Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л. Г. Заставенко

(Дубна)

Рассматривается устойчивость по Ляпунову решений вида (1.2) нелинейного волнового уравнения (1.1). Даны предположения о поведении одного класса решений уравнения (1.1) при $t \to \infty$, вытекающие из представления о необратимом характере процесса, описываемого уравнением (1.1).

Нелинейное волновое уравнение

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + 1 - f(\varphi^*\varphi)\right\}\varphi(x, t) = 0 \tag{0.1}$$

при некоторых ограничениях на функцию f допускает решения вида

$$\varphi(x, t, E) = a(x, E)\, e^{iEt} \tag{0.2}$$

где функция $a(x, E)$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$.

Действие преобразования Лоренца на покоящийся волновой пакет $\varphi(x, t, E)$ дает движущийся волновой пакет

$$\varphi(x, t, E, \beta) = \exp\left(i\frac{Et - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) a\left(\frac{x - \beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, E\right) \qquad (\beta \text{ — скорость}) \tag{0.3}$$

также удовлетворяющий уравнению (0.1) ввиду его лоренц-инвариантности.

Естественным для физика будет неоднократно обсуждавшийся [1] вопрос: не могут ли решения (0.2) быть истолкованы как частицы [1]. С этой точки зрения, первое, что надо выяснить: каков результат столкновения двух движущихся волновых пакетов, например, $\varphi_1 = \varphi(x, t, E, \beta)$ и $\varphi_2 = \varphi(x, t, E, -\beta)$. Пусть решение $\varphi(x, t)$ уравнения (0.1) определено асимптотическим условием $\varphi(x, t) - \varphi_1$, $\varphi(x, t) - \varphi_2 \to 0$ при $t \to -\infty$; нужно установить, будет ли выполняться аналогичное асимптотическое условие при $t \to +\infty$.

Есть, однако, более простой вопрос, также существенный для возможности указанной выше физической интерпретации решений (0.2) (которые, следуя [1], будем называть частицеподобными),— это вопрос об устойчивости решений (0.2) относительно малых изменений начальных условий, т. е. об устойчивости по Ляпунову. Исследованию этого вопроса в основном и посвящена данная работа [2].

В § 2 подробно рассмотрен простейший случай волнового уравнения с одной пространственной координатой; в § 4 обсуждаются усложнения, возникающие в случае трех пространственных степеней свободы. Берем функцию простейшего вида

$$f = (\varphi^*\varphi)^n, \qquad n > 0 \tag{0.4}$$

Основным новым моментом в работе является обобщение известного положения

[1] Решению уравнения (1.1) можно придать физический смысл, сопоставив его с сохраняющимся (в силу (0.1)) четырех-вектором энергии импульса

$$p_i = \int dx T_{i4}$$

здесь T_{ik} — тензор плотности энергии-импульса (см., например, [2] и т. д.) [2]. Исследованием устойчивости решений (1.2) занимался также Ю. П. Рыбаков [3]; ему, однако, не удалось получить определенного результата.

неустойчивости) положения равновесия, в котором потенциальная нимум (седло) применительно к «положениям равновесия» (0.2), т. е. риодическим решениям. Предлагаемое обобщение очень простое: оно вано на том факте, что (как легко проверить) «точка» (0.2) доставляет нкционалу энергии (1.1) на проходящей через нее поверхности постоян- (1.2). Существенную роль в данной работе играет идея о сходстве уравне- системами уравнений механики. Возникающие в этой связи предположения о поведении $\varphi(x, t)$ при $t \to \infty$ изложены в § 3. Пользуюсь случаем поблагодарить В. В. Бабикова, В. К. Мельникова, М. А. Маркова, Ю. П. Рыбакова и Я. П. Терлецкого за интерес к работе.

