Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЙ ДВУСКОРОСТНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ТВЕРДЫМИ ИЛИ ЖИДКИМИ ЧАСТИЦАМИ

А. Н. Крайко, Л. Е. Стернин

(Москва)

Задача о движении сплошной среды с инородными частицами чрезвычайно сложна. Однако при выполнении ряда условий явление можно достаточно точно описать при помощи модели двускоростной сплошной среды. Эти условия состоят в следующем: (1) частицы — одинаковые сферы, столкновениями между которыми можно пренебречь; (2) вне поверхностей разрыва расстояния, на которых характеристики течения изменяются существенно, много больше расстояний между частицами; (3) число Маха относительного движения частиц меньше критического. Кроме того, принимается, что вязкость и теплопроводность важны лишь в процессах взаимодействия газа и частиц.

Течениям подобного рода посвящено значительное число работ. Однако большинство из них ограничивается одномерным стационарным случаем. Авторам известны лишь три работы более широкого плана. Х. А. Рахматулин [1] получил уравнения неразрывности и движения и рассмотрел одномерные нестационарные течения с плоскими волнами; Я. З. Клейман [2] провел исследование и классификацию сильных разрывов. Оба автора для замыкания системы уравнений использовали зависимости, эквивалентные предположению о баротропности. Для большинства сред, в том числе для газа, это предположение неправильно. Наконец, Клигель и Никерсон [3] привели уравнения характеристик стационарного осесимметричного течения. Не делая предположения о баротропности, они, однако, пренебрегали объемом, занимаемым частицами.

В настоящей работе подобные предположения не используются. В общем случае уравнения неразрывности, движения и энергии получены в интегральной и дифференциальной формах. Рассмотрены поверхности разрыва. Подробно исследованы одномерные нестационарные и двумерные стационарные течения.

1. Рассмотрим движение сплошной среды с твердыми или жидкими сферическими частицами в случае, когда размер частиц мал по сравнению с расстоянием, характеризующим существенное изменение параметров течения. Пусть m — масса, $\rho_d{}^\circ = \text{const}$ — плотность, me_d — внутренняя энергия, $\mathbf{V}_d$ — скорость и T_d — температура частицы, p — давление, T — температура газа, $\mathbf{V}$ — скорость газа и t — время. Будем считать, что сила, действующая на частицу со стороны газа, есть сумма силы, пропорциональной градиенту давления, и силы $m\mathbf{f}$, обусловленной вязкостью среды. При определении первой силы предположим, что скорость частицы равна скорости газа в данной точке, а при определении второй, — что частица обтекается однородным потоком со скоростью $\mathbf{V} - \mathbf{V}_d$. Аналогично определим тепловой поток mq от газа к частице, вызванный теплопроводностью среды. Кроме того, частица может получать тепло mQ_d, а также на нее может действовать сила $m\mathbf{F}_d$ (обусловленные внешними источниками).

Так как условие (2) позволяет каждой точке течения приписать определенные значения $\mathbf{V}_d$ и e_d, то уравнения движения и энергии частиц будут

$$(\mathbf{V}_d\nabla)\,\mathbf{V}_d + \frac{\partial \mathbf{V}_d}{\partial t} + \frac{1}{\rho_d{}^\circ}\nabla p - \mathbf{f} - \mathbf{F}_d = 0 \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{V}_d\nabla e_d + \frac{\partial e_d}{\partial t} - q - Q_d = 0 \qquad (1.2)$$

$$\mathbf{f} = \varphi^1\cdot|\mathbf{V} - \mathbf{V}_d|^n\,(\mathbf{V} - \mathbf{V}_d), \qquad q = \varphi^2\cdot(T - T_d)^k$$
$$T_d = T_d\,(e_d), \quad \varphi^i = \varphi^i\,(p,\,T,\,T_d,\,|\mathbf{V} - \mathbf{V}_d|), \quad n > -1, \quad k > 0 \qquad (1.3)$$

Правые части в (1.3) известны из решения задачи об обтекании сферы однородным потоком вязкого и теплопроводного газа или из эксперимента.

2. Для построения модели двускоростной сплошной среды, наряду с истинными плотностями газа и частиц ρ° и $\rho_d{}^\circ$, вводятся плотности $\rho = \Delta M\,/\,\Delta\tau$ и $\rho_d = \Delta M_d\,/\,\Delta\tau$, где ΔM и ΔM_d — массы газа и частиц в физически бесконечно малом объеме $\Delta\tau$. В соответствии с этим

$$\rho = \rho^\circ\,(1 - \rho_d\,/\,\rho_d{}^\circ) \qquad (2.1)$$

Определение ρ_d имеет смысл в одном из двух случаев: или, если $\Delta\tau$ содержит достаточно много частиц (выполняется условие (2)), или, если частиц крайне мáло, и можно положить $\rho_d = 0$. Наряду с ρ и ρ_d, вводятся остальные характеристики газа и частиц, и, таким образом, среда с инородными частицами заменяется двумя взаимодействующими сплошными средами: собственно газом и «газом» частиц, причем предполагается, что свойства последнего изменяются в соответствии с (1.1) — (1.3). Результаты исследования справедливы и при учете влияния других частиц на обтекание каждой частицы. В этом случае φ^i в (1.3) зависят также и от ρ_d, так как здесь $\mathbf{f}$ и q определяются из решения задачи о течении газа в симметричной решетке частиц.

Уравнения неразрывности обеих сред выводятся обычным путем и в интегральной форме имеют вид

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau + \iint\limits_{S}\rho\mathbf{V}\mathbf{n}\,dS = 0, \qquad \iiint\limits_{\tau}\frac{\partial\rho_d}{\partial t}\,d\tau + \iint\limits_{S}\rho_d\mathbf{V}_d\mathbf{n}\,dS = 0 \qquad (2.2)$$

Здесь τ — произвольный объем, ограниченный поверхностью S; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S.

