционал $T(u)$ слабо непрерывен. Из (4.16) следует, что $J(u)$ является частным случаем более общих функционалов, рассмотренных выше, и удовлетворяет всем необходимым условиям. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в случае течения в канале, можно показать, что в рассматриваемом случае также имеют место теоремы существования и единственности решения. Единственным отличием от предыдущего случая является то, что решение будет являться функцией из пространства $W_2^{0(1)}(\omega)$.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту и Б. Р. Вайнбергу за ценные обсуждения и советы

Приложение

Доказательство леммы 2.2. Покажем, что $K \geq \sup (\text{mes } \omega' / \text{mes } \Gamma')$, $\omega' \subseteq \omega$. Для этого рассмотрим произвольную область ω_1 , лежащую в области ω , и последовательность функций $v_j(x, y)$, равных 1 в области $\omega_1 \setminus O_j(\Gamma_1)$ и 0 в области $\omega \setminus (\omega_1 \cup O_j(\Gamma_1))$, где Γ_1 — граница области ω_1 ; $O_j(\Gamma_1)$ — окрестность Γ_1 , которая стягивается к Γ_1 при $j \rightarrow \infty$. Относительно Γ_1 будем предполагать существование конечной кривизны во всех ее точках. Это позволяет в окрестности $O_j(\Gamma_1)$ ввести криволинейную систему координат, считая одной из координат s — длину дуги вдоль Γ_1 , а другой n — длину отрезка нормали к Γ_1 . В окрестности $O_j(\Gamma_1)$ функции $v_j(x, y)$ представляют собой монотонные функции переменного n (границей $O_j(\Gamma_1)$ являются линии $n = \pm \alpha_j$).

Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} |\text{grad } v_j| d\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{O_j(\Gamma_1)} |\text{grad } v_j| d\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{O_j(\Gamma_1)} \frac{dv_j}{dn} J(s, n) ds dn$$

причем $J(s, n) = 1 + O(n)$. Таким образом,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} |\text{grad } v_j| d\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{O_j(\Gamma_1)} \frac{dv_j}{dn} ds dn = \text{mes } \Gamma_1 \quad (A.1)$$

Далее, очевидно, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} v_j dx dy = \text{mes } \omega_1 \quad (A.2)$$

Из соотношений (A.1) и (A.2) следует, что $K \geq \text{mes } \omega_1 / \text{mes } \Gamma_1$. Покажем, что $K \leq \sup (\text{mes } \omega' / \text{mes } \Gamma')$, $\omega' \subseteq \omega$. Легко видеть, что утверждение леммы 3.1 достаточно проверить лишь на функциях h , непрерывных, положительных и принадлежащих пространству $W_p^{(1)}$ ($p > 2$). Продолжим функцию h нулем на некоторый квадрат, содержащий область ω . Аппроксимируем эту продолженную функцию полиномами $P_n^1(x, y)$ в квадрате в метрике пространства $W_p^{(1)}$. Из теорем вложения, так как $p > 2$, следует, что сходимость $P_n^1(x, y)$ к $h(x, y)$ равномерная. Поэтому можно считать, что $|P_n^1(x, y) - h(x, y)| < 1/n$ в ω и

$$\int_{\omega} |\text{grad}(P_n^1(x, y) - h(x, y))| d\omega \leq 1/n$$

Положим $P_n(x, y) = P_n^1(x, y) - 1/n$. Очевидно, $P_n(x, y) < 0$ на границе Γ области ω . Рассмотрим линию нулей многочлена $P_n(x, y)$, лежащую в области ω и ограничивающую область s_n , содержащую все остальные нули $P_n(x, y)$ (эта линия может состоять из конечного числа связных компонент). Через Q_n обозначим функцию, определенную в ω следующим образом:

$$Q_n = \begin{cases} P_n & \text{в } s_n \\ 0 & \text{в } \omega \setminus s_n \end{cases}$$

Легко видеть, что $|Q_n - h| < 2/n$ в ω . Действительно, в s_n имеем $|Q_n - h| = |P_n - h| < 2/n$. В области $\omega \setminus s_n$ имеем $|Q_n - h| = |h|$, но $|h - P_n| < 2/n$ и так как $P_n \leq 0$ в $\omega \setminus s_n$, а $h \geq 0$, то $|h| < 2/n$. Покажем, что $\text{mes} \{(\omega \setminus s_n) \cap \text{supp } h\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $\text{supp } h$ — область, в которой $h > 0$. Действительно, рассмотрим множество $A_n = \{(x, y) : |h| < 2/n\} \cap \text{supp } h$. Очевидно, что $(\omega \setminus s_n) \cap \text{supp } h \subseteq A_n$ и $A_n \supseteq A_{n+1}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ — пустое множество и A_n ограничены, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } A_n = 0$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes} \{(\omega \setminus s_n) \cap \text{supp } h\} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} |\text{grad}(h - Q_n)| d\omega = 0 \quad (\text{A.4})$$