1. Из числа интегралов движения, определяемого уравнением (0.1), выпишем энергию E^* и заряд Q:

$$E^* = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{\dot\varphi^* \dot\varphi + \nabla\varphi^* \nabla\varphi + \varphi^*\varphi - F(\varphi^*\varphi)\} \qquad \left(F(z) = \int_0^z f(x)\,dx\right) \tag{1.1}$$

$$Q = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(-\dot\varphi^*\varphi + \dot\varphi\varphi^*) \tag{1.2}$$

Задачу об отыскании решения $\varphi(x, t)$ уравнения (0.1) с начальными условиями $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\dot\varphi(x, 0) = \psi_0(x)$ будем обозначать $P(\varphi_0, \psi_0)$. В дальнейшем понадобится также уравнение (0.1) в интегральной форме

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x, t) + G[f(\varphi^*\varphi)\varphi](x, t) \tag{1.3}$$

Явное выражение оператора G приведем для одномерного случая

$$G\eta(x, t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{\tau-t}^{t-\tau} d\xi\, J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2 - \xi^2}\right)\eta(x-\xi, \tau) \tag{1.4}$$

Функция $\varphi_0(x, t)$ в (1.3) есть решение задачи $P_0(\varphi_0, \psi_0)$, т. е. линейного уравнения

$$(\partial^2 / \partial t^2 - \triangle + 1)\,\varphi_0(x, t) = 0 \tag{1.5}$$

с начальными условиями (φ_0, ψ_0). Задачу отыскания решения уравнения (1.3) будем обозначать $L(\varphi_0, \psi_0)$.

Отметим также следующие обозначения, используемые далее,

$$J_n(\varphi) = \int |\varphi|^n dx, \qquad R_E(\varphi) = \int \{\nabla\varphi^*\nabla\varphi + \varphi^*\varphi\,(1 - E^2)\}\,dx$$

$$\omega(p) = \sqrt{p^2 + 1} \tag{1.6}$$

2. Для определения функции $a(x, E)$ получаем уравнение

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - E^2 - (a^*a)^n\right\} a(x, E) = 0 \tag{2.1}$$

Легко видеть, что это уравнение при $E^2 < 1$ имеет единственное (с точностью до преобразования $a(x, E) \to a(x + \alpha, E)\,e^{i\beta}$), стремящееся к нулю при $|x| \to \infty$, решение $a(x, E)$, причем

$$a(x, E) = (1 - E^2)^{\frac{1}{2n}}\, b\left(x\sqrt{1 - E^2}\right) \tag{2.2}$$

$$b(x) = O(e^{-|x|}) \quad \text{при } |x| \to \infty, \qquad b(-x) = b(x)$$

Подставив (2.2) в (1.1) и (1.2), найдем

$$E^* = E^*(E) = \frac{2}{n+2}(1-E^2)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}(n+2E^2)J_2(b)$$

$$Q = Q(E) = (1-E^2)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}J_2(b) \tag{2.4}$$

При выводе (2.3) использовано соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,[2z(1-E^2) - F(z) - zf(z)] = 0 \qquad (z = [a(x, E)]^2) \tag{2.5}$$

Его можно вывести, например, из условия обращения в нуль интеграла от пространственных компонент тензора плотности энергии — импульса (см. сноску на стр. 430), соответствующего решению (0.2) (теорема Лауэ [2]).

2.1. Удобно следующим образом сформулировать локальную теорему существования.

Теорема 2.1. Если $|\varphi_0(x, t)| < M_0$ при $t \geqslant 0$, то решение $\varphi(x, t)$ задачи $L(\varphi_0, \psi_0)$ при $0 < t < T$, $M_0 T = \alpha(n) > 0$ может быть построено итерациями вида

$$\varphi_{n+1}(x, t) = \varphi_0(x, t) + G[f(|\varphi_n|^2)\varphi_n](x, t) \tag{2.6}$$

Здесь $\varphi_0(x, t)$ — решение задачи $P_0(\varphi_0, \psi_0)$, т. е. уравнения (1.5). Решение $\varphi(x, t)$ будет: а) единственным; б) ограниченным, т. е.

$$|\varphi(x, t)| < \beta(n) M_0 \qquad \text{при } t < T$$

в) иметь непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению $P(\varphi_0, \psi_0)$, если функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ и $d\varphi_0 / dx$ имеют непрерывные первые производные.

Доказательство. Ограниченность итераций устанавливается сравнением оценок для $|\varphi_n(x, t)|$ с разложением $x = y + y^{1+2n} + \ldots$ $(|y| < \alpha(n))$ корня уравнения $x = y + x^{1+2n}$. В остальном доказательство стандартно. См. также [4], где рассматривается уравнение, близкое к (0.1).

Следствие 2.1. Если для данных функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ (непрерывных вместе с производными $d\varphi_0 / dx$, $d\psi_0 / dx$, $d^2\varphi_0 / dx^2$) есть число M, не зависящее от τ, такое, что из существования при $0 < t < \tau$ решения $\varphi(x, t)$ задачи $P(\varphi_0, \psi_0)$ следует, что $|\varphi(x, t)| < M$ при $0 < t < \tau$, то решение $\varphi(x, t)$ существует на всей полуоси $t > 0$.