Для получения уравнений движения и энергии рассмотрим систему из газа и частиц, находящихся внутри произвольной поверхности S, связанной с фиксированными частицами газа. Изменение количества движения такой системы за время dt вызывается силой $\mathbf{F}_d$, действующей на частицы, внешней массовой силой $\mathbf{F}$, действующей на газ, и силой, действующей на границу системы. Кроме того, необходимо учесть поток количества движения, связанный с переносом частиц через поверхность S со скоростью $\mathbf{V}_d - \mathbf{V}$. Заметим, что поверхностная сила есть результирующая только сил давления, так как вязкость в газе предполагается отсутствующей, а сила, действующая со стороны частиц на газ в объеме $d\tau$, есть $\mathbf{f}\rho_d d\tau$ и, следовательно, носит объемный характер. Учитывая сказанное и проводя обычные преобразования [4], получим уравнение движения в интегральной форме

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \left[(\mathbf{V}\nabla) \left(\mathbf{V} + \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{V}_d \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{V} + \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{V}_d \right) - \mathbf{F} - \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{F}_d \right] d\tau +$$

$$+ \iint\limits_{S} \{ p\mathbf{n} + \rho_d \mathbf{V}_d [(\mathbf{V}_d - \mathbf{V})\,\mathbf{n}] \} \, dS = 0 \qquad (2.3)$$

Чтобы найти работу поверхностных сил при выводе уравнения энергии, необходимо учесть различие скоростей участков поверхности dS, занятых газом и частицами. Как показано в [1], для элемента dS газом занята поверхность $(\rho / \rho^\circ)\, dS$, а частицами — $(\rho_d / \rho_d{}^\circ)\, dS$. Учитывая это обстоятельство, а также поток энергии, который переносится частицами через границу S, и делая те же преобразования, что и при выводе (2.3), получим

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \left\{ \mathbf{V}\nabla \left[\frac{V^2}{2} + e + \frac{\rho_d}{\rho} \left(\frac{V_d{}^2}{2} + e_d \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{V^2}{2} + e + \frac{\rho_d}{\rho} \left(\frac{V_d{}^2}{2} + e_d \right) \right] - \right.$$

$$\left. - Q - \mathbf{F}\mathbf{V} - \frac{\rho_d}{\rho} (Q_d + \mathbf{F}_d \mathbf{V}_d) \right\} d\tau + \iint\limits_{S} \left[p \left(\frac{\rho}{\rho^\circ} \mathbf{V} + \frac{\rho_d}{\rho_d{}^\circ} \mathbf{V}_d \right) + \right.$$

$$\left. + \rho_d (\mathbf{V}_d - \mathbf{V}) \left(\frac{V_d{}^2}{2} + e_d \right) \right] \mathbf{n} dS = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь $V = |\mathbf{V}|$; e — удельная внутренняя энергия газа; $\rho Q d\tau$ — тепло, получаемое от внешних источников газом, находящимся в объеме $d\tau$.

Уравнения (1.1) — (1.3) и (2.1) — (2.4) составляют основу для описания течений двускоростной среды. Система замыкается выражениями ρ° и e (или удельной энтальпии газа — h) через p и T

$$\rho^\circ = \rho^\circ (p, T), \qquad e = e(p, T), \qquad h \equiv e + p / \rho^\circ = h(p, T) \qquad (2.5)$$

В дальнейшем удобно считать, что переменные приведены к безразмерному виду. Это достигается отнесением пространственных координат к характерному размеру задачи l, скоростей — к V_∞, времени — к l / V_∞, плотностей — к ρ_∞, давления — к $\rho_\infty V_\infty{}^2$, внутренних энергий — к $V_\infty{}^2$, сил — к $V_\infty{}^2 / l$, тепловых потоков — к $V_\infty{}^3 / l$ и температур — к $V_\infty{}^2 / R$, где V_∞ и ρ_∞ — характерные размерные скорость и плотность и R — газовая постоянная газа. После приведения к безразмерному виду в правых частях (1.3) и (2.5) появляются безразмерные параметры. В φ^i эти параметры входят как множители и характеризуют степень взаимодействия газа и частиц.

3. В областях течения, не содержащих сильных разрывов, интегральные уравнения могут быть заменены дифференциальными. Переходя от поверхностных интегралов к объемным, учитывая произвольность объема τ и проводя некоторые преобразования с использованием (1.1) и (1.2), получим уравнения неразрывности, движения и энергии в дифференциальной форме

$$\nabla (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \nabla (\rho_d \mathbf{V}_d) + \frac{\partial \rho_d}{\partial t} = 0$$

$$(\mathbf{V}\nabla)\, \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho^\circ} \nabla p + \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{f} - \mathbf{F} = 0 \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{V}\nabla h + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\rho^\circ} \left(\mathbf{V}\nabla p + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + N = 0$$

$$(N = [(\mathbf{V}_d - \mathbf{V})\, \mathbf{f} + q]\, \rho_d / \rho - Q)$$

Отметим, что уравнения неразрывности и движения совпадают с соответствующими уравнениями работы [1].

4. Уравнения (1.1), (1.2) и (2.2) — (2.4) позволяют получить и соотношения на сильных разрывах.

Так как малый элемент разрыва можно считать плоским, то ограничимся плоскими разрывами, причем специальным выбором положения и постоянной скорости системы координат добьемся совпадения (в данный момент времени) поверхности разрыва с плоскостью $x = 0$. Проекции $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_d$ на ось x обозначим через V_n и V_{nd}, а составляющие, параллельные плоскости разрыва,— через $\mathbf{V}_\tau$ и $\mathbf{V}_{\tau d}$. Скачок произвольной величины φ на разрыве в настоящем разделе будем писать в виде $[\varphi] \equiv \varphi_+ - \varphi_-$, где минус приписан параметрам при $x < 0$, а плюс — при $x > 0$.

Рассмотрим цилиндр, основания которого имеют единичную площадь и лежат в плоскостях $x = \pm\varepsilon$, а образующая параллельна x. Применим к нему соотношения (2.2) — (2.4). В интегралах по объему интегрированием избавимся от производных по x. Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, будем учитывать конечность $\mathbf{f}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_d$, q, Q, Q_d и производных по y, z и t.

