Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ТЕОРИИ ВОЛН УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТИПА В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Тер-Крикоров

(Москва)

Рассматриваются две возможные постановки задачи о движении неоднородной жидкости со свободной границей. В постановке А задаются в некотором поперечном сечении потока распределения плотности и горизонтальной составляющей вектора скорости как кусочно-гладкие функции ординаты. В постановке Б на линиях тока задаются распределения плотности и среднего вихря. Задачи А и Б приводятся к некоторым функциональным уравнениям, и эти уравнения исследуются для значений параметра, близких к критическим значениям.

1. Постановка задач А и Б. Рассматривается плоский установившийся поток идеальной несжимаемой неоднородной жидкости над прямолинейным дном. Верхняя граница жидкости свободна, и существует n поверхностей раздела, на которых терпят разрывы первого рода плотность и тангенциальная составляющая вектора скорости. Ось y направим вертикально вверх, ось x — вдоль дна канала. Линии раздела неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи. Пусть $\mathbf{v}$ — вектор скорости, p — гидродинамическое давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{a} = \mathbf{v}\sqrt{\rho}$. Тогда в каждой из областей T_k $(-\infty < x < +\infty,\ Y_{k-1}(x) < y < Y_k(x))$ уравнения движения в безразмерных переменных можно представить в виде [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}\cdot\nabla\rho = 0, \quad (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a} = -\nu\rho\mathbf{y}^\circ - \nabla p \qquad (\nu = gH/c^2) \qquad (1.1)$$

Характерная скорость и характерная глубина для различных задач выбираются различным образом. Если учесть, что при переходе через границы раздела давление должно меняться непрерывно, то граничные условия можно представить в виде

$$a_y(x, 0) = 0; \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad [p]_k = 0 \quad \text{при } y = Y_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали и

$$[p]_n = p(x, Y_n - 0), \quad [p]_k = p(x, Y_k - 0) - p(x, Y_k + 0) \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Так как жидкость завихрена и неоднородна, то нужно задать еще каким-то образом распределение плотности и завихренности. Прежде чем предложить возможные тут постановки, исследуем некоторые общие свойства системы уравнений (1.1), (1.2). Первое из уравнений (1.1) позволяет ввести функцию тока для вектора $\mathbf{a}$

$$a_x = \partial\psi / \partial y, \qquad a_y = -\partial\psi / \partial x$$

В силу граничных условий (1.2) дно и свободная граница должны быть линиями тока. Так как в каждой из областей T_k функция $\psi(x, y)$

определена с точностью до произвольной постоянной, то эти произвольные постоянные можно выбрать так, чтобы функция $\psi(x, y)$ была бы непрерывной в области, занятой жидкостью. Свойства семейства линий тока выражены в следующей теореме.

Теорема 1.1. Если функции $Y_k(x)$ — непрерывно дифференцируемы, вектор-функция $\mathbf{a}(x, y)$ непрерывно дифференцируема в областях T_k и терпит разрывы первого рода при переходе через границы раздела и если выполнены неравенства

$$0 < A_1 \leqslant a_x(x, y) \leqslant A_2, \qquad \max\{|a_y|, |\nabla a_x|, |\nabla a_y|\} < A_3$$

то линии тока не могут быть замкнутыми, не могут начинаться или кончаться на линиях раздела, и уравнение семейства линий тока может быть разрешено относительно y.

Доказательство теоремы 1.1 опущено, поскольку оно есть тривиальное следствие теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения линий тока $dx / a_x(x, y) = dy / a_y(x, y)$.

Нетрудно показать, что частицы, находящиеся на одной линии тока, имеют постоянную плотность и полную энергию [2]

$$\rho(x, y) = R(\psi), \qquad {}^1/_2 a^2 + p + \nu R(\psi) y = h(\psi) \tag{1.3}$$

а функция $\psi(x, y)$ должна быть решением уравнения

$$\triangle\psi + \nu R'(\psi) y = h'(\psi) \tag{1.4}$$

Здесь $R(\psi)$ и $h(\psi)$ — произвольные функции. Предположим, что единицы измерения выбраны таким образом, что поток вектора $\mathbf{a}$ через поперечное сечение канала равен единице. Если исключить из граничных условий (1.2) давление при помощи равенств (1.3), то эти граничные условия можно представить в виде (P_k — неизвестные числа):

$$\psi(x, Y_k(x)) = P_k, \quad Y_0 \equiv 0, \quad 0 = P_0 < P_1 < P_2 < \ldots < P_n = 1 \tag{1.5}$$

$$[{}^1/_2 (\nabla\psi)^2 + \nu R(\psi) y - h(\psi)]_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) содержат две произвольные функции $h(\psi)$ и $R(\psi)$ и $n - 1$ произвольных чисел $P_1, \ldots, P_{n-1}$. Для определенности задачи нужно задать дополнительные физические условия, характеризующие распределения плотности и завихренности.

В постановке А зададим в поперечном сечении канала $x = 0$, являющемся осью симметрии, ординаты границ раздела, а также распределения плотности и горизонтальной составляющей вектора скорости. Тогда можно определить ординату H свободной границы, среднюю плотность ρ° и поток P вектора $\mathbf{a}$ через заданное поперечное сечение. В качестве характерного размера возьмем число H, а в качестве характерной скорости число $c = P / H\sqrt{\rho^\circ}$, которое можно назвать скоростью распространения волны. Тогда в безразмерных переменных поток вектора $\mathbf{a}$ будет равен единице, и ординаты границ раздела, распределение плотности и горизонтальной составляющей вектора скорости задаются в виде

$$Y_k(0) = h_k, \qquad h_0 \equiv 0 < h_1 < \ldots < h_n \equiv 1 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\rho(0, y) = \rho_0(y), \qquad a_x(0, y) = q(y) \tag{1.6}$$