Доказательство очевидно. Следствие 1.1 обеспечивает существование решения задачи $P(\varphi_0, \psi_0)$ для движения около устойчивого обобщенного положения равновесия $\varphi(x, t, E)$ (п.2.4).

2.2. Пусть $q = Q(E)$ — величина заряда, соответствующая решению $\varphi(x, t, E)$. Основную роль в исследовании устойчивости решения $\varphi(x, t, E)$ играет функционал

$$V_q(\varphi) = \frac{q^2}{J_2(\varphi)} + \int [\nabla\varphi^* \nabla\varphi] + \varphi^*\varphi - F(\varphi^*\varphi)]\, dx \tag{2.7}$$

полученный минимизацией функционала (1.1) энергии $E^*(\varphi, \varphi^\cdot)$ по «скорости» $\varphi^\cdot$ при условии $Q(\varphi, \varphi^\cdot) = q$:

$$E^*(\varphi, \varphi^\cdot) \geqslant V_q(\varphi) \qquad \text{при } Q(\varphi, \varphi^\cdot) = q \tag{2.8}$$

Легко видеть, что точка $a(x, E)$ (см. (0.2)) для функционала $V_q(\varphi)$ — экстремальная. После этого из (2.8) сразу ясно (по аналогии с механикой), что если «точка» $\varphi = a(x, E)$ — минимум $V_q(\varphi)$, то решение $\varphi(x, t, E)$ «устойчиво». Прежде чем дать точную формулировку, напомним, как в механике доказывается устойчивость положения равновесия, в котором потенциальная энергия имеет минимум.

Лемма 2.1. Пусть: (1) функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $x^{\cdot\cdot} + \operatorname{grad} U = 0$; далее, (2) пусть существуют положительные числа α и ρ такие, что

$$\alpha \sum_i x_i^2 \leqslant U(x) - U(0) \qquad \text{при } \Sigma x_i^2 < \rho$$

Тогда из выполнения неравенств

$$\delta < \rho, \qquad \Sigma\, [x_i(t)]^2 < \delta$$

$$\Sigma\, [x_i^{\cdot}(t)]^2 + U[x(t)] - U(0) < \alpha\delta \quad \text{при } t = 0 \tag{2.9}$$

следует их выполнение при всех $t > 0$.

Доказательство. Пусть

$$\delta < \rho' < \rho, \quad \Sigma\, [x_i(t_0)]^2 = \rho', \quad t_0 > 0$$

Так как $\rho' < \rho$, то $U(x(t_0)) - U(0) \geqslant \alpha\rho' > \alpha\delta$, что, ввиду сохранения энергии, противоречит (2.9).

2.3. В рассматриваемой задаче дело обстоит сложнее. Функционал $V_q(\varphi)$ имеет экстремум в каждой точке многообразия S_E, определенного

$$(S_E) \qquad \varphi = e^{i\beta} a(x + \gamma, E), \qquad 0 \leqslant \beta < 2\pi, \; -\infty < \gamma < +\infty \tag{2.10}$$

Ситуация будет подобна той, когда потенциальная энергия в механике не зависит от одной из координат. Соответственно устойчивость решения $\varphi(x, t, E)$ может иметь место лишь в том смысле, что: (1) если $\varphi(x, t)$ есть решение уравнения (0.1); (2) — наименьшее расстояние от точки $\varphi(x, t)$ до точек многообразия (2.10) мало при $t = 0$, то это расстояние будет мало и при всех $t > 0$.

В качестве «расстояния» $l(\varphi, \varphi')$ между двумя точками $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ примем значение функционала $R_E(\varphi - \varphi')$ (см. (1.6)). Такое определение расстояния адэкватно рассматриваемой задаче: при неудачном выборе определения расстояния устойчивость в указанном выше смысле места не имеет (например, при $l(\varphi, \varphi') = J_2(\varphi - \varphi')$).

2.4. Теперь уже можно дать точную формулировку. Функционал $R_E(\varphi - \varphi^\circ)$ при $\varphi^\circ(x) \in S_E$ ограничен снизу; нетрудно видеть, что он достигает на S_E своей нижней границы (если $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$). Пусть это происходит при $\varphi^\circ(x) = D_E \varphi(x)$.