Из (2.2) получим

$$[\rho V_n] = 0, \qquad [\rho_d V_{nd}] = 0 \tag{4.1}$$

Эти условия позволяют ввести потоки $j = \rho V_n$ и $j_d = \rho_d V_{nd}$, непрерывные при переходе через разрыв. Аналогично из (1.1), (1.2), (2.3), (2.4) и (4.1) получим остальные соотношения на разрыве, которые после ряда преобразований примут вид

$$\begin{gathered} j\,[V_n] + j_d\,[V_{nd}] + [p] = 0, \qquad j\,[\mathbf{V}_\tau] = 0 \\ [V_{nd}^2] + 2\,[p]/\rho_d^\circ = 0, \qquad j_d[\mathbf{V}_{\tau d}] = 0 \\ j\,[{}^1/{}_2V_n^2 + h] = 0, \qquad j_d[e_d] = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

При заданном течении на одной из сторон разрыва (4.1) и (4.2) вместе с (2.1) и (2.5) определяют течение по другую его сторону.

Проведем исследование полученных соотношений, причем опустим случай отсутствия газа хотя бы с одной из сторон разрыва, т. е. будем считать $\rho_- > 0$ и $\rho_+ > 0$. Кроме того, так как случай $\rho_{d-} = \rho_{d+} = 0$ не представляет интереса, то будем считать, что $\rho_{d-} > 0$.

Возможны пять принципиально различных случаев.

Первый случай. $j = j_d = 0$, т. е. поток среды через разрыв отсутствует. Из анализа условий (4.2) имеем

$$[p] = 0, \qquad V_{n-} = V_{n+} = V_{nd-} = V_{nd+} = 0$$

Значения $[\mathbf{V}_\tau]$, $[\mathbf{V}_{\tau d}]$, $[\rho_d]$, $[e_d]$ и $[T]$ произвольны и определяют, в соответствии с (2.5) и (2.1), скачки ρ°, h и ρ. Имеем тангенциальный разрыв, общий для обеих сред.

Второй случай. $j = 0$, $j_d \neq 0$, т. е. имеется поток частиц при отсутствии потока газа. Из первого и третьего условий (4.2) и того, что $\rho_d/\rho_d^\circ < 1$, получим

$$[p] = 0, \quad [V_{nd}] = 0$$

Отсюда, из (4.1) и остальных уравнений (4.2) найдем

$$[\rho_d] = 0, \qquad [e_d] = 0, \qquad [\mathbf{V}_{\tau d}] = 0$$

Скачки $\mathbf{V}_\tau$ и T произвольны и определяют, в силу (2.5) и (2.1), скачки $\rho^\bullet$, h и ρ. В данном случае тангенциальный разрыв в газе пересекается непрерывным потоком частиц.

Третий случай. $j \neq 0$, $j_d = 0$, $\rho_{d-} > 0$, $\rho_{d+} > 0$, т. е. через разрыв протекает только газ, но частицы имеются всюду. Из этого условия, используя последовательно третье, первое и пятое уравнения (4.2), первое условие (4.1), а также второе уравнение (4.2), найдем

$$V_{nd-} = V_{nd+} = 0, \qquad [p] = [h] = [\rho] = [V_n] = 0, \qquad [\mathbf{V}_\tau] = 0$$

Из непрерывности p, h и ρ, в силу (2.5), следует непрерывность T и ρ°, а затем из (2.1) — непрерывность ρ_d. Разрывы $\mathbf{V}_{\tau d}$ и e_d произвольны. Таким образом, имеем непрерывный поток газа через поверхность тангенциального разрыва «сплошной среды» частиц. Непрерывность параметров газа обеспечивается непрерывностью плотности частиц.

Характерной особенностью рассмотренных типов разрывов является непрерывность давления.

Четвертый случай. $j \neq 0$, $j_d = 0$, $\rho_{d-} > 0$, $\rho_{d+} = 0$ — в этом случае имеет место протекание газа через границу области, содержащей частицы. Теперь из первого и пятого уравнений (4.2) получим два соотношения

$$[p] = j^2 \left\{\frac{1}{\rho_-^\circ}\left(1 - \frac{\rho_{d-}}{\rho_d^\circ}\right)^{-1} - \frac{1}{\rho_+^\circ}\right\}, \qquad 2[h] = \left\{\frac{1}{\rho_+^\circ} + \frac{1}{\rho_-^\circ}\left(1 - \frac{\rho_{d-}}{\rho_d^\circ}\right)^{-1}\right\}[p]$$

которые вместе с выражениями (2.5) для ρ° и h определяют $[p]$, $[T]$, $[h]$ и $[\rho^\circ]$, причем $\rho_+ = \rho_+^\circ$. Как видно из последнего равенства, знаки $[p]$ и $[h]$ совпадают. Далее, на основании (4.1) и первых двух уравнений (4.2)

$$[V_n] = -[p]/j, \qquad \rho_+/\rho_- = V_{n-}/V_{n+}, \qquad [\mathbf{V}_\tau] = 0$$

Так как при $x > 0$ частицы в данном случае отсутствуют, то смысл параметров V_{nd+}, $\mathbf{V}_{\tau d+}$ и e_{d+} весьма условен. Тем не менее, и они могут быть определены, причем $[\mathbf{V}_{\tau d}]$ и $[e_d]$ произвольны, а $V_{nd+}^2 = -(2/\rho_d^\circ)[p]$. Используя терминологию работы [2], назовем рассмотренные разрывы комбинированными.

Пятый случай. $j \neq 0$, $j_d \neq 0$. В данном случае из второго, четвертого и шестого условий (4.2)

$$[\mathbf{V}_\tau] = 0, \qquad [\mathbf{V}_{\tau d}] = 0, \qquad [e_d] = 0$$

т. е. указанные параметры непрерывны.