Действительно,

$$\int_{\omega} |\text{grad}(h - Q_n)| d\omega = \int_{s_n} |\text{grad}(h - P_n)| d\omega + \int_{(\omega \setminus s_n) \cap \text{supp } h} |\text{grad } h| d\omega \quad (\text{A.5})$$

Первое слагаемое справа в (A.5), очевидно, стремится к нулю. Второе слагаемое стремится к нулю в силу (A.3). Следующий этап доказательства состоит в получении неравенства

$$K \int_{\omega} |\text{grad } Q_n| d\omega \geq \int_{\omega} Q_n d\omega \quad (\text{A.6})$$

Введем функцию Q_n^* следующим образом: Q_n^* получается из Q_n затягиванием локальных минимумов горизонтальными плоскостями, т. е. если Q_n имеет локальный минимум, то в окрестности этого минимума линии уровня Q_n являются овалами. Выберем из этих овалов тот, на котором Q_n принимает наибольшее значение.

Функцию Q_n^* полагаем равной этому наибольшему значению во всей области, ограниченной указанным овалом. Эту конструкцию повторяем для всех локальных минимумов. Так как

$$\int_{\omega} |\text{grad } Q_n| d\omega \geq \int_{\omega} |\text{grad } Q_n^*| d\omega, \quad \int_{\omega} Q_n^* d\omega \geq \int_{\omega} Q_n d\omega$$

то неравенство (А.6) будет следовать из неравенства

$$K \int_{\omega} |\text{grad } Q_n^*| d\omega \geq \int_{\omega} Q_n^* d\omega \quad (\text{А.7})$$

Легко видеть, что вся область ω покрывается линиями уровня функции Q_n^* , среди которых лишь конечное число, не имеющих хотя бы в одной точке конечного значения кривизны. Такие линии будем называть особыми. Остальные линии уровня, имеющие конечную кривизну в каждой точке, будем называть неособыми. К особым линиям уровня относятся отдельные точки, простые дуги, самопересекающиеся кривые. Рассмотрим неособую линию уровня L_p , охватывающую область ω_p и состоящую, вообще говоря, из конечного числа овалов. В некоторой окрестности L_p можно ввести криволинейную систему координат, считая одну координату s длиной дуги кривой L_p , другой координатой — n — отрезок нормали к L_p ($n > 0$ в области ω_p , $n < 0$ в противном случае). Очевидно, при этом $dx dy = J ds dn$ и $J(s, n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow 0$. Рассмотрим в указанной окрестности другую линию уровня $L_{p+\Delta p}$, уравнение которой $n = n(s) > 0$. Значение Q_n^* на L_p обозначим $Q_n^*(L_p)$. Область между L_p и $L_{p+\Delta p}$ обозначим через $\omega_{p,p+\Delta p}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{p,p+\Delta p}} |\text{grad } Q_n^*| d\omega &\geq \int_{\omega_{p,p+\Delta p}} \left| \frac{\partial Q_n^*}{\partial n} \right| J ds dn = \\ &= [Q_n^*(L_{p+\Delta p}) - Q_n^*(L_p)] \text{mes } L_p + O(n(s)) \text{mes } \omega_{p,p+\Delta p} \end{aligned} \quad (\text{А.8})$$

Перепишем (А.8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\text{mes } \omega_p}{\text{mes } L_p} \int_{\omega_{p,p+\Delta p}} |\text{grad } Q_n^*| d\omega &\geq [Q_n^*(L_{p+\Delta p}) - Q_n^*(L_p)] \text{mes } \omega_p + \\ &+ O(n(s)) \text{mes } \omega_{p,p+\Delta p} \text{mes } \omega_p / \text{mes } L_p \end{aligned} \quad (\text{А.9})$$

Так как $\text{mes } \omega_p / \text{mes } L_p < K$, то

$$\begin{aligned} K \int_{\omega_{p,p+\Delta p}} |\text{grad } Q_n^*| d\omega &\geq [Q_n^*(L_{p+\Delta p}) - Q_n^*(L_p)] \text{mes } \omega_p + \\ &+ O(n(s)) \text{mes } \omega_{p,p+\Delta p} \text{mes } \omega_p / \text{mes } L_p \end{aligned} \quad (\text{А.10})$$

Область ω с точностью до малой меры можно расщлнить на непересекающиеся подобласти $\omega_{p,p+\Delta p}$, т. е. $\omega_\varepsilon = \bigcup \omega_{p,p+\Delta p}$ и $\text{mes}(\omega \setminus \omega_\varepsilon) < \varepsilon$. Суммируя (А.10) по различным $\omega_{p,p+\Delta p}$ и выбирая $n(s)$ достаточно малым, получим

$$K \int_{\omega} |\text{grad } Q_n^*| d\omega \geq \int_{\omega} Q_n^* d\omega - \delta \quad (\text{А.11})$$

где $\delta = \delta(\varepsilon, n(s))$, и так как остальные выражения в (А.11) от $\varepsilon, n(s)$ не зависят, то из неравенства (А.11) следует (А.6). Так как Q_n соответствующим образом аппроксимируют L , то утверждение леммы 3.1 доказано.