Определим оператор B_E равенством

$$\varphi(x) = D_E \varphi(x) + B_E \varphi(x) \tag{2.11}$$

Пригодным для дальнейшего аналогом леммы 2.1 будет следующая.

Лемма 2.2. Если найдутся числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие что

$$\alpha R_E\ [B_E \varphi] < V_q(\varphi) - V_q(D_E \varphi) \qquad \text{при } R_E(B_E\varphi) < \rho \tag{2.12}$$

и $\varphi(x, t) = \varphi_t$ — решение уравнения (0.1) с тем же значением заряда, что $\varphi(x, t, E) \equiv \varphi_{E,t}$, то из выполнения при $t = 0$ неравенств

$$R_E(B_E\varphi_t) < \delta, \qquad E^*(\varphi_t, \varphi_t^{\bullet}) - E^*(\varphi_{Et}, \varphi_{E,t}^{\bullet}) < \alpha\delta \tag{2.13}$$

при $\delta < \rho$ следует выполнение неравенства $R_E(B_E\varphi_t) < \delta$ при всех $t > 0$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 2.2; следует только принять во внимание, что функционал $R_E(B_E\varphi_t)$ непрерывен по t (если непрерывно [1] решение φ_t).

Теперь остается выяснить, справедливо ли для данного решения $\varphi(x, t, E)$ неравенство (2.12).

2.5. Рассмотрим функционал $V_q[a(x, E) + \alpha v(x)]$; имеем

$$V_q(a + \alpha v) = V_q(a) + \alpha^2 A(a, v) + C(a, \alpha, v)$$
$$\left(A(a, v) = \frac{d^2}{d\alpha^2} V_q(a + \alpha v)\big|_{\alpha=0}\right) \tag{2.14}$$

Лемма 2.3. Для любого числа n (см. (0.4)) можно указать числа m ($2 < m \leqslant 3$) и H такие, что

$$|C(a, \alpha, v)| < \alpha^m H \rho^m \qquad \text{при } R_0(v) = \rho^2 \tag{2.15}$$

Доказательство. Вклад в C дают члены функционала (2.7)

$$C_1 = q^2 / J_2(\varphi), \qquad C_2 = \int dx\, F(\varphi^*\varphi) \tag{2.16}$$

Чтобы оценить C_2, воспользуемся неравенством (в рассматриваемом случае $k > 1$)

$$|(1 - 2x + x^2 + y^2)^k - 2kx + k(x^2 + y^2) + {}^1/_2 k(k-1)4x^2| <$$
$$< h[(x^2 + y^2)^{m/2} + (x^2 + y^2)^k] \tag{2.17}$$

Здесь $m = 2k$ при $k < {}^3/_2$, $m = 3$ при $k \geqslant {}^3/_2$. В (2.16) подставим (0.4) при

$$x = \alpha\, \mathrm{Re}\,[v / a(x, E)], \qquad y = \alpha\, \mathrm{Im}\,[v / a(x, E)]$$

Учитывая ограниченность функции $a(x, E)$, получим

$$|C(a, \alpha, v)| < h[\alpha^m \mathrm{Im}(v) + \alpha^{2k} J_{2k}(v)] \tag{2.18}$$

Ввиду (Б.1) отсюда следует оценка (2.15) для C_2; для C_1 она устанавливается еще проще. Лемма доказана.

Таким образом, чтобы выяснить, имеется ли для данного решения $\varphi(x, t, E)$ неравенство (2.12), надо узнать знак нижней грани λ функционала

$$\Lambda(\varphi) = A(D_E\varphi, B_E\varphi) / R_E(B_E\varphi) \tag{2.19}$$

---

[1] Существование решения φ_t при всех $t > 0$ вытекает из следствия 2.1; коль скоро решение существует при $0 < t < T$ (теорема 2.1), выполняется первое из неравенств (2.13), что (см. ниже приложение (Б.1)) дает возможность воспользоваться следствием 2.1. При этом следует потребовать существования непрерывных производных $d\psi_0 / dx$, $d^2\varphi_0 / dx^2$: чтобы избежать обсуждения сходимости интегралов в формулах (1.1) и (1.2), можно предположить функции φ_0 и ψ_0 конечными.