Первое и третье уравнения (4.2) с учетом (2.1) можно записать в виде

$$j^2 = \frac{[p]}{[v]}\left(\frac{2v_d^\circ}{v_{d-} + v_{d+}} - 1\right), \qquad j_d^2 = -\frac{2v_d^\circ\,[p]}{[v_d^2]} \tag{4.3}$$

где через v обозначены соответствующие удельные объемы. Так как $2v_d^\circ < v_{d-} + v_{d+}$, то из (4.1) — (4.3) следует, что знаки $[V_n]$, $[V_{nd}]$, $[v]$ и $[v_d]$ совпадают и противоположны знакам $[p]$, $[h]$, $[\rho]$ и $[\rho_d]$. Рассматриваемые разрывы являются ударными волнами.

Уравнение ударной адиабаты получается из (4.2), (4.3) и (2.1) и имеет вид

$$[h]-\frac{v_-^\circ+v_+^\circ}{2}[p]-\left\{\frac{[p]\,v_d^\circ}{j_d\,(v_{d-}+v_{d+})}\right\}^2\left(\frac{v_+^\circ}{v_{d+}-v_d^\circ}-\frac{v_-^\circ}{v_d-v_d^\circ}\right)=0$$

$$\left(v_{d+}=\sqrt{v_{d-}^2-2j_d^{-2}\,v_d^\circ\,[p]}\right) \tag{4.4}$$

Так как h и v° — функции p и T, то при известном течении при $x<0$ это уравнение дает связь v_+° и p_+. Параметры при $x>0$ определяются совместным решением (4.4) и первого уравнения (4.3). После определения v_+ и v_{d+} значения V_{n+} и V_{nd+} находятся из (4.1).

Протекание газа через разрывы двух последних типов сопровождается изменением его термодинамических параметров. В комбинированном разрыве это связано с конечностью объема, занимаемого частицами, т. е. с конечностью $v_d^\circ = 1\,\rho_d^\circ/6$. Этим же вызвано отличие (4.4) от уравнения ударной адиабаты чистого газа. Так как при плотном расположении частиц $\rho_d = \pi\,\rho_d^\circ/6$, то всегда $\rho_d < \rho_d^\circ$. В случае умеренных давлений при течении газа с твердыми или жидкими частицами имеем также $\rho^\circ \ll \rho_d^\circ$. В таких условиях эффект конечности v_d° мал, и в первом приближении можно положить $v_d^\circ = 0$. При этом изменение параметров газа в комбинированных разрывах и потока частиц в ударных волнах отсутствует, а изменение параметров газа в ударной волне такое же, как в чистом газе. В таком приближении проведен расчет прямых скачков уплотнения в работе [5]. Учитывая малость скачков термодинамических параметров газа в комбинированных разрывах, можно получить

$$T_-[s]\approx\frac{v_d^\circ v_-^\circ}{2\,(v_{d-}-v_d^\circ)}[p]$$

Здесь s — удельная энтропия газа. Отсюда легко определяется направление возможного изменения параметров.

5. Для решения различных задач нужны начальные и граничные условия. Формулировка начальных условий для всей среды и граничных условий, налагаемых на параметры газа, не отличается от случая течения идеальной сплошной среды. В частности, на твердых поверхностях должна исчезать нормальная составляющая скорости $\mathbf{V}$. Для решения уравнений, описывающих движение частиц, подобные граничные условия не требуются. Поэтому в общем случае $\mathbf{V}_d$ имеет составляющую, нормальную к твердой поверхности, а непротекание частиц обеспечивается их отражением по законам, определяемым природой частиц и поверхностей. Наличие отраженных потоков усложняет картину течения, делая необходимым рассмотрение не двускоростных, а многоскоростных сред. Задача упрощается в том случае, когда можно считать, что частицы поглощаются твердыми поверхностями. Так, например, будет в случае жидких капель.

6. Исследование различных типов течений начнем с одномерного нестационарного течения с плоской, цилиндрической или сферической симметрией. Расстояние от соответствующей плоскости, оси или центра обозначим через r. Так как скорости и силы в данном случае направлены по r, то (1.1), (1.2) и (3.1) примут вид

$$\rho\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\nu\rho V}{r}=0 \tag{6.1}$$

$$\rho_d\frac{\partial V_d}{\partial r}+V_d\frac{\partial\rho_d}{\partial r}+\frac{\partial\rho_d}{\partial t}+\frac{\nu\rho_d V_d}{r}=0 \tag{6.2}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\rho_d}{\rho}f-F=0 \tag{6.3}$$

$$V_d\frac{\partial V_d}{\partial r}+\frac{\partial V_d}{\partial t}+\frac{1}{\rho_d^\circ}\frac{\partial p}{\partial r}-f-F_d=0 \tag{6.4}$$

$$V\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{1}{\rho^\circ}\left(V\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}\right)+N=0 \tag{6.5}$$

$$V_d\frac{\partial e_d}{\partial r}+\frac{\partial e_d}{\partial t}-q-Q_d=0 \tag{6.6}$$

Здесь $\nu=0$, 1 и 2 соответственно в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях.

Рассмотрим вопрос о характеристиках системы (6.1) — (6.6). Прежде всего, из вида уравнений (6.5) и (6.6) следует, что характеристиками являются траектории газа и частиц. Если полные производные по t вдоль характеристики обозначить штрихом, то уравнения траекторий и соотношения вдоль них примут вид

$$r'-V=0, \qquad h'-(1/\rho^\circ)\,p'+N=0 \tag{6.7}$$

$$r'-V_d=0, \qquad e_d'-q-Q_d=0 \tag{6.8}$$

Оставшиеся уравнения содержат производные от p, V, V_d, ρ и ρ_d. Производные от ρ входят только в первое уравнение и могут быть исключены при помощи (2.1), (2.5) и (6.5). В результате вместо (6.1) получим

$$\rho^\circ a^2\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}-V\frac{\rho^{\circ 2}a^2}{\rho_d^\circ\rho}\frac{\partial\rho_d}{\partial r}-\frac{\rho^{\circ 2}a^2}{\rho_d^\circ\rho}\frac{\partial\rho_d}{\partial t}-\frac{a^2\rho_T{}^\circ}{h_T}N+\frac{\nu\rho^\circ a^2V}{r}=0 \tag{6.9}$$

