Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ПРИМЕР РОЖДЕНИЯ ВТОРИЧНОГО СТАЦИОНАРНОГО ИЛИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Хорошо известно, что решение стационарной задачи для уравнений Навье — Стокса единственно «в малом» (при малом числе Рейнольдса, малых массовых силах и т. д.). Однако эксперименты и приближенные расчеты по методу Галёркина показывают, что, вообще говоря, единственности нет. Например, при потере устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами, как показывает опыт, может возникать вторичное стационарное течение. До сих пор, однако, ни в одном случае неединственность не была доказана строго.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о бифуркации стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. В § 1 показано, что к этой задаче приложима теория бифуркации решений операторных уравнений, развитая в [1]. Таким образом, вопрос о бифуркации для уравнений Навье — Стокса сводится к отысканию нечетно-кратных собственных значений соответствующей линеаризованной задачи.

В § 2 рассматривается двумерная задача для уравнений Навье — Стокса с условием периодичности функции тока по x, y с периодами соответственно $(2\pi / \alpha_0)$, 2π.

В работе [2] исследована (в обычной линейной постановке) устойчивость решения этой задачи $\psi_0 = -(\gamma / \nu) \cos y$ и показано, что при $\alpha_0 > 1$ всегда имеет место устойчивость, а при достаточно малых α_0, фиксированном (γ / ν) и малых ν устойчивость теряется. Обоснование метода линеаризации дано в [4].

В § 2 настоящей работы показано, что при $\alpha_0 \geqslant 1$ стационарное решение ψ_0 устойчиво «в целом» и единственно (2.2), а при любом $\alpha_0 < 1$ и достаточно больших значениях параметра $\lambda = (\gamma / \nu^2)$ от решения ψ_0 ответвляются новые стационарные решения. (Уточняя результат из [2] методом § 2 (см. лемму 2.1), нетрудно показать, что при $\lambda > \lambda(\alpha_0)$, где $\lambda(\alpha_0)$ — найденная в § 2 (2.3) точка бифуркации, решение ψ_0 неустойчиво.)

Основной результат о неединственности сформулирован в теореме 2, где указано точное число точек бифуркации в зависимости от α_0 и сделаны некоторые выводы о спектре. Из теоремы 2 легко следует теорема 3, в которой дан пример рождения периодического по времени течения при потере устойчивости стационарного, а также пример рождения условно-периодического течения при потере устойчивости периодического.

§ 1. О бифуркации стационарных решений уравнений Навье — Стокса.

1.1. *Сведение к операторному уравнению.* Рассмотрим стационарную задачу для уравнений Навье—Стокса в ограниченной области D с границей S

$$\nu\Delta v_i' = v_k' \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' \equiv \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{v}'|_S = \mathbf{a} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ — заданные векторы; $\mathbf{v}'(x)$, $P(x)$ — неизвестные скорость и давление. Примем обычное соглашение о пропуске знака суммирования по повторяющимся индексам.

Допустим, что $\mathbf{F}$, а зависят от некоторого параметра γ и что при любом γ $(-\infty < \gamma < \infty)$ задача (1.1) допускает решение вида

$$\mathbf{v}' = \gamma \mathbf{v}_0(x), \qquad P = P_0(x_0, \gamma) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}_0$ от γ уже не зависит. Хорошо известно, что при малых γ это решение единственно. Дальше будем интересоваться решениями задачи (1.1), отличными от (1.2). Будем разыскивать их в виде

$$\mathbf{v}' = \gamma \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v}_0, \qquad P = (1/\nu\gamma)\, p + P_0 \tag{1.3}$$

Тогда для определения $\mathbf{v}$, p получим задачу

$$\Delta v_i = \lambda \left[v_{0k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \operatorname{div} v \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad v|_S = 0$$
$$(\lambda = \gamma / \nu) \tag{1.4}$$

Наряду с задачей (1.4) будем рассматривать соответствующую ей линеаризованную задачу

$$\Delta u_i = \lambda \left[v_{0k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{u}|_S = 0 \tag{1.5}$$

и задачу, сопряженную к (1.5),

$$\Delta w_i = -\lambda v_{0k} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{w}|_S = 0 \tag{1.6}$$

Эти три задачи сведем к уравнениям с вполне непрерывными операторами. Это достигается по существу обращением операторов, отвечающих $\lambda = 0$. Введем гильбертово пространство H_1 — замыкание множества гладких соленоидальных векторов, исчезающих вблизи S, по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} = \int_D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}\, dx = \int_D \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}\, dx \tag{1.7}$$

Согласно теореме вложения [3] для всех $\mathbf{u} \in H_1$, справедливо неравенство

$$\| \mathbf{u} \|_{L_p} = \left(\int_D |\mathbf{u}|^p dx \right)^{1/p} \leqslant c_p \| \mathbf{u} \|_{H_1} \qquad (1 \leqslant p \leqslant 6) \tag{1.8}$$

где c_p зависит только от области D и от p, но не от $\mathbf{u}$.

Обобщенными собственными векторами задач (1.4) — (1.6) назовем соответственно векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in H_1$, отличные от нуля и удовлетворяющие интегральным тождествам

$$(\mathbf{v}, \mathbf{\Phi})_{H_1} = -\lambda \int_D \left[v_{0k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] \Phi_i\, dx \tag{1.9}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{\Phi})_{H_1} = -\lambda \int_D \left[v_{0k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right] \Phi_i\, dx \tag{1.10}$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{\Phi})_{H_1} = \lambda \int_D v_{0k} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right) \Phi_i\, dx \tag{1.11}$$

при любом $\mathbf{\Phi} \in H_1$ и некотором λ, называемом характеристическим значением. Из результатов статьи [4] (см. также [5]) следует, что при достаточно гладких $\mathbf{F}$, S, а обобщенные собственные векторы будут вместе с некоторыми функциями $p(x)$, $q(x)$, $Q(x)$ образовывать решения задач (1.4) — (1.6) в классическом смысле.