Здесь $h_1, \ldots, h_{n-1}$ — известные числа, а $\rho_0(y)$ и $q(y)$ — известные кусочно-гладкие функции, имеющие разрывы первого рода в точках $h_1, \ldots, h_{n-1}$ и удовлетворяющие условиям

$$\rho_0(y) \geqslant R_0 > 0, \qquad d\rho_0 / dy \leqslant 0, \qquad q(y) \geqslant Q > 0 \tag{1.7}$$

Ограничения на функцию $\rho_0(y)$ совершенно естественны с физической точки зрения. Они означают, что тяжелые слои жидкости лежат ниже, чем более легкие. Ограничение на функцию $q(y)$ более стеснительно, оно должно обеспечивать выполнение условий теоремы 1.1. Через E_A будем обозначать множество пар функций $[\rho_0(y), q(y)]$, имеющих разрывы первого рода в точках $h_1, \ldots, h_{n-1}$, дважды непрерывно дифференцируемых при $h_{k-1} < \eta < h_k$ и удовлетворяющих условиям (1.7).

Покажем, что неизвестная функция $R(\psi)$ может быть определена. Для этого перепишем условия (1.6) в виде

$$R[\psi(0, y)] = \rho_0(y), \qquad (\partial\psi / \partial y)_{x=0} = q(y) \tag{1.8}$$

Интегрируя второе условие (1.8), получаем, что функция

$$\varphi(y) = \psi(0, y) = \int_0^y q(t)\, dt$$

будет монотонной и непрерывной, а поэтому имеет непрерывную и монотонную обратную функцию $y = \eta(\varphi)$, причем $\eta(0) = 0$, $\eta(P_k) = h_k$. Подставляя теперь в правую часть первого из уравнений (1.8) значение $y = \eta(\varphi)$, получаем, что $R(\varphi) = \rho_0[\eta(\varphi)]$, и, следовательно, функция $R(\psi)$ определена.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1, и сделаем в уравнении (1.4) и граничных условиях (1.5) замену переменных, принимая x и η в качестве независимых переменных, а y — в качестве неизвестной функции. Опуская несложные преобразования, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[q^2(\eta) \frac{1 + y_x^2}{y_\eta^2}\right] - q^2(\eta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right) + \nu\rho_0'(\eta)\, y = \hbar(\eta), \qquad [y]_k = 0$$
$$(k = 1, \ldots, n-1) \tag{1.9}$$
$$y(x, 0) = 0, \qquad y(0, \eta) = \eta, \qquad \left[\frac{1}{2} q^2 \frac{1 + y_x^2}{y_\eta^2} + \nu\rho_0(\eta)\, y - \hbar\right]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Чтобы исключить из уравнений (1.9) функцию $\hbar(\eta)$, положим

$$y = \eta + \int_0^x w(x, \eta)\, dx \equiv \eta + \mathrm{S}w \tag{1.10}$$

Тогда граничное условие $y(0, \eta) = \eta$ будет удовлетворено автоматически, и для определения функции $w(x, \eta)$ нужно будет решить граничную задачу

$$\mathrm{M}w \equiv \frac{\partial}{\partial \eta}\left[q^2(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta}\right] + q^2(\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\rho_0'(\eta)\, w + \operatorname{div}(q^2 \Phi w), \qquad [w]_k = 0$$
$$(k = 1, \ldots, n-1) \tag{1.11}$$
$$w(x, 0) = 0, \qquad \left[q^2(\eta) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \nu\rho_0(\eta)\, w - q^2 \Phi_2 w\right]_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

где Φw — следующий нелинейный оператор

$$\Phi w = (\Phi_1 w, \Phi_2 w), \qquad \Phi_1 w = \frac{ww_\eta}{(1+Sw_\eta)^2} + \frac{w_x Sw_\eta}{1+Sw_\eta}$$
$$\Phi_2 w = \frac{ww_x}{(1+Sw_\eta)^2} + \frac{3Sw_\eta + 3(Sw_\eta)^2 + (Sw_\eta)^3 - w^2}{(1+Sw_\eta)^3} w_\eta \tag{1.12}$$

Таким образом, задача А приведена к решению нелинейной граничной задачи (1.11). Будем разыскивать периодические (с фиксированным периодом $2L$) нечетные решения этой задачи. Всегда существует тривиальное решение $w(x, \eta) = 0$, которому соответствует одномерный поток. Возникает вопрос о существовании двумерных течений, близких к одномерному потоку. Математически — это задача о ветвлении решений нелинейного уравнения.

Заметим еще, что для одномерного потока выполнены условия теоремы 1.1. Поэтому они будут выполнены и для двумерного потока, близкого к одномерному. Из решения задачи А не следуют известные результаты для потенциальных течений, так как для потенциального потока нельзя произвольно задать распределение скорости.

В постановке Б будем считать заданными средние глубины слоев, распределение плотности и среднего вихря вектора **a** по линиям тока

$$H_k = \frac{1}{L}\int_0^L Y_k(x)\,dx, \qquad Y_0 \equiv 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$
$$\rho(x, y) = R(\psi), \qquad \sigma(\psi) = -\frac{1}{L}\int_0^L \Delta\psi\,dx \tag{1.13}$$

а также расходы жидкости через поперечные сечения слоев $P_1, \ldots, P_n$. Единицы измерения выберем таким образом, чтобы средняя глубина канала, расход жидкости через поперечное сечение и средняя плотность ρ равнялись единице. Сделаем в уравнении (1.4) и граничных условиях (1.5) замену переменных, принимая x и ψ в качестве независимых переменных, а y — в качестве неизвестной функции. Если воспользоваться еще условиями (1.13), то получим, что функция $y(x, \psi)$ должна быть решением граничной задачи