Доказательство леммы 2.3. Заметим, что существует подобласть ω_1 области ω , на которой достигается значение K (см. лемму 2.2). Это вытекает из компактности кривых с ограниченной длиной. Пусть точка M принадлежит Γ_1 и не принадлежит Γ . Тогда M погружается вместе с некоторой своей окрестностью $O(M)$ в ω . Легко видеть, что часть Γ_1 , попавшая в $O(M)$, должна быть выпуклой. Пусть, далее, M_1 и M_2 — две точки, лежащие достаточно близко на Γ_1 и принадлежащие $O(M)$. В силу экстремальных свойств круга, дуга M_1M_2 границы Γ_1 является частью окружности. Покажем, что Γ_1 и Γ касаются в общих точках. Предположим противное (фиг. 5). Пусть $\alpha \neq 0$, $\gamma = OM_1 + OM_2$; l — длина отрезка M_1M_2 , остальные обозначения

даны на фиг. 5. Тогда

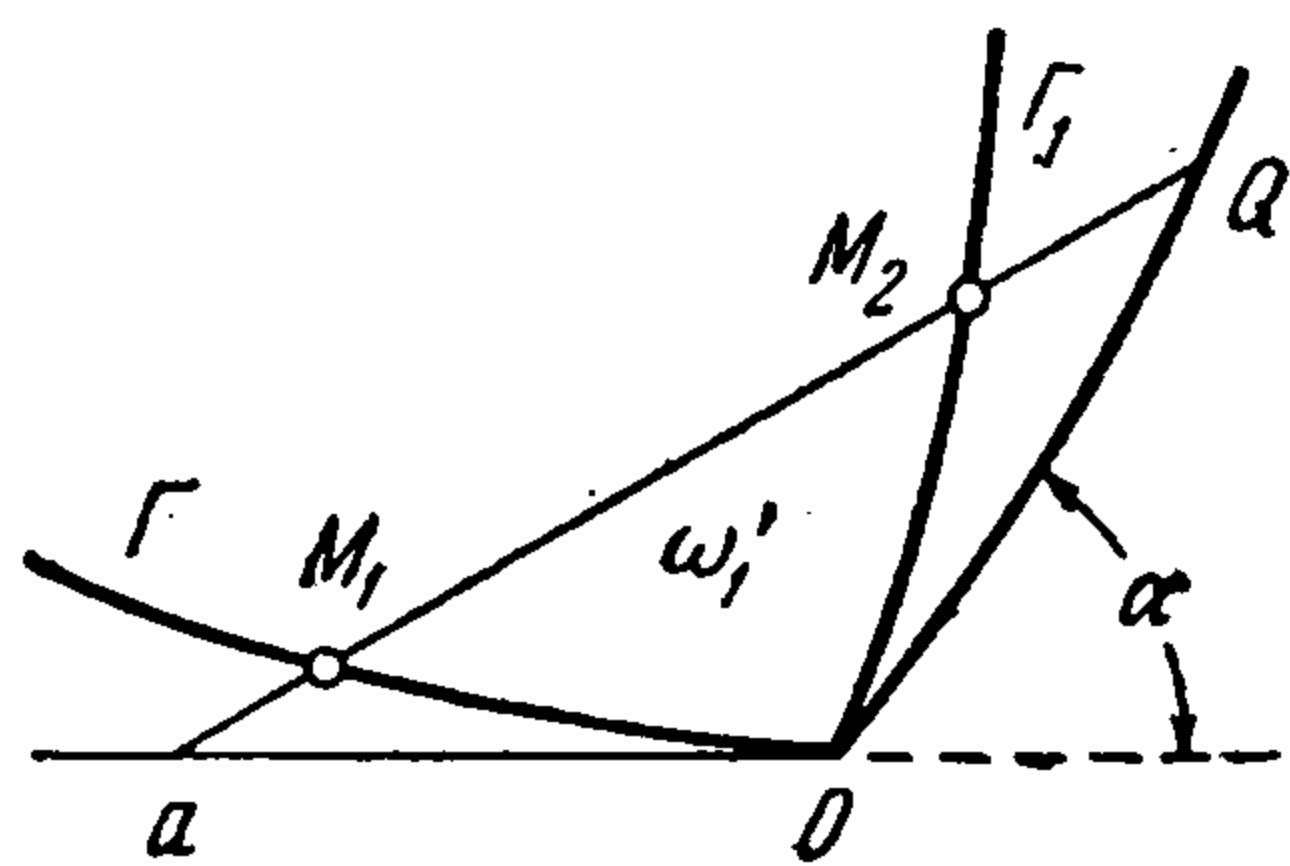
$$\frac{\text{mes } \omega_1}{\text{mes } \Gamma_1} \geq \frac{\text{mes } \omega_1 - \text{mes } \omega_1'}{\text{mes } \Gamma_1 - \text{mes } \gamma + l} = \frac{\text{mes } \omega_1 - O(a^2)}{\text{mes } \Gamma_1 - a[2 - \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}] + O(a^2)}$$