Определим теперь действующие в H_1 операторы K, A, A^* требованием, чтобы интегральные тождества

$$(K\mathbf{v}, \Phi)_{H_1} = -\int_D \left[v_{0k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right]\Phi_i\,dx \qquad (1.12)$$

$$(A\mathbf{u}, \Phi)_{H_1} = -\int_D \left(v_{0k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}\right)\Phi_i\,dx \qquad (1.13)$$

$$(A^*\mathbf{w}, \Phi)_{H_1} = \int_D v_{0k}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right)\Phi_i\,dx \qquad (1.14)$$

выполнялись для любых $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \Phi \in H_1$.

Лемма 1.1. Операторы K, A, A^* вполне непрерывны в H_1.

Доказательство для оператора K проведено в [4]. Для A и A^* оно вполне аналогично.

Лемма 1.2. Задачи отыскания обобщенных собственных векторов, определенных в (1.9) — (1.11), эквивалентны соответственно операторным уравнениям

$$\mathbf{v} = \lambda K\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u}, \qquad \mathbf{w} = \lambda A^*\mathbf{w} \qquad (1.15)$$

Справедливость этой леммы сразу следует из определений обобщенных собственных векторов и операторов K, A, A^*.

Лемма 1.3. Оператор A является дифференциалом Фреше оператора K в точке $\mathbf{v} = 0$.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim \frac{\|K\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|_{H_1}}{\|\mathbf{u}\|_{H_1}} = 0 \qquad \text{при } \|\mathbf{u}\|_{H_1} \to 0 \qquad (1.16)$$

Из (1.12), (1.13) выводим, что

$$(K\mathbf{u} - A\mathbf{u}, \Phi)_{H_1} = -\int_D u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Phi_i\,dx = \int_D \mathbf{u}\times \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\Phi\,dx \qquad (1.17)$$

В (1.17) полагаем $\Phi = K\mathbf{u} - A\mathbf{u}$. Оценивая правую часть (1.17) при помощи неравенства Гельдера с показателями $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 4$ и применяя неравенство вложения (1.8), получим

$$\|K\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|_{H_1}^2 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{L_4}\cdot\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{L_2}\|K\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|_{L_4} \leqslant c_4^2\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2\cdot\|K\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|_{H_1}$$

Таким образом,

$$\|K\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|_{H_1} \leqslant c_4^2\|\mathbf{u}\|_{H_1}^2 \qquad (1.18)$$

откуда и следует (1.16).

Лемма 1.4. Оператор A^* является сопряженным к оператору A в H_1.

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}, \Phi$ — произвольные векторы из H_1. Интегрируя (1.14) по частям, найдем

$$(A^*\mathbf{w}, \Phi)_{H_1} = -\int_D w_i\left[v_{0k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} + \Phi_k\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}\right]dx = (\mathbf{w}, A\Phi)_{H_1} \qquad (1.19)$$

что и требовалось доказать.

Теперь можем применить к отысканию стационарных течений, отличных от (1.2), теорию бифуркации решений нелинейных операторных уравнений [1].

Вещественное число λ_0 называется точкой бифуркации оператора K, если по любым ε, $\delta > 0$ можно указать такое характеристическое число λ оператора K, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ и, хотя бы для одного собственного вектора $\mathbf{v}$ оператора K, соответствующего этому характеристическому числу, $\|\mathbf{v}\|_{H_1} < \delta$. Точками бифуркации оператора K могут быть только характеристические числа его дифференциала Фреше в нуле — оператора A.

Теорема М. А. Красносельского [1] в рассматриваемом случае дает следующее: пусть λ_0 — характеристическое число оператора A, имеющее нечетную кратность. Тогда число λ_0 — точка бифуркации оператора K, причем этой точке бифуркации отвечает непрерывная ветвь собственных векторов операторов K.

Разъясним применяемые здесь понятия. Пусть λ_0 — характеристическое число оператора A и $\mathbf{u}$ — какой-нибудь из отвечающих ему собственных векторов. Рассмотрим следующие задачи:

$$\mathbf{u} = \lambda_0 A\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_1 = \lambda_0 A\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0, \ldots, \qquad u_r = \lambda_0 A\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_{r-1}, \ldots \tag{1.20}$$

Как известно, из вполне непрерывности оператора A вытекает, что среди них лишь конечное число r разрешимых. При этом r называется рангом собственного вектора $\mathbf{u}$.

Если $r = 1$, будем говорить, что собственный вектор $\mathbf{u}$ простой. Векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{r-1}$ называются присоединенными к собственному вектору $\mathbf{u}$. Линейная оболочка всех собственных и присоединенных векторов, отвечающих данному характеристическому числу λ_0, называется инвариантным подпространством оператора A, соответствующим характеристическому числу λ_0.

Размерность n этого подпространства называется кратностью характеристического числа λ_0. Наибольший из рангов собственных векторов называется рангом характеристического числа λ_0.

Если $n = 1$, то λ_0 называется простым, а если $n > 1$ — кратным характеристическим числом.