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1+y_x^2}{y_\psi^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_x}{y_\psi}\right) + \nu R'(\psi)\left[y - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} y(x, \psi)\,dx\right] = -\sigma(\psi)$$
$$y(x, 0) = 0, \qquad \frac{1}{L}\int_0^L y(x, P_k)\,dx = H_k, \qquad [y]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{1.14}$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1+y_x^2}{y_\psi^2} - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{1+y_x^2}{y_\psi^2}\,dx\right) + \nu R(\psi)(y - H_k)\right]_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Потребуем, чтобы функция $R(\psi)$ удовлетворяла условиям

$$R(\psi) \geqslant R_0 > 0, \qquad R'(\psi) \leqslant 0, \qquad [R]_k \geqslant 0 \tag{1.15}$$

Как и раньше, они означают, что плотность растет с глубиной. Ограничения на функцию $\sigma(\psi)$ выведем из условия, что граничная задача

(1.14) должна допускать решения, не зависящие от x (одномерный поток). Соответствующая одномерному потоку граничная задача имеет вид

$$y = \eta(\psi), \quad \frac{d}{d\psi}\frac{1}{\eta_\psi^2} = -\sigma(\psi), \quad [\eta]_k = 0, \quad \eta(P_k) = H_k, \quad \eta(0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$\eta = H_{k-1} + \int\limits_{P_{k-1}}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{c_k - u(\psi)}}, \qquad u(\psi) = 2\int\limits_{P_{k-1}}^{\psi} \sigma(v)\, dv \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Произвольная постоянная c_k может быть определена из условия $\eta(P_k) = H_k$ в том и только в том случае, когда

$$H_k - H_{k-1} \leqslant \int\limits_{P_{k-1}}^{P_k} \frac{d\psi}{\sqrt{u_0^k - u(\psi)}}, \quad u_0^k = \max u(\psi) \quad (P_{k-1} \leqslant \psi \leqslant P_k, \ k = 1, \ldots, n)$$

Удобно в уравнениях (1.14) сделать замену переменных, принимая $\eta(\psi)$ в качестве новой независимой переменной, а

$$w(x, \eta) = y(x, \psi) - \eta(\psi)$$

в качестве неизвестной функции. Вводя еще обозначения

$$f_c(\eta) = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(x, \eta)\, dx, \quad f_g(x, \eta) = f(x, \eta) - f_c(x, \eta), \quad q(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} > 0$$

можно свести граничную задачу (1.14) к решению следующих связанных граничных задач для w_c и w_g:

$$\frac{d}{d\eta}\left[q^2(\eta)\frac{dw_c}{d\eta}\right] = \frac{d}{d\eta}\left[q^2(\eta)(\Phi_2 w)_c\right], \quad w_c(0) = w_c(H_1) = \ldots = w_c(H_n) = 0 \quad (1.16)$$

$$\begin{gathered} \mathrm{M}w_g = \nu\rho'(\eta) w_g + \operatorname{div}\left[q^2(\eta)(\mathbf{\Phi} w)_g\right], \quad w = w_c + w_g, \quad [w_g]_k = 0 \\ (k = 1, \ldots, n-1) \\ \left[q^2(\eta)\frac{\partial w_g}{\partial \eta} - \nu\rho w_g - q^2(\eta)(\Phi_2 w)_g\right]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \end{gathered} \qquad (1.17)$$

Где оператор M определен формулой (1.11) и

$$\Phi_2 w = \frac{1}{2}\frac{3w_\eta^2 + 2w_\eta^3 + w_x^2}{(1 + w_\eta)^2}, \qquad \Phi_1 w = \frac{w_x w_\eta}{1 + w_\eta}, \qquad \mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2)$$

Таким образом, задача Б сведена к граничной задаче (1.16), (1.17). Будем разыскивать четные периодические с периодом $2L$ решения этой задачи, отличные от тривиального.

Задача Б имеет довольно общий характер. Если, например, $\sigma(\psi) \equiv 0$ и $\rho(\psi)$ — кусочно-постоянная функция, то задача Б описывает потенциальные течения многослойной жидкости. Частный случай этой последней задачи ($n = 2$) исследован Н. Е. Кочиным. Так как методы исследования задач А и Б не отличаются по существу, то исследование будет проведено для задачи А, а соответствующие результаты для задачи Б будут сформулированы без подробного исследования.

2. Линейная теория. Пренебрегая в (1.11) нелинейными слагаемыми, приходим к следующей математической задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered} \mathrm{M}w = \nu\rho' w, \qquad w(x, 0) = w(0, \eta) = w(L, \eta) = 0 \\ [w]_k = 0, \qquad [q^2 w_\eta - \nu\rho w]_k = 0 \end{gathered}$$

Если решать эту задачу методом разделения переменных, то собственные значения и собственные функции будут иметь вид

$$\nu_{mk} = \nu_m\left(\frac{k\pi}{L}\right), \qquad w_{mk}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, u_m\left(\eta, \frac{k\pi}{L}\right) \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{2.1}$$

Здесь $\nu_m(\lambda)$ и $u_m(\eta, \lambda)$—собственные значения и собственные функции следующей граничной задачи для обыкновенного уравнения: (2.2)

$$\frac{d}{d\eta}\left(q^2\frac{du}{d\eta}\right) - \lambda^2 q^2 u = \nu\rho' u, \quad u(0, \lambda) = 0, \quad [u]_k = 0, \quad \left[q^2\frac{du}{d\eta} - \nu\rho u\right]_k = 0$$

которая, в свою очередь, сводится к задаче на минимум функционала

$$\chi_\lambda(u) = \left\{\sum_{k=1}^{n} [\rho]_k |u(h_k)|^2 - \int_0^1 \rho'(\eta) |u(\eta)|^2 d\eta\right\}^{-1} \int_0^1 q^2(\eta)\left[\left|\frac{du}{d\eta}\right|^2 + \lambda^2 |u|^2\right] d\eta$$

Вариационная задача может быть исследована при помощи прямых методов [3]. В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. Если функции $\rho(\eta)$ и $q(\eta)$ удовлетворяют условиям (1.7), то все собственные значения граничной задачи (2.2) простые и вещественные. Если мера множества, на котором $\rho'(\eta) \not\equiv 0$, отлична от нуля, то собственные значения образуют счетное множество, не имеющее точек сгущения на конечном расстоянии. Если же $\rho'(\eta) = 0$ почти всюду, то собственных значений будет конечное число.

