Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ ОДНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ КООРДИНАТЕ

Н. Н. Красовский, Г. С. Шелементьев

(Свердловск)

Рассматривается задача о построении управляющей силы $u(t)$, приводящей систему с двумя степенями свободы при одной циклической координате к заданному установившемуся устойчивому движению. Задача решается для случая малых начальных отклонений системы от заданного движения.

§ 1. Рассмотрим управляемую систему с двумя степенями свободы, описываемую уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + b_i u \qquad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

Здесь q_i — обобщенные координаты, $T(q, q')$ — кинетическая, $\Pi(q)$ — потенциальная энергии, $b_i(q, q')$ — функции, определяющие направление внешней управляющей силы, $u(t)$ — величина управляющего воздействия. Функции T, Π и b_i предполагаются аналитическими. Примем, что в системе (1.1) координата q_2 является циклической ([1], стр. 344).

Выбирая в качестве основных переменных величины q_1, q_1' и $p_2 = \partial T / \partial q_2'$, запишем уравнения (1.1) в виде

$$f[q_1'', q_1', q_1, p_2] = b_1(q_1, q_1', p_2)\, u, \qquad dp_2 / dt = b_2(q_1, q_1', p_2)\, u \tag{1.2}$$

Пусть при $u(t) \equiv 0$ система (1.2) обладает устойчивым в линейном приближении установившимся движением

$$q_1 = q_1^\circ = \text{const}, \qquad q_1' = 0, \qquad p_2 = p_2^\circ = \text{const} \tag{1.3}$$

Задача состоит в выборе управления $u(t)$, приводящего систему (1.2) к заданному движению (1.3). Начальные отклонения $\Delta q_1(0)$, $\Delta q_1'(0)$, $\Delta p_2(0)$ от заданного движения (1.3) предполагаются малыми.

§ 2. Рассмотрим сначала задачу в линейном приближении. Будем предполагать, что характеристическое уравнение первого приближения системы (1.2) в точке (1.3) (при $u \equiv 0$) имеет, помимо нулевого корня, отвечающего интегралу $p_2 = \text{const}$, два чисто мнимых корня $\pm i\varkappa$ (случай, когда это уравнение имеет три нулевых корня, является исключительным, и здесь его рассматривать не будем).

Обозначая $\Delta q_1 = x_1$, $\Delta q_1' / \varkappa = x_2$, $\Delta p_2 = x_3$ и изменяя масштаб измерения времени $\tau = \varkappa t$, приведем уравнения первого приближения системы (1.2) к виду

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + \gamma x_3 + \beta_1 u, \qquad \frac{dx_3}{d\tau} = \beta_2 u \tag{2.1}$$

Для системы (2.1) рассмотрим следующую задачу об управлении.

Задача 2.1. Найти управление $u^\circ(t)$, переводящее систему (2.1) из состояния $x_i(0) = x_{i0}$ в состояние $x_i(\tau^\circ) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ при условии

$$\max_\vartheta (|u(\vartheta)| \text{ при } 0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau^\circ) = \min_u \tag{2.2}$$

Для упрощения вычислений выберем время управления τ° кратным периоду 2π собственных колебаний системы (2.1), т. е. $\tau^\circ = k \cdot 2\pi$, где k — целое число.

Задача 2.1 — это задача об оптимальном управлении. Ее можно решать одним из известных методов теории оптимальных процессов. Цель настоящей статьи — рассмотреть решение, опирающееся на соображения, предложенные для подобных задач в работе [2].

Примем, что система (2.1) вполне управляема [3], так как именно в этом случае можно решать и линейную задачу 2.1 об управлении [2, 3] при любых x_{i0} и исходную нелинейную задачу [4] при всех малых начальных отклонениях Δq_1, $\Delta q_1'$, Δp_2. Для того чтобы система (2.1) была вполне управляемой, необходимо и достаточно [3], чтобы векторы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta_2 \\ -\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

были линейно независимы. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $\beta_2 \neq 0$ и $\{\gamma \neq 0$ или $\beta_1 \neq 0\}$, что и будем предполагать.