О спектре оператора K (т. е. совокупности его характеристических значений) можно кое-что узнать при помощи следующего соображения. При всяком λ, отличном от характеристических чисел оператора A, индекс неподвижной точки $\mathbf{v} = 0$ векторного поля $(I - K)\mathbf{v}$ равен 1 по абсолютной величине и меняет знак, когда λ переходит через нечетнократное характеристическое число оператора A. С другой стороны, во многих случаях удается вычислить вращение векторного поля $I - K$ на сферах большого радиуса.

Например, в [4] показано, что оно равняется $+1$, если поток вектора $\mathbf{a}$ сквозь каждую компоненту границы S равен нулю. В этом случае получаем (см. [1]), что интервал между двумя характеристическими числами оператора A, где индекс неподвижной точки $\mathbf{v} = 0$ есть -1, целиком принадлежит спектру оператора K.

1.2. *Об определении кратности характеристического числа.* Выше показано, что для доказательства существования точки бифуркации оператора K надо, во-первых, установить, что оператор A имеет вещественное характеристическое число, и, во-вторых, показать, что оно нечетнократно. Но оператор A — несамосопряженный и, вообще говоря, может не иметь вещественных характеристических значений. Например, если $\mathbf{v}_0(x)$ представляет движение жидкости как твердого тела, то вещественных собственных значений не существует. Более того, в этом случае стационарное решение (1.2) единственно при любом γ (эти факты сразу следуют из (1.9), (1.10), если положить там соответственно $\mathbf{\Phi} = \mathbf{v}$, $\mathbf{\Phi} = \mathbf{u}$ и заметить, что правые части при этом исчезают).

Иногда бывает удобно рассматривать оператор A на комплексной оболочке $\mathbf{H}_1$ пространства H_1, а для установления вещественности собственного числа и простоты собственных векторов пользоваться следующей простой леммой.

Лемма 1.5. Пусть λ_0 — характеристическое число вещественного (т. е. переводящего вещественные векторы в вещественные) линейного оператора A, действующего в $\mathbf{H}_1$. Для того чтобы λ_0 было вещественным и имело ранг 1, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному вектору $\mathbf{u}$ с характеристическим числом λ_0 отвечал хотя бы один собственный вектор $\mathbf{w}$ сопряженного оператора A^* с тем же характеристическим числом и не ортогональный к $\mathbf{u}$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} \neq 0 \tag{1.21}$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$\mathbf{u}_1 = \lambda_0 A \mathbf{u}_1 + \mathbf{u} \tag{1.22}$$

будет выполнение равенства

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} = 0 \tag{1.23}$$

где $\mathbf{w}$ — любое решение уравнения $\mathbf{w} = \lambda_0^* A^* \mathbf{w}$. Если λ_0 вещественно, то $\lambda_0^* = \lambda_0$, и необходимость условия (1.21) доказана.

Пусть теперь (1.21) выполняется. Тогда имеем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} = (\lambda_0 A\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} = \lambda_0 (\mathbf{u}, A^*\mathbf{w})_{H_1} = \lambda_0 \left(\mathbf{u}, \frac{1}{\lambda_0} \mathbf{w}\right)_{H_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0^*} (\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H}, \tag{1.24}$$

и, так как $(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{H_1} \neq 0$, получаем, что $\lambda_0 = \lambda_0^*$. Теперь из (1.21) следует неразрешимость уравнения (1.22); значит, $\mathbf{u}$ — простой собственный вектор. Лемма доказана.

Важно заметить, что для проверки условия (1.21) можно использовать приближенные значения λ_0 и собственных векторов. Между прочим, это позволяет установить существование вещественных положительных собственных значений в спектре неустойчивости течения Куэтта; в работе [6] найдены собственные значения с положительной вещественной частью.

Существуют широкие классы линейных операторов с простыми собственными векторами — таковы, например, самосопряженные операторы. Однако даже для таких операторов подсчет кратности собственного числа — трудная задача. Для примера рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа в прямоугольнике $\{0 \leqslant x \leqslant \pi / \alpha, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ с условием исчезания функции на границе. Собственные значения суть числа $\lambda_{kl} = -(\alpha^2 k^2 + l^2)$ $(k, l = 0, 1, 2, \ldots; \lambda_{kl} \neq 0)$. Если α^2 иррационально, то все они простые. Для рациональных α^2 могут найтись и кратные. Так, при $\alpha = 1$ все λ_{kl} с $k \neq l$ — кратные.

Иногда можно добиться единственности собственного вектора, сужая пространство, в котором ищется решение. Пусть, например, решается задача

$$u'' = -\lambda (u + u^3), \qquad u(-\pi) = u(\pi), \qquad u'(-\pi) = u'(\pi) \tag{1.25}$$

Обращая оператор d^2 / dx^2, ее можно свести к уравнению с вполне непрерывным оператором. Задача о собственных значениях его дифференциала Фреше эквивалентна краевой задаче (1.25) с отброшенным членом u^3. Характеристическими значениями будут $\lambda_k = k^2$, и каждому из них отвечают собственные функции $\varphi_{k_1} = \sin kx$, $\varphi_{k_2} = \cos kx$. Так как ранг λ_k равен 1, получаем, что кратность его равна 2. Однако если разыскивать нечетные по x решения задачи (1.25), то функция φ_{k_2} «отсеется», собственные значения λ_k станут простыми, и можно утверждать, что каждое из них — точка бифуркации.