или

$$a[2 - \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}] \leq O(a^2)$$

Последнее неравенство невозможно при малых значениях a . Лемма 2.3 доказана.

Доказательство леммы 2.4. Оценка K снизу очевидна, так как, если d — внутренний радиус области ω , то в качестве подобласти ω' можно взять круг радиуса d . Докажем справедливость оценки K сверху. Покроем плоскость квадратами со стороной $4d$. Может случиться, что вся область попадет в один квадрат. Спроектируем тогда область ω на одну из сторон этого квадрата. Пусть величина проекции равна t .



Фиг. 5

Очевидно, $\text{mes } \omega \leq 4td$ и $\text{mes } \Gamma \geq 2t$, откуда $\text{mes } \omega / \text{mes } \Gamma \leq 2d$. Утверждение леммы в этом случае выполнено. Пусть область ω покрывается, по меньшей мере двумя квадратами. Рассмотрим квадраты, все стороны которых лежат внутри ω . Легко видеть, что разбиение плоскости на квадраты всегда можно выбрать так, что

число таких квадратов не превышает $p - 1$, где p — число связностей области ω . Исключим эти квадраты из рассмотрения. Возьмем произвольный квадрат из оставшихся, имеющий хотя бы одну общую точку с областью ω . Могут представиться два случая: (а) центр квадрата принадлежит ω , (б) центр квадрата не принадлежит ω . Заметим, что разбиение плоскости на квадраты всегда можно выбрать таким, что хотя бы один квадрат первого типа участвует в покрытии ω . Остановимся на случае (а). Ясно, что площадь части области ω , заключенной внутри квадрата, не превосходит $16d^2$, а длина части границы Γ , попавшей в квадрат, не меньше $2d$. Рассмотрим случай (б). В выбранном квадрате построим concentричный ему квадрат со стороной a . Будем увеличивать a от нуля до тех пор, пока впервые не коснемся области ω . Тогда площадь части области ω , заключенной в исходном квадрате, не превосходит $16d^2 - a^2$, а длина части границы Γ , попавшей в этот квадрат, не меньше, чем $4d - a$.

Пусть область ω покрывается r_1 — квадратами первого типа ($r_1 \geq 1$) и r_2 — квадратами второго типа. Тогда

$$\frac{\text{mes } \omega}{\text{mes } \Gamma} \leq \frac{16r_1d^2 + (16d^2 - a^2)r_2 + (p - 1)16d^2}{2r_1d + (4d - a)r_2} \leq 8pd$$

Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим последовательность функций $u_n(x, y)$, из $C_0^\infty(\omega)$, аппроксимирующую в метрике пространства $W_2^{(1)}(\omega)$ функцию $u(x, y)$. Перейдем от функции $u_n(x, y)$ к $u_n^*(x, y)$, полученной из $u_n(x, y)$ заклеиванием локальных минимумов горизонтальными плоскостями (так, как это было сделано в доказательстве леммы 2.2 при переходе от Q_n к Q_n^*). Очевидно, что при этом $J(u_n^*) \leq J(u_n)$, где $J(u)$ — функционал (1.5). От функции $u_n^*(x, y)$ перейдем к $v_n(x, y)$, полученной из $u_n^*(x, y)$ срезыванием локальных максимумов горизонтальными плоскостями, причем срезывание каждого локального максимума можно продолжать до тех пор, пока внутренний радиус среза d не будет равен $\tau_0/8rc$. Первый этап доказательства теоремы 2.2 состоит в том, что

$$J(v_n) \leq J(u_n^*) \quad (\text{A.12})$$

Поставленная задача является локальной, т. е. нужно показать, что при последовательном срезывании одного локального максимума функции u_n^* значения функционала (1.5) убывают, если внутренний радиус d срезов не превосходит $\tau_0/8rc$. Пусть $h(x, y)$ — произвольная непрерывная функция, принадлежащая пространству