§ 3. Для решения задачи 2.1, согласно процедуре, описанной в статье [2], следует составить фундаментальную матрицу $F(t)$ однородной системы (2.1) и найти

$$\alpha = \max\left(\sum_{i=1}^{3} l_i c_i\right) \tag{3.1}$$

при

$$\int_0^{\tau^\circ} \left|\sum_{i=1}^{3} l_i h_i(\vartheta)\right| d\vartheta = 1 \qquad \begin{pmatrix} h(\vartheta) = F(\tau^\circ - \vartheta)s, & s = \{0, \beta_1, \beta_2\} \\ c = -F(\tau^\circ)x^\circ, & x^\circ = \{x_{10}, x_{20}, x_{30}\} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Пусть α° и l_i°—решения задачи (3.1), (3.2). Тогда оптимальное управление $u^\circ(t)$, решающее задачу 2.1, определяется равенством

$$u^\circ(t) = \alpha^\circ \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{3} l_i^\circ h_i(t)\right) \tag{3.3}$$

В данном случае матрица $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \gamma(1 - \cos t) \\ -\sin t & \cos t & \gamma \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Поэтому неособой линейной заменой

$$\lambda_1 = -\beta_1 l_1 - \beta_2 \gamma l_2, \quad \lambda_2 = -\beta_2 \gamma l_1 + \beta_1 l_2, \quad \lambda_3 = \beta_2 \gamma l_1 + \beta_2 l_3$$

задача (3.1), (3.2) трансформируется в задачу

$$\alpha = \max\left(\sum_{i=1}^{3} c_i^* \lambda_i\right) \tag{3.5}$$

при

$$\int_0^{\tau^\circ} |\lambda_1 \sin\vartheta + \lambda_2 \cos\vartheta + \lambda_3|\, d\vartheta = 1 \tag{3.6}$$

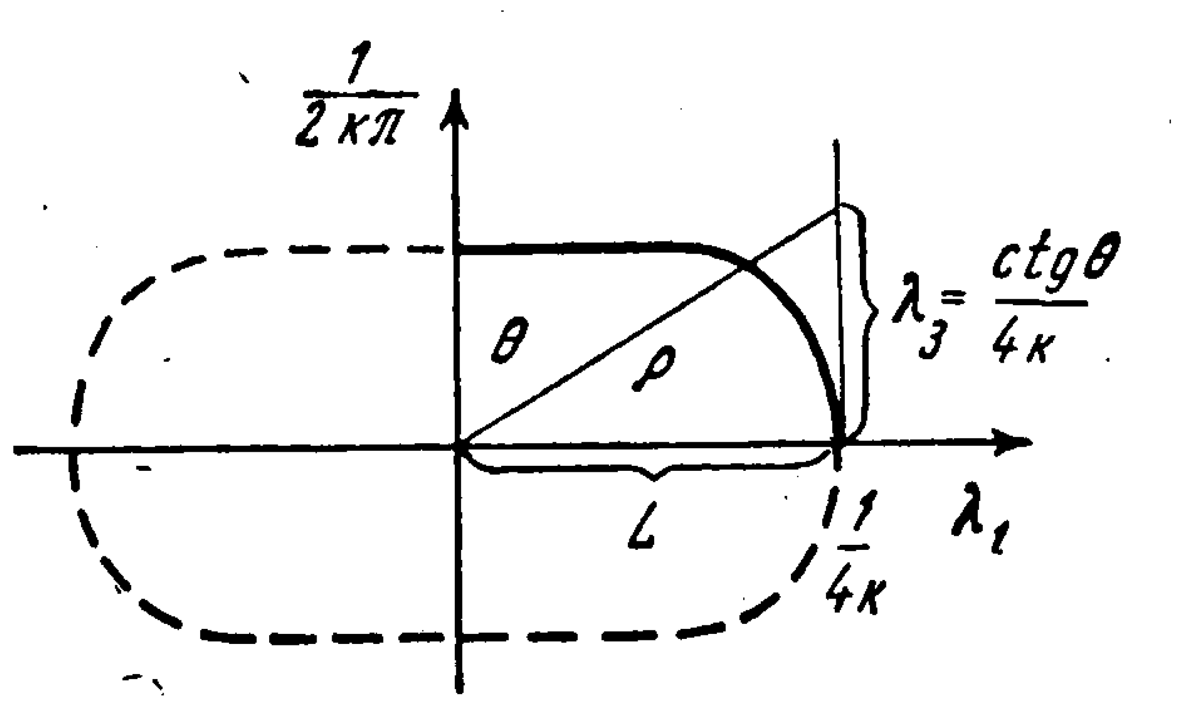
где

$$c_1^* = -\frac{\beta_1}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_1 - \frac{\beta_2\gamma}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_2 + \frac{\beta_1\gamma}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_3$$