§ 2. Пример неединственности стационарного течения. 2.1. *Решения двумерных стационарных уравнений Навье — Стокса.* Уравнения

$$\nu \Delta \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla P - \mathbf{F}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

рассматриваем при условии периодичности скорости по x, y с периодами $2\pi / \alpha_0$, 2π соответственно. Кроме того, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\alpha_0}{4\pi^2} \int_D \mathbf{v}(x, y)\, dx\, dy = \mathbf{b} \tag{2.2}$$

где D — прямоугольник $\{|x| \leqslant \pi / \alpha_0, |y| \leqslant \pi\}$, а $\mathbf{b}$ — известный вектор. Возьмем $F_1 = -\gamma \sin y$, $F_2 = 0$, $\mathbf{b} = 0$. Введением функции тока ψ задача приводится к отысканию решения уравнения

$$\nu \Delta^2 \psi = \psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y - \gamma \cos y \tag{2.3}$$

периодического по x, y с периодами $2\pi / \alpha_0$, 2π. Чтобы фиксировать произвольную аддитивную постоянную в определении ψ, введем еще условие

$$\int_D \psi\, dx\, dy = 0 \tag{2.4}$$

Задача (2.3), (2.4) имеет, очевидно, решение

$$\psi_0 = -\gamma / \nu \cos y \tag{2.5}$$

Замена

$$\psi = \gamma / \nu\, (\varphi_0 - \cos y)$$

приведет уравнение (2.3) к виду

$$\Delta^2 \varphi_0 = \lambda\, [\varphi_{0y} \Delta \varphi_{0x} - \varphi_{0x} \Delta \varphi_{0y} + \sin y\, (\partial / \partial x)(\Delta \varphi_0 + \varphi_0)] \tag{2.6}$$

Соответствующая линеаризованная задача имеет вид

$$\Delta^2\varphi = \lambda \sin y \, (\partial / \partial x) \, (\Delta\varphi + \varphi) \qquad (\lambda = \gamma/\nu^2) \tag{2.7}$$

сопряженная задача

$$\Delta^2\Phi = -\lambda \, (1 + \Delta) \, (\partial / \partial x) \, (\Phi \sin y) \tag{2.8}$$

Функции φ_0, φ, Φ должны, конечно, удовлетворять условию периодичности по x, y и условию (2.4).

К исследованию задачи (2.1) — (2.3) применимы соображения предыдущего параграфа. Надо лишь по-другому определить пространство H_1: вместо исчезновения на границе следует потребовать, чтобы векторы из H_1 удовлетворяли теперь условию периодичности по x, y, а также однородному условию (2.2). Удобнее, однако, иметь здесь дело с функциями тока.

Определим гильбертово пространство H_2, как замыкание множества гладких функций, удовлетворяющих условию (2.4) и периодических с периодами $2\pi / \alpha_0$, 2π по x, y, по норме, порожденной произведением

$$(\psi_1, \psi_2)_{H_2} = \int_D \Delta\psi_1 \cdot \Delta\psi_2 \, dx \, dy$$

Определим операторы L, B, B^*, действующие в H_2, требуя, чтобы интегральные тождества

$$(L\varphi, \Phi)_{H_2} = \int_D \Delta\varphi \, (\varphi_x\Phi_y - \varphi_y\Phi_x) \, dx \, dy - \int_D \sin y \, (\Delta\varphi + \varphi) \, \Phi_x \, dx \, dy$$

$$(B\varphi, \Phi)_{H_2} = -\int_D \sin y \, (\Delta\varphi + \varphi) \, \Phi_x \, dx \, dy$$

$$(B^*\varphi, \Phi)_{H_2} = \int_D (1 + \Delta) \, (\varphi \sin y) \, \Phi_x \, dx \, dy$$

выполнялись при любых $\varphi, \Phi \in H_2$. Как и в § 1 (см. леммы 1.1—1.4), легко проверяется, что L, B, B^* — вполне-непрерывны, B — дифференциал Фреше оператора L, B^* — сопряженный к оператору B, а задачи (2.6), (2.7), (2.8) эквивалентны соответственно операторным уравнениям

$$\varphi_0 = \lambda L\varphi_0 \tag{2.9}$$

$$\varphi = \lambda B\varphi \tag{2.10}$$

$$\Phi = \lambda B^*\Phi \tag{2.11}$$

2.2. *Условие единственности и устойчивости. Теорема* 2.1. Пусть $\alpha_0 \geqslant 1$. Тогда, каковы бы ни были $\nu > 0$ и γ, стационарное решение (2.5) единственно, и к нему стремятся по норме H_2 при $t \to \infty$ все решения нестационарного уравнения Навье — Стокса

$$\partial\Delta\psi / \partial t + \psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y - \nu\Delta^2\psi = -\gamma \cos y \tag{2.12}$$

периодические по x, y с периодами $2\pi / \alpha_0$, 2π.

Доказательство. Положим в (2.12) $\psi = \psi_0 + \Phi$. Уравнение, которому удовлетворяет $\Phi = \Phi(x, y, t)$, имеет вид

$$\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + \Phi_y\Delta\Phi_x - \Phi_x\Delta\Phi_y + \frac{\gamma}{\nu} \sin y \frac{\partial}{\partial x} (\Delta\Phi + \Phi) - \nu\Delta^2\Phi = 0 \tag{2.13}$$

Умножая это уравнение на $\Delta\Phi + \Phi$ и интегрируя по прямоугольнику D, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_D [(\Delta\Phi)^2 - (\nabla\Phi)^2]\,dxdy + \nu\int\limits_D [(\nabla\Delta\Phi)^2 - (\Delta\Phi)^2]\,dxdy = 0 \qquad (2.14)$$

Разложим Φ в ряд Фурье по x, y

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} c_{kl} \exp^{[i(\alpha_0 kx + ly)]} \qquad (2.15)$$