Из выражений (2.1) ясно, что при изучении свойств собственных значений и собственных функций достаточно ограничиться случаем $k = 1$, так как все остальные собственные функции и собственные значения получаются делением полупериода на целое число частей. Очень важен вопрос о кратности спектра. Известно мало случаев, когда этот вопрос может быть решен полностью. В рассматриваемом случае можно лишь утверждать, что первое собственное значение простое, вследствие того что $\min \chi_\lambda(u)$ есть возрастающая функция параметра λ.

Для того чтобы свести вопрос о существовании периодических решений граничной задачи (1.11) к функциональным уравнениям, нужно знать свойства решений неоднородной линейной задачи

$$\begin{gathered} Mw - \nu\rho' w = \operatorname{div}(q^2 \mathbf{f}), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2), \quad [w]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1) \\ w(x, 0) = w(0, \eta) = w(L, \eta) = 0, \quad [q^2 w_\eta - \nu\rho w - q^2 f_2]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь f_1 и f_2—некоторые кусочно-гладкие функции, имеющие разрывы первого рода в точках $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, причем $f_1(x, \eta)$ — четная периодическая функция, а $f_2(x, \eta)$ — нечетная,

$$f_2(0, \eta) = f_2(L, \eta) = f_{1x}(0, \eta) = f_{1x}(L, \eta) = 0$$

В дальнейшем удобно будет пользоваться терминологией функционального анализа. Пусть D_k — прямоугольник $(0 \leqslant x \leqslant L, h_{k-1} \leqslant \eta \leqslant h_k)$, а D — прямоугольник $(0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant \eta \leqslant 1)$ и пусть H_m^k — пространство Гельдера функций, имеющих в прямоугольнике D_k производные порядка m, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$. Пусть C — пространство функций, непрерывных в прямоугольнике D. Обозначим через H_m пространство Банаха непрерывных функций, определенных в прямоугольнике D и таких, что $w \in H_m^k$ при $(x, \eta) \in D_k$. Норму определим следующим образом:

$$\|w\|_{H_m} = \|w\|_c + \|w\|_{H_m^1} + \ldots + \|w\|_{H_m^n}$$

Пусть B_m — пространство пар функций $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, причем $f_1 \in H_m$, $f_2 \in H_m$ и $f_1(x, \eta)$ — четная периодическая (с периодом $2L$) функция, а $f_2(x, \eta)$ — нечетная.

Теорема 2.2. Если $\nu = \nu_i$ есть l_i-кратное собственное значение однородной задачи, а $z_{i1}(x, \eta), \ldots z_{il_i}(x, \eta)$ — соответствующие ему собственные функции и $(\rho, q) \in E_A$, $\mathbf{f} \in B_1$, то неоднородная граничная задача (2.3) разрешима в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\iint_D q^2(\eta)\, \mathbf{f} \cdot \nabla z_{ik} dx d\eta = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l_i) \tag{2.4}$$

Причем решение может быть представлено в виде

$$w = \mathrm{A}\mathbf{f} + \sum_{k=1}^{l_i} c_k z_k(x, \eta)$$

Здесь А — линейный оператор, действующий из пространства B_1 в пространство H_2, c_k — произвольные числа, и

$$\|\mathrm{A}\mathbf{f}\|_{H_2} \leqslant \mathrm{const}\, \{\|f_1\|_{B_1} + \|f_2\|_{B_1}\}$$

Доказательство теоремы 2.2 не очень просто, и поэтому разобьем его на ряд лемм.

Рассмотрим гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом в D и таких, что функция $w(x, h_k)$ интегрируема с квадратом по x при $0 \leqslant x \leqslant L$, если $[\rho]_k \neq 0$. Заметим, что заведомо $[\rho]_n \neq 0$. Скалярное произведение в H_ρ определим следующим образом:

$$(w_1, w_2)_{H_\rho} = \sum_{k=1}^{n} [\rho]_k \int_0^L w_1(x, h_k)\, \overline{w_2(x, h_k)}\, dx - \int_0^1 \int_0^L \rho'(\eta)\, w_1(x, \eta)\, \overline{w_2(x, \eta)}\, dx\, d\eta$$

Все функции, отличающиеся лишь на множестве E_ρ $(\rho' = 0)$, будем считать тождественными. Рассмотрим подмножество H_0 функций из B_2, обращающихся в ноль в пограничной полоске D_ε $(0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant \eta \leqslant 1;\ 0 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant x \leqslant L;\ L - \varepsilon \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant \eta \leqslant 1)$. Введем на множестве H_0 скалярное произведение

$$(w_1, w_2)_{H_0} = \int_0^1 \int_0^L q^2(\eta) \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \overline{\frac{\partial w_2}{\partial x}} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \overline{\frac{\partial w_2}{\partial \eta}}\right] dx\, d\eta$$

Гильбертово пространство H_0 будет неполным. Если его пополнить, то получится некоторое подпространство H пространства Соболева $W_2^{(1)}$ функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом [3]. Задача (2.3) легко сводится к задаче на минимум функционала

$$\mathrm{F}(w) = \|w\|_{H_0}^2 - \nu_i \|w\|_{H_\rho}^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\iint_D q^2\, \mathbf{f} \cdot \nabla w\, dx\, d\eta\right] \tag{2.5}$$

Однородной линейной задаче соответствует задача на минимум функционала $\chi(w) = \|w\|_H^2 / \|w\|_{H_\rho}^2$. Собственные значения и собственные функции однородной задачи уже были определены формулами (2.1). Если расположить собственные значения в порядке возрастания ($\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n < \ldots$), то, как хорошо известно из классической теории минимума квадратичного функционала [3],

$$\nu_1 = \min \chi(w), \quad w \in H$$

$$\nu_{k+1} = \min \chi(w), \quad w \in H, \quad (w, z_{ij})_{H_\rho} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l_i)$$

Заметим еще, что функции, ортогональные собственным функциям в H_ρ, будут ортогональны им и в H. Это следует из уравнения в вариациях для функционала $\chi(w)$

$$(z_{ij}, \psi)_H - \nu_i (z_{ij}, \psi)_{H_\rho} = 0, \quad \psi \in H \quad (j = 1, \ldots, l_i) \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. Условия (2.4) необходимы для разрешимости неоднородной задачи.