Здесь a — скорость звука в газе

$$a^{-2}=\rho_p{}^\circ+\frac{\rho_T{}^\circ}{h_T}\left(\frac{1}{\rho^\circ}-h_p\right) \tag{6.10}$$

причем

$$\rho_p{}^\circ=\left(\frac{\partial\rho^\circ}{\partial p}\right)_T, \qquad \rho_T{}^\circ=\left(\frac{\partial\rho^\circ}{\partial T}\right)_p, \qquad h_p=\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T, \qquad h_T=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

Добавив к (6.2) — (6.4) и (6.9) выражение для приращения p

$$\frac{\partial p}{\partial r}dr+\frac{\partial p}{\partial t}dt=dp$$

и аналогичные соотношения для dV, dV_d и $d\rho_d$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения частных производных от p, V, V_d и ρ_d. Условие неоднозначности решения этой системы (равенство нулю соответствующих определителей) приводит к равенствам

$$(V_d-r')^2\,[a^2-(V-r')^2]+\frac{\rho^{\circ 2}\rho_d a^2}{\rho_d^{\circ 2}\rho}(V-r')^2=0 \tag{6.11}$$

$$(V_d-r')^2\left\{V'-\frac{V-r'}{\rho^\circ a^2}p'+(V-r')\left(\frac{\rho_T{}^\circ N}{\rho^\circ h_T}-\frac{\nu V}{r}\right)+\right. \tag{6.12}$$

$$+\frac{\rho_d}{\rho}f-F+\frac{\rho^\circ\rho_d(V-r')}{\rho_d^\circ\rho(V_d-r')}\left[\frac{V-r'}{V_d-r'}V_d'+(V_d-V)\times\right.$$

$$\left.\left.\times(\ln\rho_d)'-\frac{V-r'}{V_d-r'}\left(f+F_d\right)-(V-r')\frac{\nu V_d}{r}\right]\right\}=0$$

Уравнения (6.11) и (6.12) определяют характеристики, отличные от траекторий, причем (6.11) дает направления характеристик, а (6.12) — изменения параметров вдоль них.

Для выяснения вида корней уравнения (6.11) рассмотрим сначала такую точку течения, где $V = V_d$. Здесь (6.11) становится произведением двух сомножителей

$$(V_d - r')^2\,[b^2 - (V_d - r')^2] = 0, \qquad b^2 = a^2\left(1 + \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d}{\rho_d^{\circ 2}\rho}\right) > a^2$$

и, следовательно, имеет два различных корня $r_{1,2}' = V_d \pm b$ и кратный корень $r' = V_d$. Во втором случае (6.12) исчезает за счет первого множителя и поэтому не приводит к каким-либо дополнительным условиям. Если $V \neq V_d$, то решение (6.11) нельзя получить в явном виде. Однако, учитывая малость $v_d^\circ = 1 / \rho_d^\circ$, нетрудно найти разложения корней по степеням v_d°. В результате получим

$$r_{1,2}' = V \pm a\left[1 + \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d a^2}{2\rho_d^{\circ 2}\rho\,(V_d - V \mp a)^2}\right] + O\,(v_d^{\circ 4}) \tag{6.13}$$

$$r_{3,4}' = V_d \pm \frac{\rho^\circ a\,(V - V_d)}{\rho_d^\circ}\left\{\frac{\rho}{\rho_d}\,[(V - V_d)^2 - a^2]\right\}^{-1/2} + O\,(v_d^{\circ 2})$$

Первые два корня действительны и при $V = V_d$ с точностью до малых более высокого порядка совпадают с $V \pm b$. Третий и четвертый корни при $V \neq V_d$ действительны лишь при $|V - V_d| > a$, т. е. если относительная скорость частиц превосходит скорость звука в газе. Этот случай, однако, выходит за границы применимости настоящей теории. Итак, уравнения одномерного нестационарного движения, кроме траекторий, всегда имеют два семейства действительных характеристик, вдоль которых выполняются уравнения (6.13) и (6.12). С точностью до $o\,(v_d^\circ)$ уравнение (6.12) имеет вид

$$V' \pm \frac{1}{\rho^\circ a}\,p' \mp a\left(\frac{\rho_T{}^\circ N}{\rho^\circ h_T} - \frac{\nu V}{r}\right) + \frac{\rho_d}{\rho}\,f - F + \frac{\rho^\circ\rho_d a}{\rho_d^\circ\rho\,(V_d - V \mp a)^2}\,\times$$

$$\times\left[aV_d' \mp (V_d - V)\,(V_d - V \mp a)\,(\ln\rho_d)' - a\,(f + F_d) - a\,(V_d - V \mp a)\,\frac{\nu V_d}{r}\right] = 0$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства.

7. Другой представляющий интерес класс течений, которые зависят только от двух переменных, составляют плоские и осесимметричные стационарные течения. Пусть x, y — прямоугольные координаты; в осесимметричном случае ось x направлена по оси симметрии слева направо. Проекции сил и скоростей обозначим соответствующими нижними индексами. При этом уравнения (1.1), (1.2) и (3.1) станут

$$\rho\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_x\,\frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\nu\rho V_y}{y} = 0 \tag{7.1}$$

$$\rho_d\,\frac{\partial V_{xd}}{\partial x} + \rho_d\,\frac{\partial V_{yd}}{\partial y} + V_{xd}\,\frac{\partial \rho_d}{\partial x} + V_{yd}\,\frac{\partial \rho_d}{\partial y} + \frac{\nu\rho_d V_{yd}}{y} = 0 \tag{7.2}$$

$$V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho^\circ}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_d}{\rho}\,f_x - F_x = 0 \tag{7.3}$$