$W_2^{(1)}(\omega)$ и $g(x, y)$ получается из $h(x, y)$ срезыванием локального максимума $h(x, y)$ на высоте H . Пусть A — область среза, т. е. область, на которой функции $h(x, y)$ и $g(x, y)$ различны. Если внутренний радиус d области A не превосходит $\tau_0 / 8\rho c$, то

$$J(g) \leq J(h) \tag{A.13}$$

Неравенство (A.13), очевидно, следует из неравенства

$$\int_A \left\{ \frac{\mu}{2} |\text{grad } h|^2 + \tau_0 |\text{grad } h| - ch \right\} d\omega \geq - \int_A H d\omega \tag{A.14}$$

Обозначим $h - H$ через $\psi(x, y)$. Тогда (A.14) переписывается в виде

$$\int_A \left\{ \frac{\mu}{2} |\text{grad } \psi|^2 + \tau_0 |\text{grad } \psi| - c\psi \right\} d\omega \geq 0 \tag{A.15}$$

Усилим неравенство (A.15)

$$\frac{\tau_0}{c} \int_A |\text{grad } \psi| d\omega \geq \int_A \psi d\omega \tag{A.16}$$

Неравенство (A.16), в силу лемм 2.2, 2.4, выполнено, если $\tau_0 / c > 8\rho d$ или $d < \tau_0 / 8\rho c$, где d — внутренний радиус области A . Таким образом, в силу неравенства (A.12), последовательность $v_n(x, y)$ является минимизирующей (1.5), и, следовательно, по теореме 4.4 последовательность $v_n(x, y)$ сходится в метрике пространства $W_2^{(1)}(\omega)$ к $u(x, y)$. Приступим теперь к доказательству непрерывности функции $u(x, y)$. Рассмотрим произвольную точку (x_0, y_0) в ω и построим с центром в этой точке два круга K_ρ и $K_{2\rho}$ с радиусами ρ и 2ρ соответственно. Величину ρ выберем настолько малой, чтобы $K_{2\rho}$ лежал в ω и $\rho < \tau_0 / 16\rho c$. При таком выборе ρ через каждую точку круга K_ρ проходит линия уровня функции $v_n(x, y)$, пересекающая границу круга $K_{2\rho}$.

Действительно, если бы в круге K_ρ существовала точка, из которой не выходит линия уровня, пересекающая круг радиуса $K_{2\rho}$, то в круге $K_{2\rho}$ существуют локальный минимум или максимум, чего не может быть в силу конструкции функций $v_n(x, y)$. Пусть

$$\inf_{(x,y) \in K_\rho} v_n(x, y) = v_n(x_1, y_1); \quad \sup_{(x,y) \in K_\rho} v_n(x, y) = v_n(x_2, y_2),$$

Обозначим через K_r круг радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и $\rho \leq r \leq 2\rho$. Выпустим из точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) линии уровня. Эти линии пересекут границу K_r в точках $(r, \varphi_1(r))$, $(r, \varphi_2(r))$. Очевидно, что

$$\text{osc } v_n(x, y) = \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (x, y) \in K_\rho$$

где $\text{osc } v_n(x, y)$, $(x, y) \in K_\rho$ — колебание функции v_n в круге K_ρ .

Далее

$$[\text{osc } v_n(x, y)]^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} r^2 |\text{grad } v_n|^2 d\varphi, \quad (x, y) \in K_\rho$$

или

$$[\text{osc } v_n(x, y)]^2 \ln 2 = \int_\rho^{2\rho} [\text{osc } v_n(x, y)]^2 \frac{dr}{r} \leq 2\pi \int_{K_{2\rho}/K_\rho} |\text{grad } v_n|^2 d\omega, \quad (x, y) \in K_\rho$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\omega |\text{grad } v_n|^2 d\omega = \int_\omega |\text{grad } u|^2 d\omega$$

то, в силу абсолютной непрерывности интеграла как функции множества, любому $\varepsilon > 0$ можно сопоставить N и δ такие, что $\rho < \delta$, $n > N$ и

$$[\text{osc } v_n(x, y)]^2 \ln 2 \leq \varepsilon, (x, y) \in K \quad (\text{A.17})$$

В силу условия (A.17) и краевого условия (1.6), которому подчинены все функции v_n , последовательность $v_n(x, y)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Используя теорему Арцела, получаем, что функция $u(x, y)$ непрерывна.

Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим последовательность $v_n(x, y)$, построенную в доказательстве теоремы 2.2. Так как функция $v_n(x, y)$ непрерывна в ω , неотрицательна и обращается в нуль на границе Γ , то абсолютный максимум $v_n(x, y)$ достигается на некотором множестве, каждая связная компонента которого содержит круг радиуса $\tau_0 / 8pc$. Легко видеть, что функция $u(x, y)$, являющаяся равномерным пределом последовательности $v_n(x, y)$, обладает тем же свойством. Относительно функции $u(x, y)$, очевидно, можно сделать более сильное утверждение. Именно, каждый локальный максимум функции $u(x, y)$ достигается на множестве, каждая связная компонента которого содержит круг радиуса $\tau_0 / 8pc$.

Теорема 2.1 утверждает, что

$$\int_{\omega} |u| d\omega \leq \frac{2K}{\mu} \text{mes } \omega (cK - \tau_0)$$

Но так как

$$\int_{\omega} |u| d\omega \geq \max |u| \left(\frac{\tau_0}{8pc} \right)^2 \pi$$

то

$$\max |u| \leq \left(\frac{8pc}{\tau_0} \right)^2 \frac{2K \text{mes } \omega (cK - \tau_0)}{\mu \pi}$$

Покажем, что множество A , на котором достигается локальный максимум $u(x, y)$, не может содержать круга радиуса, большего $2\tau_0 / c$. Предположим противное. Пусть A содержит круг K_r радиуса $r = (2\tau_0 / c) + \varepsilon$.

В случае, когда область ω — круг, известен явный вид функции, минимизирующей функционал (1.5) [14], причем эта функция отлична от нуля, если $r > 2\tau_0 / c$. Рассмотрим функцию $u_0(x, y)$, равную известной минимизирующей функции в круге K_r и нулю вне круга. Тогда легко проверить, что $J(u_0 + u) < J(u)$. Итак, действительно, множество A не может содержать круг радиуса, большего $2\tau_0 / c$. Теорема 2.3 доказана.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.7, докажем следующую лемму.

Лемма А.1. Пусть на $[a, b]$ определены две функции $f(x)$ и $g(x)$ так, что

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b), f(x) \geq g(x), f''(x) \geq 0$$

Тогда

$$\int_a^b |f'|^\alpha dx \leq \int_a^b |g'|^\alpha dx, \quad \alpha \geq 1 \quad (\text{A.18})$$

Доказательство. Докажем (A.18), когда $f(x) = kx + b$. Из неравенства Гельдера следует

$$\int_a^b |g'|^\alpha dx \geq \left(\frac{1}{b-a} \right)^{\alpha/\alpha'} \left(\int_a^b |g'| dx \right)^\alpha, \quad 1/\alpha + 1/\alpha' = 1$$

Но

$$\left(\frac{1}{b-a} \right)^{\alpha/\alpha'} \left(\int_a^b |g'| dx \right)^\alpha \geq \left(\frac{1}{b-a} \right)^{\alpha/\alpha'} (|g(b) - g(a)|) = k^\alpha (b-a)$$