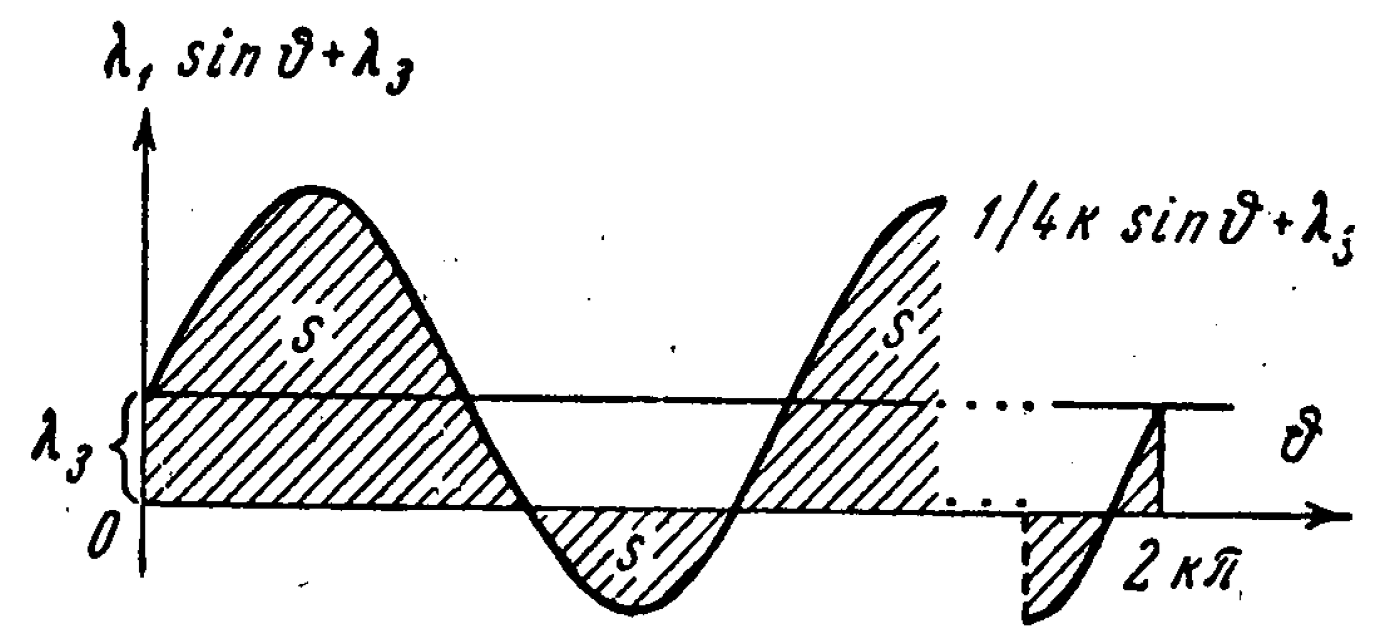
$$c_2^* = -\frac{\beta_2\gamma}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_2 + \frac{\beta_2\gamma^2}{\beta_1^2+\beta_2^2\gamma^2}c_3$$

$$c_3^* = \frac{1}{\beta_2}c_3$$

Преобразование $\{l_i\} \leftrightarrow \{\lambda_i\}$ является неособым вследствие полной управляемости системы (2.1). Действительно, иначе можно было бы указать ненулевые l_i, при которых подынтегральное выражение в (3.2) было бы тождественным нулем. В случае полной управляемости это невозможно [2,3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, для определения оптимального управления $u^\circ(t)$ (3.3) следует решить задачу (3.5) и (3.6). Задача (3.5), (3.6) решается известными методами дифференциального исчисления. Для этой цели надо написать уравнение поверхности (3.6) в пространстве $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ в явной форме. Уравнение (3.6) соответствует поверхности вращения вокруг оси λ_3. Она симметрична относительно плоскости $\lambda_3 = 0$. Поэтому достаточно найти сечение этой поверхности плоскостью $\lambda_2 = 0$ в первом квадранте (фиг. 1).