$$V_x\,\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho^\circ}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_d}{\rho}\,f_y - F_y = 0 \tag{7.4}$$

$$V_{xd}\,\frac{\partial V_{xd}}{\partial x} + V_{yd}\,\frac{\partial V_{xd}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_d^\circ}\,\frac{\partial p}{\partial x} - f_x - F_{xd} = 0 \tag{7.5}$$

$$V_{xd}\frac{\partial V_{yd}}{\partial x}+V_{yd}\frac{\partial V_{yd}}{\partial y}+\frac{1}{\rho_d^\circ}\frac{\partial p}{\partial y}-f_y-F_{yd}=0 \qquad (7.6)$$

$$V_x\frac{\partial h}{\partial x}+V_y\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{V_x}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{V_y}{\rho^\circ}\frac{\partial p}{\partial y}+N=0 \qquad (7.7)$$

$$V_{xd}\frac{\partial e_d}{\partial x}+V_{yd}\frac{\partial e_d}{\partial y}-q-Q_d=0 \qquad (7.8)$$

где $\nu=0$ и 1 соответственно для плоского и осесимметричного случая.

Найдем характеристики системы (7.1) — (7.8). Вид уравнений (7.7) и (7.8) показывает, что прежде всего характеристиками являются линии тока газа и частиц. Обозначив полные производные по x вдоль характеристик штрихом, получим, что вдоль линий тока газа

$$\begin{gathered}V_xy'-V_y=0, \qquad V_xh'-(V_x/\rho^\circ)\,p'+N=0\\ V_x\,(h+{}^1/_2V^2)'+(\mathbf{f}\mathbf{V}_d+q)\,\rho_d/\rho-Q-\mathbf{F}\mathbf{V}=0\end{gathered} \qquad (7.9)$$

Аналогично вдоль линий тока частиц

$$\begin{gathered}V_{xd}y'-V_{yd}=0, \qquad V_{xd}e_d'-q-Q_d=0\\ V_{xd}\,({}^1/_2V_d^2+p/\rho_d^\circ)'-\mathbf{f}\mathbf{V}_d-\mathbf{F}_d\mathbf{V}_d=0\end{gathered} \qquad (7.10)$$

Последнее равенство — результат сложения (7.5) и (7.6), умноженных на V_{xd} и V_{yd}.

Для дальнейшего, как и в случае нестационарных течений, удобно исключить производные ρ. В результате вместо (7.1) получим

$$(a^2-V_x^2)\frac{\partial V_x}{\partial x}-V_xV_y\frac{\partial V_x}{\partial y}-V_xV_y\frac{\partial V_y}{\partial x}+(a^2-V_y^2)\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{\rho^\circ a^2V_x}{\rho_d^\circ\rho}\frac{\partial\rho_d}{\partial x}-$$

$$-\frac{\rho^\circ a^2V_y}{\rho_d^\circ\rho}\frac{\partial\rho_d}{\partial y}+\frac{\nu a^2V_y}{y}-K=0 \qquad \left(K=\left(\frac{\rho_d}{\rho}\mathbf{f}-\mathbf{F}\right)\mathbf{V}+\frac{\rho_T{}^\circ a^2}{\rho^\circ h_T}N\right) \qquad (7.11)$$

Уравнения (7.2) — (7.6) и (7.11) вместе с выражением для приращения p

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=dp$$

и аналогичными выражениями для dV_x, dV_y, dV_{xd}, dV_{yd} и $d\rho_d$ образуют систему алгебраических уравнений, из которой можно определить все частные производные от p, V_x, V_y, V_{xd}, V_{yd} и ρ_d. Уравнения характеристик вновь получаем из условия неоднозначности решения этой системы.

Значения y' на характеристиках удовлетворяют условию

$$AB\left\{B^2\left[(1+y'^2)\,a^2-A^2\right]+\frac{\rho_d\rho^{\circ2}a^2}{\rho_d^{\circ2}\rho}(1+y'^2)\,A^2\right\}=0$$

$$(A=V_y-y'V_x,\ B=V_{yd}-y'V_{xd})$$

Таким образом, кроме линий тока, характеристиками будут линии, направление которых удовлетворяет уравнению

$$B^2\left[(1+y'^2)\,a^2-A^2\right]+\frac{\rho_d\rho^{\circ2}a^2}{\rho_d^{\circ2}\rho}(1+y'^2)\,A^2=0 \qquad (7.12)$$

Что касается соотношений вдоль характеристик, то соответствующие условия приводят к замыкающим уравнениям из (7.9) и (7.10) и к уравнению

$$
\begin{gathered}
\frac{a^2y' + AV_x}{\rho^\circ} p' + a^2V_yV_x' + (a^2y'^2 - A^2) V_xV_y' + Aa^2\left(\frac{\nu V_y}{y} - \frac{K}{a^2}\right) - \\
- (a^2y' + AV_x)(M + y'L) + \frac{\rho^\circ\rho_d a^2A^2}{\rho_d^\circ\rho B^2}\left[V_{yd}^2\left(\frac{V_{xd}}{V_{yd}}\right)' + \frac{B(V_yV_{xd} - V_xV_{yd})\rho_d'}{A\rho_d} + \right. \\
\left. + f_y + F_{yd} - y'(f_x + F_{xd}) + \frac{\nu V_{yd}B}{y}\right] + \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d a^2A^2}{\rho_d^{\circ 2}\rho B^2}\left[\frac{y'}{\rho^\circ} p' + \right. \\
\left. + (1 + y'^2)(V_xV_y' - L)\right] = 0 \qquad \left(M = F_x - \frac{\rho_d}{\rho} f_x,\ L = F_y - \frac{\rho_d}{\rho} f_y\right)
\end{gathered}
\tag{7.13}
$$

которое выполняется вдоль характеристик, отличных от линий тока.