Доказательство. Пусть минимум функционала (2.5) достигается на функции $w_0 \in H$, тогда, выписывая уравнение в вариациях для функционала $F(w)$, получаем

$$(w_0, \varphi)_H - \nu_i (w_0, \varphi)_{H_\rho} - \iint\limits_D q^2 \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi \, dx \, d\eta = 0, \qquad \varphi \in H \tag{2.7}$$

Подставляя в равенства (2.7) собственные функции z_{ij} ($j = 1, \ldots, l_i$) вместо произвольной функции φ, а в равенства (2.6) величину w_0 вместо произвольной функции ψ, получаем условия (2.4).

Лемма 2.2. Функцию, на которой достигается минимум функционала $\mathrm{F}(w)$, можно представить в виде

$$w_0(x, \eta) = -\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{l_k} \frac{z_{kj}(x, \eta)}{\nu_i - \nu_k} \iint\limits_D q^2 \mathbf{f} \cdot \nabla z_{kj} \, dx \, d\eta + \sum_{j=1}^{l_i} c_{ij} z_{ij}(x, \eta) + \mathrm{A}_i \tag{2.8}$$

Здесь $\varphi_i = \mathrm{A}_i \mathbf{f}$ — функция, дающая минимум функционалу $\mathrm{F}(w)$ на ортогональном дополнении $H_{\infty - i}$ к инвариантному подпространству H_i, соответствующему собственным значениям $\nu_1, \ldots, \nu_i$, и где c_{ij} ($j = 1, \ldots, l_i$) — произвольные числа.

Доказательство. Всякую функцию $w \in H$ можно представить в виде суммы $w = w_1 + w_2$, где $w_1 \in H_i$, $w_2 \in H_{\infty - i}$. Но, в силу ортогональности, $\mathrm{F}(w) = \mathrm{F}(w_1) + \mathrm{F}(w_2)$. Так как функции w_1 и w_2 независимы, то для нахождения минимума $\mathrm{F}(w)$ достаточно найти минимумы $\mathrm{F}(w_1)$ и $\mathrm{F}(w_2)$. Минимум квадратичного функционала на конечномерном подпространстве находится элементарно. Он достигается на функции, которая получается из формулы (2.8), если положить в ней $\mathrm{A}i\, f \equiv 0$. Для существования решения второй задачи достаточно, чтобы квадратичный функционал, входящий в состав $\mathrm{F}w$, был бы положительно определен [3] на подпространстве $H_{\infty - i}$.

Но это так и есть, потому что

$$\|w\|_H^2 - \nu_i \|w\|_{H_\rho}^2 \geqslant (\nu_{i+1} - \nu_i) \|w\|_{H_\rho}^2 \qquad (w \in H_{\infty - i})$$

Лемма 2.2 доказана. Применяя те же рассуждения, что в книге [3], нетрудно получить оценки

$$\|\mathrm{A}_i f\|_H \leqslant C_1 \|\mathbf{f}\|_L, \quad \|\mathrm{A}_i \mathbf{f}\|_{H_\rho} \leqslant C_2 \|\mathbf{f}\|_L, \quad \|\mathbf{f}\|_L = \int_0^1 \int_0^L q^2 |\mathbf{f}|^2 \, dx \, d\eta \tag{2.9}$$

Осталось показать, что функция $w_0(x, \eta)$, на которой достигается минимум функционала, принадлежит H_2, если $f_1 \in B_1$, $f_2 \in B_1$. Выведем интегральное представление, из которого это будет следовать.

Построим функцию

$$G(x, \xi, \eta, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\eta, t, \frac{n\pi}{L}\right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \xi}{L} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= u_k(\eta, \lambda) \\ v &= v_k(\eta, \lambda) \end{aligned}\right\} \quad (h_{k-1} \leqslant \eta \leqslant h_k), \qquad g(\eta, t, \lambda) = \frac{1}{v(0, \lambda)} \begin{cases} u(\eta, \lambda)\, v(t, \lambda) & (\eta \leqslant t) \\ u(t, \lambda)\, v(\eta, \lambda) & (\eta \geqslant t) \end{cases}$$

где функции $u_k(\eta, \lambda)$ и $v_k(\eta, \lambda)$ определяются рекуррентными формулами

$$u_1(\eta, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}\lambda\eta}{\lambda}, \qquad v_n(\eta, \lambda) = \operatorname{ch}\lambda(\eta - 1), \qquad \alpha_k = \frac{q^2(h_k + 0)}{q^2(h_k - 0)}, \qquad \alpha_0 = 1, \alpha_n = 0$$

$$u_{k+1}(\eta, \lambda) = u_k(h_k, \lambda)\operatorname{ch}\lambda(\eta - h_k) + \alpha_k\lambda^{-1}u_k'(h_k, \lambda)\operatorname{sh}\lambda(\eta - h_k) \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

$$v_k(\eta, \lambda) = v_{k+1}(h_k, \lambda)\operatorname{ch}\lambda(\eta - h_k) + (\alpha_k\lambda)^{-1}v_{k+1}'(h_k, \lambda)\operatorname{sh}\lambda(\eta - h_k) \qquad (2.11)$$