Из геометрических соображений следует, что на рассматриваемой кривой (фиг. 1, 2)

$$\rho = \frac{L}{S(\lambda_3)\sin\theta}, \quad S(\lambda_3) = \int_0^{2k\pi}\left|\frac{1}{4k}\sin\vartheta + \lambda_3\right| d\vartheta \quad \text{при } \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2k\pi} \quad \text{при } 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{1}{2k\pi}$$

Поэтому в сферических координатах ρ, θ, φ поверхность (3.6) описывается уравнениями

$$\rho = \frac{1}{2k\pi\cos\theta} \quad \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \tag{3.7}$$

$$\rho = \frac{1}{4k\left(\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\theta} + \arcsin \operatorname{ctg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta\right)\sin\theta} \quad \text{при } \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{3.8}$$

После построения кривой (3.7), (3.8) задача (3.5), (3.6) легко решается графически. Уравнение

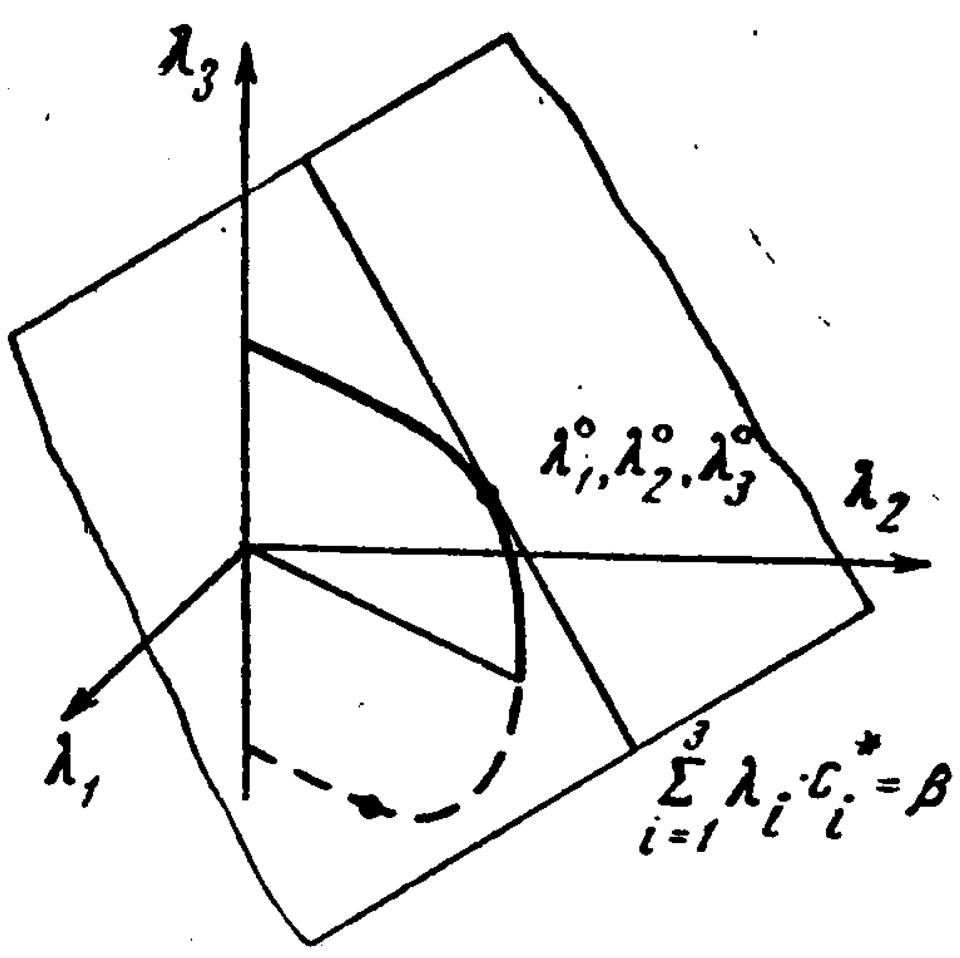
$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i c_i^* = \beta \qquad (-\infty < \beta < +\infty) \tag{3.9}$$

описывает семейство параллельных плоскостей в пространстве $\{\lambda_i\}$. Поэтому числа λ_i°, решающие задачу (3.5), (3.6), определяются как координаты точки $\{\lambda_i^\circ\}$, где плоскость (3.9) при $\beta = \alpha^0 > 0$ касается поверхности (3.6). Эту точку удобно находить, рассматривая кривую (3.7), (3.8) в плоскости (фиг. 3), перпендикулярной к линиям пересечения плоскостей (3.9) и $\lambda_3 = 0$.