Для анализа решений уравнения (7.12) воспользуемся разложениями его корней по степеням v_d°. Такое разложение дает (δ — угол между $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_d$)

$$
y_{1,2}' = y_{\infty 1,2}' \pm \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d (V_y - y_{\infty 1,2}' V_x)^4}{2\rho_d^{\circ 2}\rho a \sqrt{V^2 - a^2}\,(V_{yd} - y_{\infty 1,2}' V_{xd})^2} + O(v_d^{\circ 4}) \tag{7.14}
$$

$$
y_{3,4}' = \frac{V_{yd}}{V_{xd}} \pm \frac{\rho^\circ a V V_d \sin\delta}{\rho_d^\circ V_{xd}^2}\left[\frac{\rho}{\rho_d}(V^2\sin^2\delta - a^2)\right]^{-1/2} + O(v_d^{\circ 2}) \tag{7.15}
$$

$$
\left(y_{\infty 1,2}' = \frac{V_xV_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}{V_x^2 - a^2}\right)
$$

Как следует из (7.15), корни $y_{3,4}'$ действительны лишь тогда, когда нормальная к $\mathbf{V}_d$ составляющая скорости газа превосходит скорость звука в газе. Однако, как и при нестационарном течении, этот случай лежит вне области справедливости настоящей теории.

Корни (7.14) действительны при $V > a$ и мнимы при $V < a$. В первом случае они соответствуют характеристикам первого и второго семейств обычной газовой динамики. При $V_x \to a$, когда $y_\infty' \to \infty$, вместо (7.14) следует использовать разложение

$$
x_{1,2}' = x_{\infty 1,2}' \mp \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d (x_{\infty 1,2}' V_y - V_x)^4}{2\rho_d^{\circ 2}\rho a \sqrt{V^2 - a^2}\,(x_{\infty 1,2}' V_{yd} - V_{xd})^2} + O(v_d^{\circ 4}) \tag{7.16}
$$

$$
\left(x_{\infty 1,2}' = \frac{V_x^2 - a^2}{V_xV_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2}}\right)
$$

штрихом обозначены производные по y. В (7.14), (7.16) и ниже верхний (нижний) знак и индекс 1 (2) соответствуют характеристикам первого (второго) семейства.

Граница области гиперболичности, найденная из (7.14) и (7.16), не является точной, так как эти разложения несправедливы при $V = a$. Для определения точной границы воспользуемся тем, что в области справедливости настоящей теории нормальная к $\mathbf{V}$ составляющая $\mathbf{V}_d$, равная $V_d \sin\delta$, мала. Разлагая корни (7.12) по $\Delta = V_d \sin\delta$, найдем

$$
\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \pm \frac{b}{\sqrt{V^2 - b^2}} + \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d a^2V^7V_d \sin\delta}{\rho_d^{\circ 2}\rho b^2 (V^2 - b^2)(\mathbf{V}\mathbf{V}_d)^3} + O(\Delta^2)
$$

$$
\operatorname{ctg}\alpha_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{V^2 - b^2}}{b} - \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d a^2V^7V_d \sin\delta}{\rho_d^{\circ 2}\rho b^4 (\mathbf{V}\mathbf{V}_d)^3} + O(\Delta^2), \qquad b^2 = a^2\left[1 + \frac{\rho^{\circ 2}\rho_d V^4}{\rho_d^{\circ 2}\rho (\mathbf{V}\mathbf{V}_d)^2}\right]
$$

Здесь α — угол между характеристикой и линией тока газа. Итак, при $V \geqslant b$, кроме линий тока, имеются два семейства действительных характеристик. В отличие от случая чистого газа, они расположены не симметрично относительно линий тока, а повернуты в сторону линий тока частиц. С точностью до $o\,(v_d^\circ)$ соотношение (7.13) на характеристиках первого и второго семейств имеет вид

$$\mp\frac{\sqrt{V^2-a^2}}{\rho^\circ a}p'+V_y^2\left(\frac{V_x}{V_y}\right)'+A_{1,2}\left(\frac{\nu V_y}{y}-\frac{K}{a^2}\right)\pm\frac{\sqrt{V^2-a^2}}{a}(M+y_{\infty1,2}'L)+$$
$$+\frac{\rho^\circ\rho_d A_{1,2}^2}{\rho_d^\circ\rho B_{1,2}^2}\left[V_{yd}^2\left(\frac{V_{xd}}{V_{yd}}\right)'+\frac{B_{1,2}(V_yV_{xd}-V_xV_{yd})}{A_{1,2}\rho_d}\rho_d'+f_y+F_{yd}-\right.$$
$$\left.-y_{\infty1,2}'(f_x+F_{xd})+\frac{\nu V_{yd}B_{1,2}}{y}\right]=0\qquad(A_i=V_y-y_{\infty i}'V_x,\quad B_i=V_{yd}-y_{\infty i}'V_{xd})$$

8. Рассмотрение различных классов течений закончим квазиодномерным стационарным течением. При предположениях, обычных для этого случая, из (2.2) — (2.4) (1.1) и (1.2) получим

$$\rho VS=c,\qquad \rho_d V_d S=c_d$$
$$({}^1/_2V_d^2+p/\rho_d^\circ)'-f-F_d=0,\qquad V_d e_d'-q-Q_d=0$$
$$\rho_d V_d V_d'+\rho VV'+p'-\rho F-\rho_d F_d=0$$
$$[\rho VS\,({}^1/_2V^2+h)+\rho_d V_d S\,({}^1/_2V_d^2+e_d+p/\rho_d^\circ)]'-$$
$$-\rho\,(Q+VF)-\rho_d\,(Q_d+V_dF_d)=0$$

где штрихом обозначены производные по расстоянию, отсчитываемому вдоль оси канала; S — площадь поперечного сечения; c и c_d — константы. Эта система обобщает уравнения, используемые обычно для расчета квазиодномерных течений [6-9].

При отсутствии внешних сил и потоков тепла последнее уравнение интегрируется

$$\rho VS\,({}^1/_2V^2+h)+\rho_dV_dS\,({}^1/_2V_d^2+e_d+p/\rho_d^\circ)=\mathrm{const}$$

При $S=\mathrm{const}$ интегрируется и предпоследнее уравнение

$$\rho V^2+\rho_dV_d^2+p=\mathrm{const}$$

В этом случае приведенные уравнения становятся точными.