Тогда получим

$$J_1^2 \equiv \int (\nabla\Phi)^2\,dxdy = \frac{4\pi^2}{\alpha_0}\sum_{k,l} (\alpha_0^2 k^2 + l^2)\,|\,c_{kl}\,|^2$$

$$J_2^2 \equiv \int\limits_D (\Delta\Phi)^2\,dxdy = \frac{4\pi^2}{\alpha_0}\sum_{k,l} (\alpha_0^2 k^2 + l^2)^2\,|\,c_{kl}\,|^2 \qquad (2.16)$$

$$J_3^2 = \int\limits_D (\nabla\Delta\Phi)^2\,dxdy = \frac{4\pi^2}{\alpha_0}\sum_{k,l} (\alpha_0^2 k^2 + l^2)^3\,|\,c_{kl}\,|^2$$

Из (2.16) при $\alpha_0 \geqslant 1$ легко вывести неравенства

$$J_1^2 \leqslant J_2^2 \leqslant J_3^2 \qquad (2.17)$$

$$K_1^2 \leqslant K_2^2 \qquad (K_1^2 = J_2^2 - J_1^2,\ K_2^2 = J_3^2 - J_2^2) \qquad (2.18)$$

$$K_1^2 \geqslant \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0^2} J_2^2 \qquad (2.19)$$

Из (2.14) выводим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} K_1^2 = -\nu K_2^2 \leqslant -\nu K_1^2, \qquad \frac{dK_1}{dt} \leqslant -\nu K_1 \qquad (2.20)$$

откуда вытекает, что

$$K_1(t) \leqslant e^{-\nu t} K_1(0) \qquad (2.21)$$

При $\alpha_0 > 1$ из (2.19), (2.21) следует, что

$$J_2^2(t) = \int\limits_D (\Delta\Phi)^2\,dxdy \to 0 \quad \text{при } t \to \infty \qquad (2.22)$$

и теорема в этом случае доказана. Заметим, что при $\alpha_0 > 1$ устойчивость имеет место даже для $\nu = 0$ (это следует из (2.21)).

Если $\alpha_0 = 1$, то положим

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \qquad \begin{aligned} \Phi_1 &= c_{10}e^{ix} + c_{-1,0}e^{-ix} + c_{01}e^{iy} + c_{0,-1}e^{-iy} \\ \Phi_2 &= \sum_{k^2+l^2>1} c_{kl} \exp^{i(kx+ly)} \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Заметим, что (2.24)

$$K_1^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha_0}\sum_{k^2+l^2>1} (k^2 + l^2)(k^2 + l^2 - 1)\,|\,c_{kl}\,|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D (\Delta\Phi_2)^2\,dxdy = \mathbf{J}_2^2(t)$$

Из (2.21) следует, что $\mathbf{J}_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Но $J_2^2 = \mathbf{J}_2^2 + J_0^2$, где

$$J_0^2(t) = \int\limits_D \Phi_1^2\,dxdy \qquad (2.25)$$

Значит, остается доказать, что $J_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Подставляя (2.23) в (2.13), умножая результат на Φ_1 и интегрируя по D, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2 + \nu J_0^2 = \int_D \Delta\Phi_2 (\Phi_{2x}\Phi_{1y} - \Phi_{2y}\Phi_{1x})\, dx\,dy \tag{2.26}$$

Используя простую оценку

$$\Phi_{1x}^2 + \Phi_{1y}^2 \leqslant \frac{1}{2\pi^2} J_0^2 \tag{2.27}$$

неравенство Буняковского и неравенство (2.17) для Φ_2, из (2.26) выведем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J_0^2 + \nu J_0^2 \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{2}} J_0\, \mathbf{J}_2^2$$

а это с учетом (2.24) и (2.21) дает оценку

$$J_0(t) \leqslant J_0(0)\, e^{-\nu t} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} K_1^2(0)\, \frac{1-e^{-\nu t}}{\nu} e^{-\nu t} \tag{2.28}$$

Значит, $J_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

2.3. *Спектр линеаризованной задачи и бифуркация.* Всякое нетривиальное решение задачи (2.8), соответствующее данному характеристическому числу λ, является линейной комбинацией решений вида

$$\Phi = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n e^{iny} \tag{2.29}$$

где $\alpha = k\alpha_0$ (k — целое число), а коэффициенты c_n удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$a_n c_n + c_{n-1} - c_{n+1} = 0 \qquad \left(a_n = \frac{2}{\lambda}\,\frac{(n^2+\alpha^2)^2}{\alpha(\alpha^2 - 1 + n^2)}\right) \tag{2.30}$$

Будем искать решения системы (2.30) такие, что $c_n \to 0$ при $|n| \to \infty$. Из (2.30) следует, что тогда и $|n|^k c_n \to 0$, каково бы ни было k. Полагая

$$\rho_n = \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

приведем (2.30) к виду

$$a_n + 1 / \rho_n = \rho_{n+1} \tag{2.31}$$

Из (2.31) вытекает, что для любого k

$$\rho_k = -\cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \ldots}} \tag{2.32}$$

Цепная дробь (2.32) сходится, так как $a_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ (см. [7]). Из (2.31) вытекает еще одно выражение для ρ_k

$$\rho_k = a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-3} + \ldots}} \tag{2.33}$$

Приравнивая друг другу правые части (2.32) и (2.33) при $k = 1$, получим с учетом того, что $a_{-n} = a_n$, следующее уравнение для определения характеристических значений λ:

$$-\frac{a_0}{2} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \equiv f(\lambda) \tag{2.34}$$