Соответствующее исследование проведено в приложении А. Результат его состоит в том, что

$$\lambda \gtrless 0 \qquad \text{при } E^2 \gtrless {}^1/_2\, n \tag{2.20}$$

Отметим, что эта формула, определяющая область устойчивости, может быть «получена» из следующих наводящих соображений: стационарными точками функционала $V_q(\varphi)$ являются «точки» $a(x, E)$, где число E — корень уравнения $q = Q(E)$ (см. (2.4)). При $n < 2$ это уравнение имеет два корня; при $n \geqslant 2$ — один. Кроме того, функционал $V_q(\varphi)$ имеет несобственные «стационарные точки», в частности, «точку» φ_1:

$$E \int |\varphi_1|^2 dx = q, \qquad \int |\nabla\varphi_1|^2 dx = \int |\varphi_1|^{2+2n}\, dx = 0 \tag{2.21}$$

Так неравенство $E^2 > {}^1/_2\, n$ есть условие того, что из всех стационарных точек функционала $V_q(\varphi)$ в точке $\varphi(x, t, E)$ он принимает наименьшее значение.

2.6. Итак, при $1 > E^2 > {}^1/_2\, n$ решение $\varphi(x, t, E)$ (см. (0.2)) уравнения (0.1) (функция f определена формулой (0.4)) устойчиво в смысле леммы (2.2) (см. также (Б.1)). Если теперь $E^2 < {}^1/_2\, n$, то точка $a(x, E)$ для функционала $V_q(\varphi)$ — седло; пока что можно лишь сказать, что в этом случае нельзя доказать устойчивость решения $\varphi(x, t, E)$ изложенным способом. В приложении А, однако, приведены достаточно надежные, хотя и нестрогие соображения, показывающие, что при $E^2 < {}^1/_2\, n$ решение $\varphi(x, t, E)$ неустойчиво по первому приближению [1] (отсюда, по-видимому, следует неустойчивость $\varphi(x, t, E)$). Таким образом, существует весьма определенная связь между устойчивостью решения (0.2) и характером экстремума, который имеет в точке $\varphi(x, t, E)$ функционал энергии.

3. Рассмотрим вещественное решение $\varphi(x, t)$; в формуле (0.4) примем для определенности $n = 1$.

Рассмотрим функционал потенциальной энергии

$$U(\varphi) = \int dx\, [|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - {}^1/_4 |\varphi|^4]$$

на «прямой» $\varphi = c\psi$; с ростом c от нуля $U(c\psi)$ сначала растет, достигает максимума

$$M(\psi) = [R_0(\psi)]^2 / [2J_4(\psi)]$$

и затем убывает. Из (Б.1) следует, что нижняя граница α функционала $M(\psi)$ положительна. Определим область K условиями

$$U(\varphi) < \alpha, \qquad \frac{d}{dc}\, U(c\varphi)\Big|_{c=1} > 0$$

Пользуясь следствием 2.1, легко убедиться, что решение задачи $P(\varphi_0, \psi_0)$ для $\varphi_0 \in K$ существует при $t > 0$, если

$$\int |\psi_0(x)|^2 dx + U(\varphi_0) < \alpha$$

---

[1] Для $E = 0$ этот результат получен вполне строго. Случай $E = 0$ рассмотрен также Хобартом [5].

Соответствующее движение подобно конечному движению в потенциальной яме в механике; отличие состоит, в частности, в том, что у нас число степеней свободы бесконечно, поэтому бесконечен доступный для движения фазовый объем, поэтому нет теоремы возвращения (в малую окрестность начальной точки по прошествии достаточно большого времени) [6]. В этом смысле движение, описываемое уравнением (0.1), является необратимым.

Перейдем в (0.1) от $\varphi(x, t)$ к ее преобразованию Фурье $\Phi(p, t)$. Получающееся при этом уравнение описывает, очевидно, бесконечную систему связанных осцилляторов. Согласно существующим представлениям, эволюция такой системы должна идти в сторону приближения к статистическому равновесию, т. е. в сторону установления равномерного распределения кинетической энергии

$$T = \int |\Phi^{\cdot}|^2 dp \tag{3.1}$$

между степенями свободы так, что существенная область интеграции

$$|p| < N(t)$$

в (3.1) с ростом t неограниченно растет, и внутри этой области подынтегральная функция (в некотором смысле) перестает зависеть от p и стремится к нулю.