Исключение составляет лишь случай, когда $c_1^* = c_2^* = 0$. В этом случае имеем $(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 \leqslant (\lambda_3^0)^2$, и оптимальное управление $u^\circ(t)$ (3.3) сохраняет постоянный знак при всех ϑ из $[0, \tau^0]$. Этот случай в дальнейшем рассматривать не будем. Примем, что начальные отклонения x_{i0} удовлетворяют условию $(c_1^*)^2 + (c_2^*)^2 > 0$. Тогда описанные выше геометрические соображения определяют единственным образом значения λ_i^0, которые лежат в области

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > \lambda_3^2 \tag{3.10}$$

Оптимальное управление (3.3) является при этом релейной знакопеременной силой. В окрестности любой точки $\{\lambda_i\}$ из области (3.10) обе главные кривизны поверхности (3.6) положительны. Это проверяется, например, исходя из уравнений (3.7), (3.8). Отсюда следует, что малые изменения Δx_{i0} величин x_{i0}, или иначе — малые изменения Δc_i^* коэффициентов c_i^* плоскостей (3.9), вызывают малые изменения $\Delta\lambda_i^\circ$ величин λ_i°. При этом для каждой пары чисел $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать число N такое, что



Фиг. 3

$$|\Delta\lambda_i^0| \leqslant N \|\Delta c^*\| \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.11}$$

если только рассматриваемые значения c_i^* лежат в области

$$(c_1^*)^2 + (c_2^*)^2 \geqslant \delta, \qquad \|c^*\| \leqslant \varepsilon \tag{3.12}$$

(символ $\|q\|$ означает евклидову норму вектора q). Опираясь на эти факты, приходим к следующему выводу.

Теорема 3.1. Оптимальное управление $u^\circ(t)$, решающее задачу 2.1, имеет вид

$$u^\circ(t) = \alpha^\circ(x^\circ) \operatorname{sign}(\lambda_1^\circ \sin t + \lambda_2^\circ \cos t + \lambda_3^\circ) \tag{3.13}$$

Здесь $\alpha^\circ(x^\circ)$ и $\{\lambda_i^\circ\}$ — решения задачи (3.5), (3.6), причем поверхность (3.6) определяется уравнениями (3.7), (3.8). Справедлива оценка

$$\alpha^\circ(x^\circ) \leqslant N_1 \|c^*\| \tag{3.14}$$

Малые изменения Δx_{i0} величин x_{i0} вызывают малые в среднем изменения $\Delta u^\circ(t)$ оптимального управления. При условиях (3.11), (3.12) справедливы оценки

$$|\Delta\alpha^\circ| \leqslant N_2 \|\Delta c^*\|, \qquad |\Delta u^\circ(t)| \leqslant N_3 \|\Delta c^*\| \tag{3.15}$$

при всех t за исключением множества Q значений t, мера которого $\mu(Q)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(Q) \leqslant N_4 \|\Delta c^*\| \qquad (N_i\ (i = 1, \ldots, 4) \text{ — постоянные}) \tag{3.16}$$

Примечание 3.1. Исключение случая $c_1^* = 0$, $c_2^* = 0$ не вызвано существом задачи. Однако рассмотрение этого случая требует дополнительного исследования характера гладкости поверхности (3.7), (3.8) в точке $\theta = {}^1/_4\pi$, что выходит за рамки настоящей статьи.

§ 4. Рассмотрим теперь вопрос об управлении в нелинейной системе (1.2). Принимая управление $u^\circ(t)$ (3.3), найденное в линейном приближении для задачи 2.1, за исходное, можно построить итеративный процесс для определения некоторого управления $u^\circ(t)$, решающего нелинейную задачу. При этом на каждом шаге будут учитываться нелинейные члены все более высоких порядков.