Легко проверяется, что при условии выполнения (2.34) правые части (2.32) и (2.33) совпадают для всех k. Если λ — действительный корень уравнения (2.34), то нетривиальное решение системы (2.30) с $|c_n| \to 0$ при $|n| \to \infty$ единственно с точностью до постоянного множителя и дается формулами

$$c_0 = 1, \; c_n = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n \quad (n > 0)$$
$$c_n = (\rho_0\rho_{-1} \ldots \rho_{n+1})^{-1} \quad (n < 0) \tag{2.35}$$

Пусть, для определенности, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$. Из дальнейшего (см. лемму 2.3) следует, что α должно быть меньше 1. Тогда $a_0 < 0$, $a_k > 0$ при $k \neq 0$. Теперь из (2.32) при $k > 0$ и из (2.33) при $k < 0$ следует, что

$$|\rho_k| < \frac{1}{a_k} \to 0 \quad (k \to +\infty)$$
$$\rho_k \geqslant a_{k-1} \to +\infty \quad (k \to -\infty) \tag{2.36}$$

При помощи (2.36) легко проверяется, что (2.35) дает решение системы (2.30) с $|c_n| \to 0$ при $|n| \to \infty$.

Уравнение (2.34) выведено в работе [2]; там же показано, что $c_n \neq 0$ ($n = 0, \mp 1, \ldots$) для любого решения с $|c_n| \to 0$ при $n \to \infty$, и, значит, введение чисел ρ_n законно.

Лемма 2.1. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение (2.34) имеет положительный корень $\lambda = \lambda(\alpha)$ и притом только один.

Доказательство. Имеем

$$-\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\alpha^3}{1-\alpha^2} \tag{2.37}$$

Для $f(\lambda)$ справедлива оценка ($\lambda > 0$)

$$f(\lambda) \leqslant \frac{1}{a_1} = \frac{\lambda}{2}\frac{\alpha^3}{(\alpha^2+1)^2} \tag{2.38}$$

Из (2.37), (2.38) видно, что $-{}^1/_2 a_0 > f(\lambda)$ при малых $\lambda > 0$. Покажем, что при больших λ справедливо противоположное неравенство. Для этого достаточно установить, что

$$\lambda f(\lambda) \to +\infty \quad \text{при } \lambda \to +\infty$$

Но для $f(\lambda)$ имеет место оценка

$$f(\lambda) > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}} = \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} + O(\lambda^{-2})}{1 + O(\lambda^{-2})} \tag{2.39}$$

Полагая

$$b_n = \lambda a_n = \frac{2(n^2+\alpha^2)^2}{\alpha(\alpha^2 - 1 + n^2)}$$

из (2.39) выведем

$$\underline{\lim}\, \lambda f(\lambda) \geqslant \sum_{k=1}^{n} b_{2k} \quad \text{при } \lambda \to \infty \tag{2.40}$$

Правая часть (2.40) при $n \to \infty$ стремится к бесконечности. Поэтому $\lambda f(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Итак, уравнение (2.34) имеет положительный корень. Чтобы доказать его единственность, покажем, что $\lambda f(\lambda)$ — монотонно возрастающая функция. Имеем

$$\lambda f(\lambda)=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\lambda}a_1+\cfrac{1}{\lambda a_2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\lambda}a_3+\ldots}}} \tag{2.41}$$

Когда λ растет, члены этой дроби с нечетными номерами убывают, а члены с четными номерами не меняются. Значит, $\lambda f(\lambda)$ возрастает. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Положительный корень $\lambda=\lambda(\alpha)$ уравнения (2.34) монотонно растет вместе с α при $0<\alpha<1$.

Доказательство. Перепишем (2.34) в виде

$$\frac{1}{1-\alpha^2}=\cfrac{1}{\alpha^3\alpha_1+\cfrac{\lambda}{\alpha^{-3}a_2+\cfrac{1}{\alpha^3a_3+\ldots}}}\equiv\frac{1}{\alpha^3}\lambda f(\lambda) \tag{2.42}$$

Левая часть этого уравнения — возрастающая функция α. Доказательство будет закончено, если установить, что правая часть (2.42) — убывающая функция α. А это следует из того, что цепная дробь (2.42) убывает, когда растут ее нечетные члены и убывают четные и кроме того, что α^3a_n возрастает вместе с α $\alpha^3 a_n$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^3a_n=\frac{4\alpha(\alpha^2+n^2)}{\lambda(\alpha^2-1+n^2)^2}[2\alpha^4+3(n^2-1)\alpha^2+n^2(n^2-1)]>0 \qquad (n\geqslant1)$$

а $\alpha^{-3}a_n$ убывает

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^{-3}a_n=-\frac{4(\alpha^2+n^2)}{\lambda\alpha^5(\alpha^2-1+n^2)^2}[\alpha^4+3n^2\alpha^2+2n^2(n^2-1)]<0 \qquad (n\geqslant1)$$

Лемма 2.3. При $\alpha\to1-0$ положительный корень уравнения (2.34) $\lambda=\lambda(\alpha)\to+\infty$. При $\alpha\to0$ корень $\lambda(\alpha)\to\sqrt{2}$. При $\alpha\geqslant1$ вещественных характеристических чисел нет.