При этом $\Phi(p, t) \to 0$ (при $t \to \infty$), и нелинейность в уравнении для $\Phi(p, t)$ становится лишь малой добавкой, так что

$$\Phi(p, t) = A(p, t) \cos[\omega(p) t + \delta]$$

где A и δ — медленно меняющиеся функции времени.

Согласно предыдущему, следует ожидать, что при $t \to \infty$ интеграл

$$\int dp\, [\omega(p)]^{2+\varepsilon} |A(p, t)|^2$$

неограниченно растет при $\varepsilon > 0$, остается ограниченным при $\varepsilon = 0$ и стремится к нулю при $\varepsilon < 0$. Отсюда ввиду неравенства

$$\int |A(p, t)|\, dp \leqslant \left\{ \int [\omega(p)]^{-2} dp \int |\omega(q) A(q, t)|^2 dq \right\}^{1/2}$$

следует

$$\varphi(x, t) \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{3.2}$$

3.1. Предположительная картина поведения $\varphi(x, t)$ при $t \to \infty$, данная в п. 3, связана с такими сложными представлениями, как постулат о равнораспределении энергии по степеням свободы. Между тем, есть несравненно более простой механизм, приводящий к (3.2), именно тот, который обеспечивает (3.2) в случае линейного уравнения.

3.2. В случае «квазифинитного» комплексного решения уравнения (0.1), т. е. для движения, близкого к устойчивому «положению равновесия» $\varphi(x, t, E)$, в асимптотике $\varphi(x, t)$, помимо части φ_3, описанной в п. 3, можно ожидать присутствия еще нескольких частицеподобных решений

$$\varphi(x, t) \sim \sum_k \varphi(x, t, E_k, \beta_k) + \varphi_3$$

уносящих на себе весь заряд, причем одно из этих решений окажется близким (в смысле леммы 2.2) к $\varphi(x, t, E)$. При $n > 2$ [заряд расплывается — см. минимум (2.21) функционала $V_q(\varphi)$.

4. Набор частицеподобных решений в трехмерном случае, вообще говоря, существенно богаче, чем в одномерном, имеются радиально симметричные решения без узлов, с одним, двумя и т. д. узлами [1]; далее, возможны, вероятно, решения вида

$$a\ (\mathbf{x},\ E) = \alpha_m\ (r,\ \theta,\ E)\ e^{im\varphi}$$

Здесь r, θ и φ — сферические координаты точки $\mathbf{x}$.

Далее, подобно (2.5), в трехмерном случае можно получить формулу (справедливую при любой функции f)

$$\int d^3x\ \{2z\ (1-E^2) - 3F\ (z) + zf\ (z)\} = 0, \qquad z = |a\ (x,\ E)|^2 \qquad (4.1)$$

Отсюда следует, что уравнение (0.1) может и не иметь частицеподобных решений; так обстоит дело, например [1], при $f = |\varphi|^{2n}$, $n \geqslant 2$.

4.1. Существенным образом изменяются свойства многообразия $R_E\ (\varphi) = \rho$ при переходе к трехмерному случаю; неравенство (Б.1) заменяется [2] неравенством (Б.2).

Соответственно доказательство теоремы существования усложняется; для $n < 1$ оно может быть проведено методом работы [8] (см. также [9]): итерации на этот раз сходятся по норме [3]

$$\|\varphi\| = \int d^3x\ [|\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2]$$

4.2. Исследование квадратичного функционала (2.19) проводится в точности так же, как в одномерном случае: на этот раз уравнение (А.6) дает $E^2 = 3n/2$.

Решение $\varphi\ (x,\ t,\ E)$ устойчиво при $1 > E^2 > 3n/2$, если уравнение (А.4) при $\alpha = 0$ имеет лишь одно собственное значение, меньшее единицы, $m_0 = 1$; если же уравнение (А.4) имеет при $\alpha = 0$ таких собственных значений более одного, $m_0 > 1$, то оно имеет, по крайней мере, одно собственное значение $\lambda_0'\ (\alpha)$, меньшее единицы при всех значениях $\alpha > 0$.

Поэтому при $m_0 > 1$ решение $\varphi\ (x,\ t,\ E)$, по-видимому, неустойчиво. Для решений $\varphi\ (x,\ t,\ E)$ с узлами, очевидно, $m_0 > 1$ (см. [10], гл. VI, § 1).

Численный расчет, проведенный для радиально-симметричного решения без узлов при $n = 1$ (см. (0.4)), показал $m_0 = 1$: однако доказать, что $m_0 = 1$ для всех (или хотя бы радиально-симметричных) безузловых решений, не удалось.