Лемма 2.3. При $\lambda \to +\infty$ для функций $u_k(\eta, \lambda)$ и $v_k(\eta, \lambda)$ справедливы асимптотические формулы (2.12)

$$u_k(\eta, \lambda) = (2^{k-1}\lambda)^{-1}(1 + \alpha_1)\ldots(1 + \alpha_{k-2})[(1 + \alpha_{k-1})\operatorname{sh}\lambda\eta +$$
$$+ (1 - \alpha_{k-1})\operatorname{sh}\lambda(2h_{k-1} - \eta)] + O(e^{(1-\varepsilon)\lambda\eta})$$

$$v_k(\eta, \lambda) = \frac{(1 + \alpha_{k+1})\ldots(1 + \alpha_{n-1})}{2^{n-k}\alpha_k\ldots\alpha_{n-1}}[(1 + \alpha_k)\operatorname{ch}\lambda(1 - \eta) -$$
$$- (1 - \alpha_k)\operatorname{ch}\lambda(1 + \eta - 2h_k)] + O(e^{(1-\varepsilon)\lambda\eta})$$

где ε — некоторое положительное число, не зависящее от λ.

Доказательство проводится по индукции. Для $u_1(\eta, \lambda)$ формула (2.12), очевидно, справедлива. Пусть она справедлива для $u_k(\eta, \lambda)$. Используя формулу (2.11), нетрудно показать, что она справедлива и для $u_{k+1}(\eta, \lambda)$.

Лемма 2.4. Если $h_{k-1} \leqslant \eta \leqslant h_k$, $h_{k-1} \leqslant t \leqslant h_k$, то функция $g(\eta, t, \lambda)$ может быть представлена в виде (2.13)

$$g(\eta, t, \lambda) = \frac{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}{2\lambda}\left[e^{-\lambda|t-\eta|} + \frac{1 - \alpha_{k-1}}{1 + \alpha_{k-1}}e^{-\lambda|2h_{k-1}-\eta-t|} - \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k}e^{-\lambda|2h_k-\eta-t|}\right] +$$
$$+ g_1(\eta, t, \lambda)$$

Кроме того,

$$g(\eta, t, \lambda) = \frac{\alpha_1\ldots\alpha_k}{2\lambda(1 + \alpha_k)}e^{-\lambda|t-\eta|} + g_2(\eta, t, \lambda) \qquad (h_{k-1} \leqslant \eta \leqslant h_k,\ h_k \leqslant t \leqslant h_{k+1})$$

$$g(\eta, t, \lambda) = g_3(\eta, t, \lambda) \qquad (h_{k-1} \leqslant \eta \leqslant h_k,\ h_j \leqslant t \leqslant h_{j+1},\ j \neq k, k+1, k-1)$$

где для функций $g_i(\eta, t, \lambda)$ и их производных имеют место асимптотические формулы при $\lambda \to +\infty$

$$\frac{\partial^m g_i}{\partial t^k\,\partial\eta^{m-k}} = \lambda^{m-1}O(e^{-\varepsilon\lambda}), \qquad \varepsilon > 0 \qquad (m \geqslant k,\ i = 1, 2, 3)$$

Доказательство этой леммы легко получить, если подставить выражения (2.12) в формулу (2.10) для функции $g(\eta, t, \lambda)$.

Лемма 2.5. Функция $G(x, \xi, \eta, t)$ симметрична по переменным x, η и ξ, t, гармоническая по x, η при $(x, \eta) \in D_k$, $x \neq \xi$, $\eta \neq t$ и удовлетворяет условиям

$$(G)_{x=0} = (G)_{x=L} = (G)_{\eta=0} = [G]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad [q^2G_\eta]_k = 0$$
$$(k = 1, \ldots, n) \qquad (2.14)$$

Если $(\xi, t) \in D_k$, то в окрестности этой точки функция $G(x, \xi, \eta, t)$ может быть представлена в виде (2.15)

$$G(x, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi}\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\left\{\lg[(x - \xi)^2 + (\eta - t)^2] + \frac{1 - \alpha_{k-1}}{1 + \alpha_{k-1}}\lg[(x - \xi)^2 +\right.$$
$$\left.+ (2h_{k-1} - \eta - t)^2] - \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k}\lg[(x - \xi)^2 + (2h_k - \eta - t)^2]\right\} + G_1(x, \xi, \eta, t), \quad (x, \eta) \in D_k$$

$$G = \frac{\alpha_1\ldots\alpha_k}{\pi(1 + \alpha_k)}\lg[(x - \xi)^2 + (\eta - t)^2] + G_1(x, \xi, \eta, t), \qquad (x, \eta) \in D_{k+1}$$

$$G = G_3(x, \xi, \eta, t), \qquad (x, \eta) \in D_i \qquad (i \neq k, k-1, k+1)$$

Здесь $G_i(x, \xi, \eta, t)$ — ограниченные гармонические функции.

Доказательство. Пусть $(\xi, t) \in D_k$. При $\eta \neq t$, как следует из выражения (2.13), ряд (2.10) можно почленно дифференцировать, и, следовательно, он будет представлять гармоническую функцию. При $\eta = t$, $x \neq \xi$ ряд (2.10) сходится. Поэтому функция $G(x, \xi, \eta, t)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа во всех точках прямоугольника D_k, кроме точки $x = \xi$, $\eta = t$. Нетрудно проверить, что она удовлетворяет и граничным условиям (2.14). Чтобы выделить особенности функции $G(x, \xi, \eta, t)$, нужно подставить выражения (2.13) в ряд (2.10). Выделяя особенности у сумм соответствующих рядов, получаем формулу (2.15). Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. Для функции $w_0(x, \eta)$, дающей минимум функционалу (2.5), имеет место интегральное представление

$$w_0(\xi, t) = -\frac{1}{q^2(t)}\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\left\{\iint\limits_D \left[\left(2q\frac{dq}{d\eta} - \nu_i\rho\right)\frac{\partial G}{\partial \eta}w_0 -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\nu_i G\frac{\partial w_0}{\partial \eta} - 2q^2(\eta)\,\mathbf{f}\cdot\nabla G\right]dxd\eta\right\}, \qquad (\xi, t) \in D_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (2.16)$$