Доказательство. В силу (2.34) и (2.38)

$$\frac{\alpha^3}{1-\alpha^2}=-\frac{a_0}{2}\lambda=\lambda f(\lambda)<\frac{1}{2}\lambda^2\frac{\alpha^3}{(\alpha^2+1)^2}$$

и, значит,

$$\lambda^2>\frac{2(\alpha^2+1)^2}{1-\alpha^2}\to\infty \qquad (\alpha^2\to1-0) \tag{2.43}$$

Далее, из (2.34) следует, что

$$\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{2}{b_0b_1}-\eta,\qquad \eta=\frac{1}{\lambda b_1}\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}+\ldots}\qquad (b_n=\lambda a_n) \tag{2.44}$$

Переходя в (2.44) к пределу при $\alpha\to0$ и замечая, что

$$0<\eta<\frac{1}{b_1b_2}\to0\quad(\alpha\to0),\qquad b_0b_1\to-1\quad(\alpha\to0)$$

получим

$$\lambda(\alpha)\to\sqrt{2}\qquad \text{при } \alpha\to0$$

Наконец, несуществование корня при $\alpha > 1$ сразу следует из (2.34), так как при этом левая и правая части уравнения при любом вещественном λ имеют разные знаки. Если $\alpha = 1$, то уравнение (2.34) не имеет смысла, но из (2.30) следует, что $c_0 = 0$ и, находя последовательно $c_2, c_3, \ldots$ из (2.30) при $n = 1, 2, \ldots$, получим $c_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Значит, и в этом случае вещественных характеристических чисел нет. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $0 < \alpha_0 < 1$. Тогда уравнения (2.11) и (2.10) имеют точно $[1 / \alpha_0]$ положительных [1] (и столько же отрицательных) характеристических чисел. Каждое из них имеет кратность, равную 2.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_0 k < 1$; k — натуральное число. Тогда уравнение (2.11) имеет собственную функцию (2.29), где c_n определяются равенствами (2.35), а соответствующее ей характеристическое число $\lambda = \lambda(\alpha_0 k)$ — положительный корень уравнения (2.34) (см. лемму 2.1).

Система (2.30) инвариантна относительно замены $\alpha \to -\alpha$, $c_n \to (-1)^n c_n$. Поэтому тому же характеристическому числу $\lambda = \lambda(\alpha_0 k)$ будет соответствовать и собственная функция, полученная этой заменой из (2.29). Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что других собственных функций с собственным числом $\lambda(\alpha_0 k)$ нет.

Установим, что кратность $\lambda(\alpha_0 k)$ равна 2, если покажем, что его ранг равен 1. Вещественные собственные функции имеют вид $\Phi = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$, причем

$$\Phi_1 = f(y)\, e^{i\alpha x} + f^*(y)\, e^{-i\alpha x}, \qquad \Phi_2 = i\,[f(y)\, e^{i\alpha x} - f^*(y)\, e^{-i\alpha x}] \tag{2.45}$$

где

$$f(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n e^{iny} \tag{2.46}$$

Непосредственно проверяется, что собственными функциями задачи (2.7) или уравнения (2.10) будут

$$\varphi_1 = g(y)\, e^{i\alpha x} + g^*(y)\, e^{-i\alpha x}, \qquad \varphi_2 = i\,[g(y)\, e^{i\alpha x} - g^*(y)\, e^{-i\alpha x}] \tag{2.47}$$

где

$$g(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{iny}, \qquad d_n = \frac{-c_n}{\alpha^2 + n^2 - 1}$$

Отметим еще одно соотношение, нужное для дальнейшего. Умножая (2.7) на $\Delta\varphi + \varphi$ и интегрируя по D, получим

$$\int_D (\nabla\Delta\varphi_k)^2\, dxdy - \int_D (\Delta\varphi_k)^2\, dxdy = 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{2.48}$$

С учетом (2.47) перепишем равенство (2.48) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2 + n^2)^2 (\alpha^2 + n^2 - 1)\, d_n^2 = 0 \tag{2.49}$$

[1] $[1 / \alpha_0]$ означает количество натуральных чисел, меньших $1 / \alpha_0$.

теперь вычислим величины $(\varphi_i, \Phi_k)_{H_2}$. Имеем (2.50)

$$(\varphi_1, \Phi_1)_{H_2} = \int_D \Delta\varphi_1 \cdot \Delta\Phi_1\, dxdy = \frac{8\pi^2}{\alpha_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} (n^2+\alpha^2)^2 (\alpha^2+n^2-1)\, d_n^2$$

или, с учетом (2.49),

$$(\varphi_1, \Phi_1)_{H_2} = \frac{32\pi^2}{\alpha_0} \sum_{n=1,3,5,\ldots} (n^2+\alpha^2)(\alpha^2+n^2-1)\, d_n^2 > 0 \qquad (2.51)$$

Далее, непосредственно убеждаемся в том, что

$$(\varphi_1, \Phi_2)_{H_2} = (\varphi_2, \Phi_1)_{H_2} = 0 \qquad (2.52)$$

Таким образом, если $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ (c_1, c_2 — вещественные постоянные) — любая собственная функция задачи (2.9), а $\Phi = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$, то

$$(\varphi, \Phi)_{H_2} = c_1^2 (\varphi_1, \Phi_1) + c_2^2 (\varphi_2, \Phi_2) > 0 \qquad (2.53)$$

Согласно лемме 1.5, это означает, что ранг собственного числа $\lambda = \lambda(\alpha_0 k)$ равен 1. Итак, кратность этого характеристического числа равна 2. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Вращение векторного поля $\Omega_1\varphi = (I - \lambda L)\varphi$ (см. (2.9)) на сфере достаточно большого радиуса с центром в 0 равно $+1$.