---

[1] В. П. Шириков в статье «Множество решений краевой задачи для некоторых уравнений математической физики» (Препринт ОИЯИ Р-1682, 1964) доказал существование при $n < {}^3/_2$ радиально-симметричных решений с любым числом узлов. Отсутствие радиально-симметричных частицеподобных решений при $n > 2$ доказано Нехари [7]; из (4.1) следует отсутствие любых частицеподобных решений. Этот результат является следствием того, что при $n > 2$ число α п. 3 равно 0.

[2] Поэтому лемма вида (2.5) может быть доказана только при $n < 2$.

[3] Интересной, пока нерешенной, задачей представляется доказательство существования при $2 > n > 1$.

Приложение А. Рассмотрим задачу об отыскании минимума функционала

$$\Lambda\ [u\ (x)] = A\ [a\ (x, E),\ u\ (x)] / R_E\ (u)$$

в классе функций $u\ (x)$ таких, что (А.1)

$$\int dx\, a\ (x, E) \left[1 - E^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right] \operatorname{Im} u\ (x) = \int dx \frac{\partial a\ (x, E)}{\partial x} \left[1 - E^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right] \operatorname{Re} u\ (x) = 0$$

(см. определение функции $B\varphi\ (x)$ в начале п.2.4).

Минимизация функционала $\Lambda\ (u)$ приводит к уравнению

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - E^2 - (2n+1)\, a^{2n}(x, E)\, \lambda_1'\right\} u_1\ (x) +$$

$$+ \lambda_1'\ [Q\ (E)]^2\ \{J_2\ [a\ (x, E)\}^{-3}\ a\ (x, E) \int ds u_1\ (s)\ a\ (s, E) = 0 \tag{А.2}$$

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - E^2 - \lambda_2' a^{2n}\ (x, E)\right\} u_2\ (x) = 0 \tag{А.3}$$

$$u_1 = \operatorname{Re} u\ (x), \qquad u_2 = \operatorname{Im} u\ (x), \qquad \lambda' = (1 - \lambda)^{-1} \qquad (\lambda = \Lambda\ [u_1 + iu_2])$$

Заметим, что λ' — мотонно растущая функция λ; причем $\lambda' = 1$ при $\lambda = 0$. Прежде всего обратим внимание на то, что уравнения (А.2) и (А.3) имеют собственные функции

$$u_1 = u_{10} = \frac{\partial a\ (x, E)}{\partial x}, \qquad u_2 = u_{20} = a\ (x, E)$$

с собственными значениями $\lambda' = \lambda_2' = 1$. Отсюда легко видеть, что собственные функции уравнений (А.2) и (А.3) с собственными значениями $\lambda' \neq 1$ удовлетворяют условиям (А.1): наоборот, функции u_{10} и u_{20} этим условиям не удовлетворяют. Предполагая, что собственные функции уравнений (А.2) и (А.3) образуют полную систему, видим, что нижняя грань функционала (2.19) определяется низшим собственным значением уравнений (А.2) и (А.3) (собственные функции u_{10} и u_{20} и их собственные значения в расчет не принимаются). Функция $a\ (x, E)$ не имеет нулей, поэтому собственное значение $\lambda_2' = 1$ для уравнения (А.3) — низшее. Далее, заменой $x\ \sqrt{1 - E^2} = y$ (см. (2.2)) уравнение (А.2) приводится к виду

$$\left\{-\frac{d^2}{dy^2} + 1 - \lambda_1'\ (2n+1)\ b^{2n}\ (y)\right\} w\ (y) + \alpha\lambda_1' b\ (y)\ [J_2\ (b)]^{-1} \int w\ (z)\ b\ (z)\ dz = 0$$

$$\left(\alpha = \frac{4E^2}{1 - E^2}\right) \tag{А.4}$$

Дифференцируя по α, найдем

$$\frac{d\lambda_1'}{d\alpha} = \frac{\lambda_1'}{J_2\ (b)\ R_0\ (w)} \left[\int ds\, b\ (s)\ w\ (s)\right]^2 \geqslant 0 \tag{А.5}$$

При $\alpha = 0$ уравнение (А.4) имеет меньшее единицы собственное значение λ_{10}', причем только одно, ибо собственному значению $\lambda_1' = 1$ соответствует собственная функция $w = \partial b\ /\ \partial y$ с одним нулем (при $\alpha = 0$ интегральный член в (А.4) выпадает). Ввиду (А.5) остается лишь выяснить, обращается ли в единицу собственное значение $\lambda_{10}'\ (\alpha)$ уравнения (А.4), которое при $\alpha = 0$ принимает значение λ_{10}'.