Опишем первый шаг итеративного процесса, следующий за решением задачи 2.1. Обозначим управление $u^\circ(t)$ в (3.3), решающее задачу 2.1 при некоторых начальных условиях $x^\circ = \{x_{10}, x_{20}, x_{30}\}$, символом $u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)$. Если в уравнениях (1.2) учесть члены второго порядка малости по Δq_1, $\Delta q_1'$, Δp_2 и u, то в переменных $x_i(t)$ получим систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \gamma x_3 + \beta_1 u + f_1^{(2)}(x, u), \quad \frac{dx_3}{dt} = \beta_2 u + f_2^{(2)}(x, u) \qquad (4.1)$$

Здесь функции $f_1^{(2)}(x, u)$ и $f_2^{(2)}(x, u)$ — формы второго порядка от своих аргументов. Подставим в уравнения (4.1) значение управления $u = u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)$. Это управление (3.13) удовлетворяет оценке (3.14), а следовательно, и оценке

$$|u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)| \leqslant N_5 \| x^\circ \| \quad (N_5 = \text{const}) \qquad (4.2)$$

В линейном приближении (2.1) управление $u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)$ приводит систему (4.1) в состояние равновесия $x(\tau^\circ) = 0$, причем вследствие оценки (4.2) движение $x(t, x^\circ)_{(2.1)}$ системы (2.1) удовлетворяет неравенству

$$\| x(t, x^\circ)_{(2.1)} \| \leqslant N_6 \| x^\circ \| \quad (N_6 = \text{const}) \qquad (4.3)$$

Отсюда по известным свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений [5] заключаем, что при $u = u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)$ движение $x(t, x^\circ)_{(4.1)}$ системы (4.1) приводится к состоянию

$$x(\tau^\circ, x^\circ)_{(4.1)} = y^{(1)}, \qquad \| y^{(1)} \| \leqslant N_7 \| x^\circ \|^2 \qquad (4.4)$$

С точностью до членов третьего порядка малости по x° вектор

$$y^{(1)} = \int_0^{\tau^\circ} F(\tau^\circ - \vartheta) f^{(2)}(\vartheta)\, d\vartheta \qquad (4.5)$$

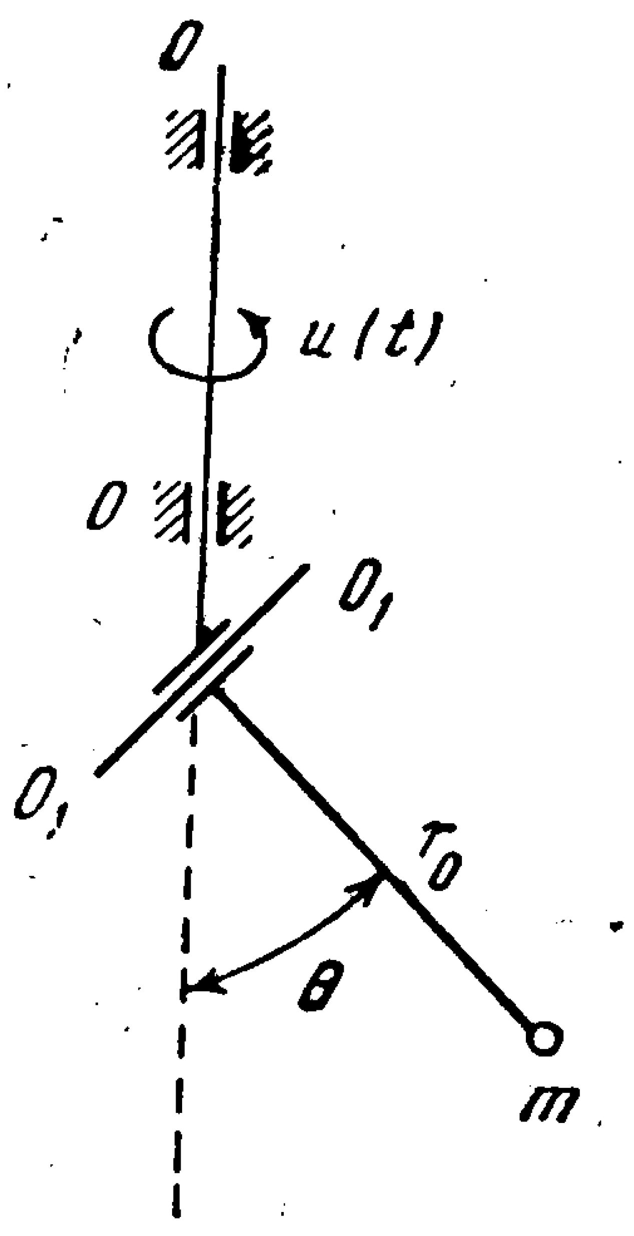
$$f^{(2)}(\vartheta) = \{0, f_1^{(2)}(x(\vartheta, x^\circ)_{(2.1)}, u_{(1)}{}^\circ(\vartheta, x^\circ)), f_2^{(2)}(x(\vartheta, x^\circ)_{(2.1)}, u_{(1)}{}^\circ(\vartheta, x^\circ))\}$$