Доказательство. Достаточно доказать [1], что деформация $\Omega_t\varphi = (I - t\lambda L)\varphi$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ осуществляет гомотопию векторного поля Ω_1 и единичного поля $\Omega_0\varphi = \varphi$. Для этого нужно только установить, что все нули поля Ω_t лежат в некоторой сфере известного (не зависящего от t) радиуса. Но если $\Omega_t\varphi = 0$, то, согласно определению оператора L, имеем

$$(\varphi, \Phi)_{H_2} = t\lambda \int_D \Delta\varphi\, (\varphi_x\Phi_y - \varphi_y\Phi_x)\, dx\, dy - t\lambda \int_D \sin y\, (\Delta\varphi + \varphi)\, \Phi_x dx\, dy \qquad (2.54)$$

при любой $\Phi \in H_2$. Полагая в (2.54)

$$\varphi = \psi + \cos y, \Phi = \psi_t$$

найдем

$$\|\psi\|_{H_2}^2 = \int_D \Delta\psi \cos y\, dx\, dy \qquad (2.55)$$

откуда, применяя неравенство Буняковского и неравенство $\|\varphi\| \leqslant \|\psi\| + \|\cos y\|$, выведем

$$\|\varphi\|_{H_2} \leqslant 2\|\cos y\|_{H_2} = 2\pi\sqrt{2/\alpha_0} \qquad (2.56)$$

Тем самым доказательство леммы закончено.

Теорема 2.2. Пусть $0 < \alpha_0 < 1$. Тогда существует ровно $m = [1/\alpha_0]$ положительных чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$, являющихся точками бифуркации уравнения (2.9). Каждому из них отвечает непрерывная ветвь собственных функций уравнения (2.9), которые являются нетривиальными решениями задачи (2.6). Числа $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_m$ тоже являются точками бифуркации. Спектр уравнения (2.9) содержит все интервалы $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_3, \lambda_4), \ldots, (\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$, а также интервалы, симметричные им на отрицательной полуоси, а если m нечетно, то также интервалы $(-\infty, -\lambda_m), (\lambda_m, \infty)$.

Доказательство. Пусть H_2° — подпространство H_2, состоящее из функций, удовлетворяющих условию $\psi(-x, -y) = \psi(x, y)$. Непосредственно проверяется, что операторы L, B, B^* действуют в H_2°. При этом спектр оператора B, рассматриваемого в H_2°, совпадает со спектром оператора B на всем H_2 и состоит из чисел $\mp\lambda(\alpha_0), \mp\lambda(2\alpha_0), \ldots, \mp\lambda(m\alpha_0)$, где $m = [1/\alpha_0]$ (см. лемму 2.4). Характеристическому числу $\lambda_k = \lambda(\alpha_0 k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ отвечает лишь одна собственная функция Φ_1, определенная в (2.45). Ранг λ_k по лемме 2.4 равен 1. Итак, все характеристические числа $\mp\lambda_1, \mp\lambda_2, \ldots, \mp\lambda_m$ — простые. Значит, по теореме М. А. Красносельского [1], изложенной в § 1, все они — точки бифуркации, и каждому отвечает непрерывная ветвь собственных функций оператора L.

Если λ принадлежит одному из интервалов, указанных в условии теоремы, то индекс неподвижной точки $\varphi_0 = 0$ оператора L равен -1. А так как, по лемме 2.5, вращение векторного поля $(I - L)\varphi$ на больших сферах равно $+1$, таким λ отвечают нетривиальные решения уравнения (2.9). Теорема доказана.

2.3. *Пример рождения периодического режима*. Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) с прежним $\mathbf{F} = (-\gamma \sin y, 0)$ и $\mathbf{b} = (U, 0)$. Эта задача имеет стационарное решение

$$v_{01} = \gamma / \nu \sin y + U, \qquad v_{02} = 0, \quad P_0 = 0 \tag{2.57}$$

Вектор скорости $\mathbf{v}_0$ имеет функцию тока

$$\psi_0' = -\frac{\gamma}{\nu}\cos y + U_y$$

Если в (2.12) положить $\psi = \psi_0' + \Phi$, получим для $\Phi(x, y, t)$ условия периодичности по x, y с периодами $2\pi/\alpha_0$, 2π и уравнение

$$\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + \Phi_y\Delta\Phi_x - \Phi_x\Delta\Phi_y + U\Delta\Phi_x + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\,\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi + \Phi) - \nu\Delta^2\Phi = 0 \tag{2.58}$$

Теорема 2.3. При тех значениях λ, при которых уравнение (2.6) имеет нетривиальные решения, уравнение (2.58) имеет нетривиальные решения, периодические по времени.

Доказательство. Пусть при некотором λ существует нетривиальное решение $\varphi_0(x, y)$ уравнения (2.6) и пусть оно имеет по x период $2\pi/\alpha$ (α кратно α_0).

Тогда легко убедиться, что

$$\Phi_0 = \varphi_0(x - Ut, y) \tag{2.59}$$

есть решение задачи (2.58), периодическое по времени с периодом $\omega = 2\pi / \alpha U$. Теорема доказана.

Заметим, что течение (2.59) представляет собой не что иное, как стационарное течение в системе координат, движущейся вдоль оси x с постоянной скоростью U.

Заставим теперь систему координат двигаться и вдоль оси y со скоростью V. Нетрудно убедиться, что течение с функцией тока

$$\psi = -\frac{\gamma}{\nu}\cos(y - Vt) + Uy - Vx + \varphi_0(x - Ut, y - Vt) \qquad (2.60)$$

дает пример условно периодического течения, рождающегося при потере устойчивости, периодического по времени течения с функцией тока

$$\psi_0'' = -\frac{\gamma}{\nu}\cos(y - Vt) + Uy - Vx$$

Поступила 25 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
2. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, стр. 1140—1143.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
4. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5, стр. 1037—1040.
5. Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 53 (95), стр. 339—428.
6. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
7. Крылов А. Л. Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4, стр. 787—790.
8. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. Гостехиздат, 1956.