С другой стороны,

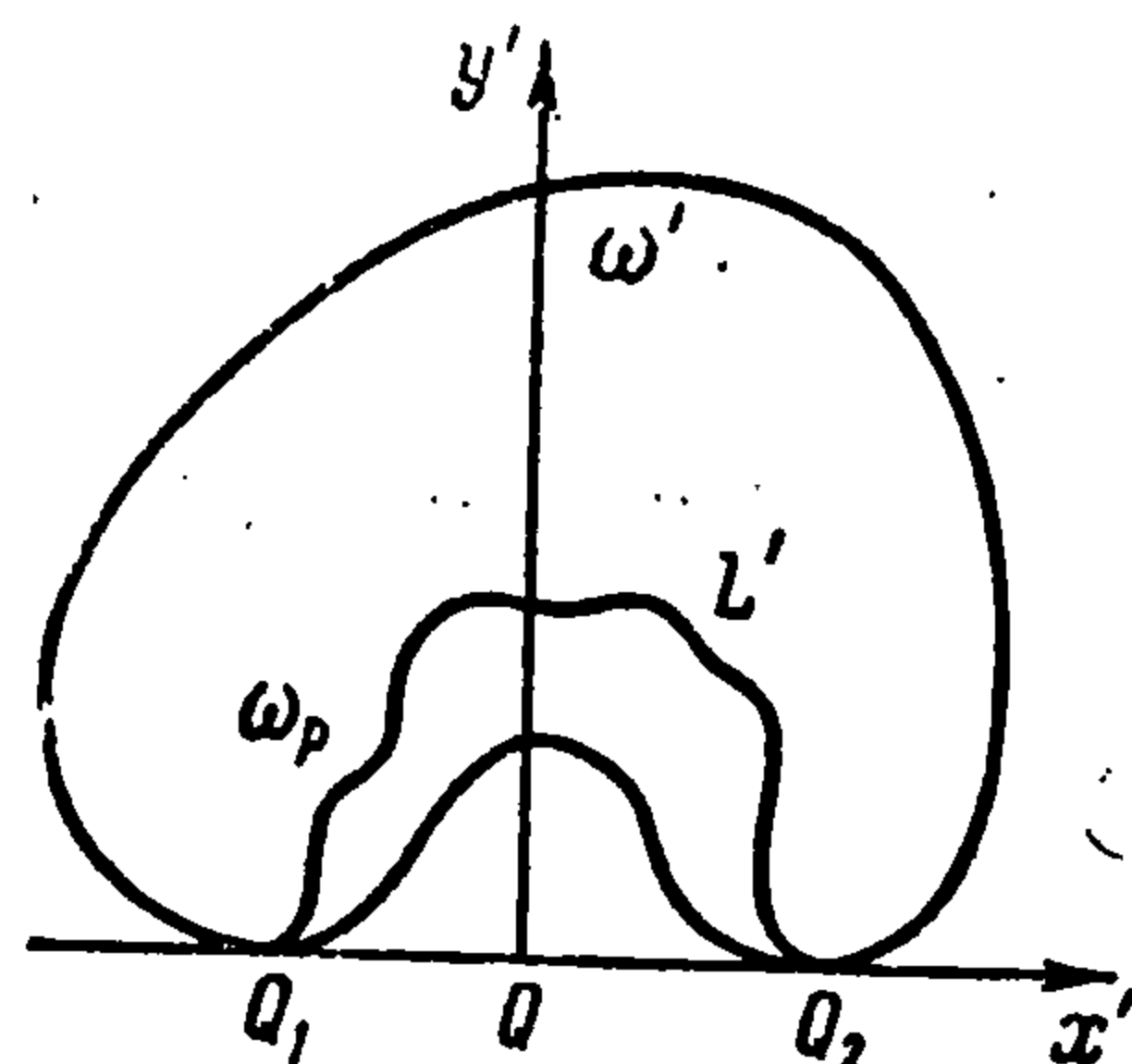
$$\int_a^b |f'|^\alpha dx = k^\alpha (b - a)$$

Тем самым доказательство для $f(x) = kx + p$ закончено. Пусть $a < x_0 < b$. Проведем в точке x_0 касательную прямую к $f(x)$. Эта касательная лежит под кривой $f(x)$ (так как $f''(x) \geq 0$) и пересекает кривую $g(x)$, по крайней мере, в двух точках x_0^1, x_0^2 . Перейдем от кривой $g(x)$ к кривой $g_1(x)$, которая вне отрезка $[x_0^1, x_0^2]$ совпадает с $g(x)$, а на отрезке $[x_0^1, x_0^2]$ совпадает с касательной к $f(x)$ в точке x_0 . Тогда в силу проведенного выше рассуждения

$$\int_a^b |g'|^\alpha dx \geq \int_a^b |g_1'|^\alpha dx$$

Далее, проводя касательную к $f(x)$ в другой точке и заменяя $g_1(x)$ на соответствующем участке линейной функцией, получим $g_2(x)$ и

$$\int_a^b |g_1'(x)|^\alpha dx \geq \int_a^b |g_2'(x)|^\alpha dx$$



Фиг. 6

Повторяя этот процесс неограниченно, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2.7. Доказательство проводится методом от противного.

Пусть P_1 и P_2 — две точки связной части внутренней границы Γ' связной компоненты области течения ω' , и на отрезке $[P_1, P_2]$ существует точка Q , не принадлежащая ω' . Тогда вместе с Q области $\omega \setminus \omega'$ принадлежит целый интервал отрезка $[P_1, P_2]$ с концами Q_1, Q_2 , лежащими на Γ' ($[Q_1, Q_2] \subseteq [P_1, P_2]$). Пусть на границе области ω' выбрано положительное направление обхода (область ω' при обходе остается слева) и пусть дуга $Q_1 Q^* Q_2$ согласована с направлением обхода, где $Q^* \in \Gamma'$ и Q^* не принадлежит $[Q_1, Q_2]$. Введем новую систему координат, направив ось ox_1 вдоль отрезка $[P_1, P_2]$, ось Oy_1 — перпендикулярно к $[P_1, P_2]$ в сторону Q^* . Начало координат возьмем в точке Q .