Доказательство. При помощи стандартных рассуждений нетрудно вывести, что интегральное представление (2.16) справедливо для решений граничной задачи (2.3). Функцию $w_0(x, \eta)$ можно в $W_2^{(1)}$ приблизить с любой степенью точности последовательностью дважды непрерывно дифференцируемых функций $w_n(x, \eta)$ (например, по методу Ритца). Функции $w_n(x, \eta)$ будут решениями последовательности граничных задач (2.3), где вместо $\mathbf{f}$ в правых частях стоит $\mathbf{f}_n$, причем $\mathbf{f}_n \to \mathbf{f}$ в $W_2^{(1)}$. Напишем для функций $w_n(x, \eta)$ интегральное представление (2.16) и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Получим, что интегральное представление (2.16) имеет место и для обобщенных решений. Лемма доказана.

Теперь не представляет труда завершить доказательство теоремы 2.2. Из интегрального представления (2.16) и из свойств потенциалов следует, что функция $w_0(x, \eta)$ имеет в D_k вторые обобщенные производные и, следовательно, удовлетворяет условию Гельдера. Но тогда из интегрального представления (2.16) следует, что она имеет в D_k вторые производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Соответствующие оценки для нормы $w_0(x, \eta)$ получаются обычным путем [3] с использованием оценок (2.9).

3. Нелинейная теория волн малой амплитуды. Пусть ν_0 есть m-кратное собственное значение линейной задачи, а $z_1(x, \eta), \ldots, z_m(x, \eta)$ — соответствующие ему собственные функции. Учитывая, что

$$\rho'(\eta)\,w = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\rho w - \int_1^\eta \rho\, w_\eta' d\eta\right]$$

и что функция

$$\int_1^\eta \rho w_\eta' d\eta$$

непрерывна, и полагая $\nu = \nu_0 - \mu$, перепишем уравнения (1.11) в виде

$$Mw - \nu_0\rho'(\eta)\,w = \operatorname{div}(q^2\mathbf{F}w)$$

$$w(x, 0) = w(0, \eta) = w(L, \eta) = [w]_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1) \qquad (3.1)$$

$$[q^2 w_\eta' - \nu_0\rho w - q^2 F_2 w]_k = 0 \qquad (\nu = \nu_0 - \mu,\ k = 1, \ldots, n)$$

$$F_2 w = \Phi_2 w - \mu\rho q^{-2} w + \mu q^{-2}\int_1^\eta \rho w_\eta' d\eta, \qquad \mathbf{F}w = (\Phi_1 w, F_2 w) \qquad (3.2)$$

где нелинейные операторы $\Phi_1 w$ и $\Phi_2 w$ определены формулами (1.12). Как следует из теоремы 2.2, для разрешимости нелинейной граничной задачи (3.1) необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\Omega_i \mathrm{F}w \equiv \iint\limits_D q^2(\eta)\, \mathrm{F}w \cdot \nabla z_i dx d\eta = 0 \tag{3.3}$$

Будем рассматривать совместно системы уравнений (3.1) и (3.3). Применяя теорему 2.2, получаем

$$w = \mathrm{A}\left[\mathrm{F}w - \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i(x, \eta)}{\Omega_i z_i} \Omega_i \mathrm{F}w\right] + \sum_{i=1}^{m} c_i z_i(x, \eta) \tag{3.4}$$

Граничная задача (3.1) эквивалентна решению системы уравнений (3.3) и (3.4). Но уравнение (3.4) может быть решено независимо от уравнений (3.3).

Теорема 3.1. Существуют такие числа $\mu_0 > 0$ и $\alpha_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ и $|\alpha_i| < \alpha_0$ в пространстве H_2 найдется шар такого радиуса ε с центром в нуле, что в этом шаре решение уравнения (3.4) может быть получено методом последовательных приближений и есть аналитическая функция параметров $\mu, c_1, \ldots, c_m$.

Доказательство опускается, так как оно проводится при помощи стандартных рассуждений. Аналитичность, например, доказывается построением мажорантных рядов [4].

Если теперь полученное решение подставить в уравнения (3.3), то получим систему уравнений разветвления Ляпунова — Шмидта

$$R_i(\mu, c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

Здесь R_i — некоторые аналитические функции своих аргументов. Полное исследование уравнений разветвления в случае кратного собственного значения хотя и возможно в принципе, но приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям [5]. Ограничимся случаем простого собственного значения. Тогда решение уравнения (3.4) имеет вид

$$w(x, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik}(x, \eta)\, \mu^i \beta^k, \qquad w_{01}(x, \eta) = z(x, \eta) \tag{3.6}$$

Здесь β — произвольный параметр, а $z(x, \eta)$ — собственная функция. Подставляя выражение (3.6) в уравнение разветвления (3.3), получаем

$$R(\mu, \beta) = 0 \tag{3.7}$$

Пусть

$$\varphi(\zeta) = \Phi\left[\sum_{k=1}^{\infty} w_{0k}(x, \eta)\, \zeta^k\right], \qquad \iint\limits_D q^2 \varphi \cdot \nabla z dx d\eta = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^k \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. Если a_p — первый отличный от нуля коэффициент ряда (3.8) и число p — четно, то уравнение разветвления имеет для β единственное нетривиальное решение, которое может быть найдено в виде ряда по степеням параметра $\mu^{1/(p-1)}$. Если же число p нечетно, то уравнение разветвления имеет два нетривиальных решения, которые при $a_p > 0$ находятся в виде рядов по степеням $\mu^{1/(p-1)}$, а при $a_p < 0$ — в виде рядов по степеням $(-\mu)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Вспоминая выражения (3.2) и воспользовавшись равенствами (3.8), можем записать уравнение разветвления в виде

$$R(\mu, \beta) \equiv a_p\beta^p - b\beta\mu + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k\beta^k + \beta\mu^2 R_1(\mu, \beta) + \beta^2\mu R_2(\mu, \beta) = 0 \quad (3.9)$$