Продифференцировав по E уравнение (2.1), найдем

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - E^2 - (2n+1)\ a^{2n}\ (x, E)\right\} \frac{\partial a\ (x, E)}{\partial E} = 2Ea\ (x, E)$$

Сравнив это соотношение с (А.4) при $\lambda_1' = 1$, получаем уравнение

$$E \frac{d}{dE} J_2\ [a\ (x, E)] = -J_2\ [a\ (x, E)] \tag{А.6}$$

для отыскания нуля функции $\lambda_{10}'\ (\alpha) - 1$. Отсюда следует (2.20).

Далее, подставим в (0.1) уравнение $\varphi(x, t) = \varphi(x, t, E) + v$. Отбросив члены высших порядков по v, получим уравнение в вариациях, которое в переменных

$$\tau = t\sqrt{1 - E^2}, \quad y = x\sqrt{1 - E^2} \qquad \text{при } v = e^{\nu\tau} w(y)$$

примет вид

$$\begin{aligned} &\left\{\nu^2 - \frac{d^2}{dy^2} + 1 - (2n + 1)\, b^{2n}(y)\right\} w_1(y) = \alpha\nu w_2(y) \qquad (w_1 = \operatorname{Re} w) \\ &\left\{\nu^2 - \frac{d^2}{dy^2} + 1 - b^{2n}(y)\right\} w_2(y) = -\alpha\nu w_1(y) \qquad (w_2 = \operatorname{Im} w) \end{aligned} \tag{A.7}$$

При $\alpha = 0$ эта система имеет собственное значение $\nu_0 > 0$ (так что решение $\varphi(x, t, 0)$ неустойчиво по первому приближению). Отсюда естественно ожидать, что есть область $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, в которой система (A.7) имеет вещественное собственное число $\nu(\alpha)$, $\nu(\alpha) > 0$ при $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, $\nu(\alpha_0) = 0$. Легко убедиться, что значение α_0 определяется соотношением (A.6).

Доказать существование решения системы (A.7) с предполагаемыми выше свойствами при $\alpha \neq 0$ не удалось. Однако возникающее в связи с этим сомнение смягчается благоприятным результатом проведенного при $n = 1$ численного расчета (решение системы (A.7) определялось в виде ряда по степеням $a(x, E)$). Отметим, что уравнение (A.6) для отыскания корня уравнения $\lambda_{10}'(\alpha) = 1$ (и корня уравнения $\nu(\alpha) = 0$) остается в силе при любой функции $f(\varphi^*\varphi)$.

Приложение Б. Для функции от одной переменной имеет место неравенство

$$|\varphi(x)| < H\,[R_0(\varphi)]^{1/2} \tag{Б.1}$$

Аналогично для функции трех независимых переменных [11]

$$J_l(\varphi) < H\,[R_0(\varphi)]^{1/2\,l} \qquad \text{при } 2 \leqslant l < 6 \tag{Б.2}$$

Число H не зависит от φ.

Поступила 15 II 1964

Объединенный институт ядерных исследований

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 35, стр. 452—457.
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. Гостехиздат, 1949.
3. Рыбаков Ю. П. К вопросу об устойчивости частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. Вестн. Моск. ун-та, 1962, № 4, стр. 24—27.
4. Ficken F. A., Fleischman B. A. Periodical Solution of the Nonlinear Wave Equation. Communs Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, p. 333—357.
5. Hobart R. H. On instability of class of unitary field theories. Proc. Rhys. Soc., 1963, vol. 82, No. 2, p. 201—204.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
7. Nehari Z. On a nonlinear differential Equation arising in nuclear Physics. Proc. Roy. Irish. Acad. A, 1963, vol. 62, No. 9.
8. Jorgens K. Das Anfahgswertsproblem in Grossen für eine Klasse nichlinearer Wellengleichungen. Math. Z., 1961, B. 77, S. 295—308.
9. Segal Irving. Non-linear semi-groups. Ann. Math., 1963, vol. 78, No. 2, p. 339—363.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математического физики, т. 1. Гостехтеоретиздат, 1951.
11. Соболев С. П. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.