Функцию, минимизирующую функционал (1.5) в новых переменных, обозначим $v(x_1, y_1)$. Рассмотрим цилиндрические поверхности $z = f(y_1)$ такие, что $f(0), f(y_1) > 0$ при $y_1 > 0, f'(y_1) \geq 0, f''(y_1) \geq 0$. Можно показать, что существует такая цилиндрическая поверхность указанного вида, которая пересекает поверхность $z = v(x_1, y_1)$ по линии L , идущей из точки Q_1 в Q_2 с проекцией L' , расположенной целиком в ω' . Рассмотрим область ω_p' , являющуюся расширением области ω' до отрезка $[Q_1, Q_2]$ включительно (фиг. 6). Пусть S — область, ограниченная контуром, состоящим из кривой L' и отрезка $[Q_1, Q_2]$. Положим $v_0(x_1, y_1)$ равной $v(x_1, y_1)$ в ω' и равной нулю в $\omega_p' \setminus \omega'$. В области ω_p' введем еще функцию

$$w(x_1, y_1) = \begin{cases} v(x_1, y_1) & \text{в } \omega' \setminus S \\ \max\{f(y_1), v_0(x_1, y_1)\} & \text{в } S \end{cases}$$

Покажем, что

(A.19)

$$\int_{\omega_p'} \left\{ \frac{\mu}{2} |\text{grad } w|^2 + \tau_0 |\text{grad } w| - cw \right\} d\omega \leq \int_{\omega_p'} \left\{ \frac{\mu}{2} |\text{grad } v_0|^2 + \tau_0 |\text{grad } v_0| - cv_0 \right\} d\omega$$

Для этого достаточно установить, что

$$1^\circ \quad w \geq v_0 \quad \text{в } \omega_p'$$

$$2^\circ \quad \int_{\omega_p'} |\text{grad } w|^\alpha d\omega \geq \int_{\omega_p'} |\text{grad } v_0|^\beta d\omega, \quad \alpha \geq 1$$

Первое очевидно в силу построения функции w . Для доказательства второго неравенства заметим, что интегралы следует рассматривать лишь на подобласти области S , где w и v_0 различны. Тогда, представляя двойной интеграл через повторные, получим, что 2° эквивалентно

$$\int_a^b dx \sum_{i=1}^{\infty} \int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} |f'(y)|^\alpha dy \leq \int_a^b dx \sum_{i=1}^{\infty} \int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} |\text{grad } v_0|^\alpha dy \quad (\text{A.20})$$

Неравенство (A.20) следует из неравенства

$$\int_a^b dx \sum_{i=1}^{\infty} \int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} |f'(y)|^\alpha dy \leq \int_a^b dx \sum_{i=1}^{\infty} \int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} \left| \frac{\partial v_0}{\partial y} \right|^\alpha dy \quad (\text{A.21})$$

Неравенство (A.21) следует из леммы A.1, утверждающей, что

$$\int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} |f'(y)|^\alpha dy \leq \int_{y_i(x)}^{y_{i+1}(x)} \left| \frac{\partial v_0}{\partial y} \right|^\alpha dy$$

Итак, неравенство (A.19) доказано. Продолжим $w(x_1, y_1)$ из ω_p' нулем на область $\omega \setminus \omega_p'$ и рассмотрим функцию

$$v^*(x_1, y_1) = \max \{v(x_1, y_1); w(x_1, y_1)\}$$

Легко видеть, что $J(v^*) \leq J(v)$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.7.

Поступила 18 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Shwedov F. N. La rigidité de liquides. Rapport Congr. Intern. Phys., Paris, v. 1, p. 478—486, 1900.
2. Bingham F. C. Fluidity and Plasticity. New York, 1922.
3. Генки Г. Пространственная задача упругого и пластического равновесия. Изв. АН СССР, ОТН, 1937, № 2.
4. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Уч. зап. МГУ, Механика, 1940, вып. 39.
5. Воларович М. П. Исследование реологических свойств дисперсных систем (обзор). Коллоидн. журнал, 1954, т. 16, № 2.
6. Мирзаджанзаде А. Х. Некоторые вопросы движения вязких и вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Изд. Азнефть, 1959.
7. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластического течения. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 2.
8. Oldroyd J. G. Two-dimensional plastic flow of a Bingham Solid. A plastic boundary—layer theory for slow motion. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, vol. 43, p. 3.
9. Мясников В. П. О постановке задачи обтекания тел вязко-пластической жидкостью. ПМТФ, 1962, № 4.
10. Oldroyd J. G. A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham Solid., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, vol. 43, p. 1.
11. Прагер W. Mises Memorial volume. New York, 1954, p. 208.
12. Фрейденталь А., Гейрингер X. Математические теории неупругой сплошной среды. Физматгиз, 1962.
13. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Изд. иностр. лит., 1956.
14. Buxingham E. On plastic flow through capillary tubes. Proc. Amer. Soc. Test. Math., 1921, vol. 21, p. 1154.
15. Булина И. Г., Мясников В. П., Савин В. Г. Экспериментальное исследование обтекания затупленных тел плоским потоком вязко-пластической среды. ПМТФ, 1964, № 5.
16. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
17. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.
18. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.