Здесь R_1 и R_2 — некоторые аналитические функции и

$$b = \int_0^1\int_0^L \left[\rho z - \int_0^\eta \rho \frac{dz}{d\eta}\, d\eta\right] \frac{dz}{d\eta}\, dx d\eta = \| z \|_{H_\rho}^2$$

Известно, что все решения уравнения вида (3.9), обращающиеся в ноль при $\mu = 0$, можно найти в виде рядов [6] по дробным степеням параметра μ

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu^{k/r} \quad (3.10)$$

Здесь r — некоторое целое число. Подставляя разложение (3.10) в уравнение (3.9), получаем, что члены наинизшей степени есть

$$a_p \beta_1{}^p \mu^{p/r} - b\beta_1\mu^{1+1/r}$$

Чтобы они взаимно уничтожились, должны быть выполнены условия

$$r = p - 1, \qquad a_p\beta_1{}^p - b\beta_1 = 0$$

Представляют интерес только вещественные решения второго уравнения. Сколько решений имеет это уравнение — столько же решений имеет и уравнение разветвления. Возможны три случая:

(а) p — четное, имеется одно нетривиальное решение

$$\beta_1 = (b / a_p)^{1/(p-1)}$$

(б p — нечетное, $a_p > 0$, существует два решения при $\mu > 0$

$$\beta_1 = \pm (b / a_p)^{1/(p-1)}$$

и не существует решений при $\mu < 0$;

(в) p — нечетное, $a_p < 0$. Этот случай сводится к предыдущему, если положить $\mu' = -\mu$ и искать решение в виде ряда по дробным степеням параметра μ'. Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что, вообще говоря, $p = 2$ и $a_2 \neq 0$. Случай $p = 2$ будем называть общим, а случаи $p > 2$ — исключительными.

Подставляя ряды (3.10) для β в выражение (3.6), получим решения нелинейной граничной задачи (3.1) в виде некоторых рядов по дробным степеням параметра μ. Если вспомнить уравнение (1.10) для семейства линий тока и использовать выражения (2.1) для собственных функций при $k = 1$, то получим

$$y(x, \eta) = \eta + A_i\left[1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right] u_i\left(\eta, \frac{\pi}{L}\right) + o(A_i)$$

$$A_i = \frac{L}{\pi}\left(\frac{\mu b}{a_p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (p = 2q), \qquad A_i = \pm\frac{L}{\pi}\left(\frac{\mu b}{|a_p|}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (p = 2q+1)$$

Как известно, для прямолинейного дна скорость распространения волны есть величина неопределенная. В п. 1 скоростью распространения была названа величина $P / H\sqrt{\rho^\circ}$. Так как $\nu = gH / c^2$, то

$$c_i^2 = \frac{gH}{\nu_i(\pi / L)}\left[1 + \frac{a_p}{b}\left(\frac{A_i\pi}{L}\right)^{p-1} \frac{1}{\nu_i(\pi / L)}\right] + o(A_i^{p-1}) \quad (3.11)$$

Из выражения (3.11) следует, что при $\operatorname{sgn}(a_p A_i^{p-1}) > 0$ скорость распространения больше критической и растет с увеличением амплитуды, а при $\operatorname{sgn}(a_p A_i^{p-1}) < 0$ — меньше критической и убывает с увеличением амплитуды.

Основной результат теперь можно сформулировать в следующем виде: существует счетное множество (при $\rho'(\eta) \equiv 0$ — конечное) критических значений для скорости распространения волны. Если скорость распространения близка к одной из критических скоростей, то, помимо одномерного потока с заданным распределением плотности и скорости в поперечном сечении, всегда существует при $a_p \neq 0$ и p четном одно семейство двумерных потоков, зависящее при фиксированном значении длины волны от одного безразмерного параметра (амплитуды) и имеющее такое же распределение плотности и горизонтальной составляющей вектора скорости в поперечном сечении, являющемся осью симметрии, что и для одномерного потока. При p нечетном существует два семейства двумерных потоков, распространяющихся с одинаковой скоростью, зависимость которой от амплитуды выражена равенством (3.11).

В случае задачи Б все также сводится к исследованию уравнения разветвления, которое имеет такой же вид, как уравнение (3.7). Но здесь в общем случае $p = 3$. Приведем соответствующие формулы для семейства линий тока и для скоростей распространения

$$y(x, \eta) = \eta + A_i \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) u_i\left(\eta, \frac{\pi}{L}\right) + o(A_i)$$

$$c_i^2 = \frac{gH}{v_i(\pi/L)}\left[1 + a_3 A_i^2 \frac{1}{b v_i(\pi/L)}\right] + o(A^2)$$

Здесь A_i — амплитуда, a_3 — некоторый известный коэффициент. Скорость распространения больше критической и возрастает с увеличением амплитуды при $a_3 > 0$ и меньше критической при $a_3 < 0$.

Основной результат задачи Б можно выразить в следующем виде: если скорость распространения близка к одной из критических скоростей, то, помимо тривиального одномерного потока с заданным распределением плотности и среднего вихря по линиям тока, всегда в общем случае существует два семейства двумерных потоков, зависящих при фиксированной длине волны от одного параметра (амплитуды) и имеющих такое же распределение плотности и среднего вихря по линиям тока, что и для одномерного потока. В исключительных случаях может быть не два, а одно семейство двумерных потоков.

Поступила 18 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, стр. 1067—1076.
2. Ter-Krikorov A. M. Théorie exacte des ondes longues stationaires dans un liquide hétérogène. J. Mécanique, 1963, vol. II, № 3, p. 351—376.
3. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.
4. Michal A., Clifford M. Fonctions analytiques implicite dans les espaces vectories abstraits. Compt. rend. Acad. sci. (Paris), 1933, vol. 197, p. 735—737.
5. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1961.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. н., 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 13—75.