9. Для выяснения некоторых особенностей двускоростных течений рассмотрим предельный переход от двускоростного течения к односкоростному. Пусть φ^1 в (1.3) растет, тогда ввиду конечности силы $\mathbf{f}$ получим $\mathbf{V}_d\to\mathbf{V}$. При $\varphi^1=\infty$ различие скоростей $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_d$ исчезает, и уравнения течения после исключения $\mathbf{f}$ принимают вид

$$\nabla\rho_\Sigma\mathbf{V}+\frac{\partial\rho_\Sigma}{\partial t}=0,\qquad \mathbf{V}\nabla\frac{\rho}{\rho_\Sigma}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\rho_\Sigma}=0$$
$$\rho_\Sigma(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}+\rho_\Sigma\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla p-\rho_\Sigma\mathbf{F}_\Sigma=0$$
$$\mathbf{V}\nabla h_\Sigma+\frac{\partial h_\Sigma}{\partial t}-\frac{1}{\rho_\Sigma}\left(\mathbf{V}\nabla p+\frac{\partial p}{\partial t}\right)-Q_\Sigma=0,\qquad \mathbf{V}\nabla e_d+\frac{\partial e_d}{\partial t}-q-Q_d=0$$
$$\rho_\Sigma=\rho+\rho_d=\rho^\circ\left(\frac{\rho}{\rho_\Sigma}+\frac{\rho_d}{\rho_\Sigma}\frac{\rho^\circ}{\rho_d^\circ}\right)^{-1},\qquad h_\Sigma=\frac{\rho}{\rho_\Sigma}e+\frac{\rho_d}{\rho_\Sigma}e_d+\frac{p}{\rho_\Sigma}$$
$$\mathbf{F}_\Sigma=\frac{\rho}{\rho_\Sigma}\mathbf{F}+\frac{\rho_d}{\rho_\Sigma}\mathbf{F}_d,\qquad Q_\Sigma=\frac{\rho}{\rho_\Sigma}Q+\frac{\rho_d}{\rho_\Sigma}Q_d$$

Итак, в предельном случае имеем течение односкоростной среды с плотностью ρ_Σ, энтальпией h_Σ, неравновесным параметром e_d и неизменными относительными концентрациями газа и частиц в жидком элементе. Направления характеристик в этом случае [10] определяются замороженной относительно e_d скоростью звука a_Σ, которая вычисляется по (6.10) с заменой ρ° на ρ_Σ и h на h_Σ. Производные $\rho_{\Sigma T}$, $\rho_{\Sigma p}$, $h_{\Sigma T}$ и $h_{\Sigma p}$ находятся для фиксированного жидкого элемента при постоянном e_d.

После некоторых выкладок получим

$$a_\Sigma^2 = a^2\left[1 + \frac{\rho_d}{\rho^\circ} - \frac{\rho_d}{\rho_d^\circ}\left(2 + \frac{\rho_d}{\rho^\circ}\right) + \frac{\rho_d^2}{\rho_d^{\circ 2}}\right]^{-1}$$

При малых $v_d^\circ = 1/\rho_d^\bullet$ имеем $a > a_\Sigma$. Вспоминая, что направления характеристик двускоростного течения с точностью до $o\,(v_d^\bullet)$ определяются скоростью a, легко заметить сходство между двускоростным и предельным односкоростным течениями, с одной стороны, и неравновесным и равновесным течениями—с другой. На такое сходство указывает и само наличие предельного перехода при $\varphi^1 \to \infty$. Вследствие этого при расчетах двускоростных течений возможны те же трудности, что в случае неравновесных течений [11,12].

10. При применении модели двускоростной среды необходимо помнить предположения, положенные в ее основу. Прежде всего, это относится к условию $\rho_d < \pi\ \rho_d/6$, нарушение которого в какой-либо области течения показывает, что здесь использование данной модели не имеет смысла. При $\rho_d \ll \rho$, т. е. при малом количестве частиц условия применимости теории также нарушаются. В этом случае, однако, можно вообще пренебречь влиянием частиц на течение газа, а затем находить их движение по известному полю течения с использованием (1.1), (1.2), где первые два слагаемых заменены полными производными по времени. Такой подход был развит в ряде работ по обтеканию профилей и воздухозаборников [13, 14] средой, содержащей капли воды.

Авторы признательны Г. М. Бам-Зеликовичу и Г. Г. Черному за полезные обсуждения.

Поступила 13 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
3. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. ARS, Report 1713—61, 1961.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II. Физматгиз, 1963, стр. 18—20.
5. Rudinger G. Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small partilces. Phys. Fluids., 1964, vol. 7, No 5.
6. Gilbert M., Davis L., Altman D. Velocity lag of particles in linearly accelerated combustion gases. Jet Propulsion, 1955, vol. 25, No. 1.
7. Soo S. L. Gas dynamic processes involving suspended solids. Amer. Institut. Chem. Engin. J., 1961, vol. 7, No. 3.
8. Кобзарь А. И., Янтовский Е. И., Толмач И. М. Течение двуфазной смеси в канале переменного сечения. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1964, № 4.
9. Duban P., Nicolas J. Influence de la présence de particules solides sur l'écoulement dans une tuyère. Rech. aéronaut., 1963, No. 92.
10. Broer L. J. F. Characteristics of equations of motion of reacting gas. J. Fl. Mech., 1958, vol. 4, part. 3.
11. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесемметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1964.
12. Галюн Н. С., Крайко А. Н. К расчету неравновесных течений. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
13. Serafini J. S. Impingement of water droplets on wedges and double-wedge airfoils at supersonic speeds. NACA, Report 1159, 1954.
14. Brun R. J. Cloud-droplet ingestion in engine inlets with inlet velocity ratios of 1.0 and 0.7. NACA, Report 1317, 1957.