Здесь функция $F(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.1). Чтобы учесть и скорректировать величину рассогласования $x(\tau^\circ, x^\circ)_{(4.1)} = y^{(1)}$ (4.4), (4.5), рассмотрим снова задачу управления 2.1 в линейном приближении, но уже не в точку $x(\tau^\circ) = 0$, а в точку $x(\tau^\circ) = -y^{(1)}$. Эта задача снова сводится к проблеме (3.1), (3.2), где вектор c определен теперь равенством $c = -F(\tau^\circ)x^\circ - y^{(1)}$. Изменение Δc вектора c вызывает соответствующее изменение Δc^* того же порядка вектора c^* в задаче (3.5), (3.6). Пусть $u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ)$ — управление, которое получается в соответствии с равенством (3.3) для измененной описанным способом задачи (3.5), (3.6). Из теоремы 3.1 следует, что изменение $\Delta u^\circ = u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ) - u_{(1)}{}^\circ(t, x^\circ)$ управления $u^\circ(t)$ будет иметь в среднем второй порядок малости по x°.

Именно будет справедлива оценка

$$|\Delta u^\circ(t)| \leqslant N_8 \| y^{(1)} \| = N_7 N_8 \| x^\circ \|^2 \tag{4.6}$$

при всех значениях t, за исключением множества $Q^{(1)}(x^\circ)$ значений t, мера которого $\mu(Q^{(1)})$ удовлетворяет неравенству



Фиг. 4

$$\mu(Q^{(1)}(x^\circ)) \leqslant N_9 \| y^{(1)} \| = N_7 N_9 \| x^\circ \|^2 \tag{4.7}$$

причем

$$|u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ)| \leqslant N_{10} \|x^\circ\| \qquad (N_7, \ldots, N_{10} = \mathrm{const}) \tag{4.8}$$

Управление $u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ)$ можно выбрать в качестве второго приближения для решения исходной нелинейной задачи об управлении. По выбору этого управления и из оценок (4.6) — (4.8) следует, что управление $u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ)$ приводит систему (4.1), а также и систему (1.2), к состоянию $x(\tau^\circ, x^\circ) = y^{(2)}$, где вектор $y^{(2)}$ имеет третий порядок малости по $\| x^\circ \|$. По вектору $y^{(2)}$ можно построить новое приближение $u_{(3)}{}^\circ(t, x^\circ)$, подобно тому как приближение $u_{(2)}{}^\circ(t, x^\circ)$ строилось по вектору $y^{(1)}$ (4.5), и т. д. Оценки, указанные в теореме 3.1, на каждом шаге обеспечивают повышение порядка вектора $y^{(k)}$ и дают тем самым оценку сходимости процесса итерации.

§ 5. Рассмотрим пример. Пусть дан математический маятник (фиг. 4), горизонтальная ось подвеса которого $\{O_1, O_1\}$ вращается вокруг вертикальной оси $\{O, O\}$. Это вращение управляется моментом $u(t)$. Задача состоит в приведении системы к установившемуся движению $\omega = \omega_0$, $\theta = \theta_0$, где ω_0 — заданная угловая скорость вращения вокруг оси $\{O, O\}$. Начальная угловая скорость $\omega(0)$ и начальные величины $\theta(0)$ и $\theta'(0)$ предполагаются близкими к заданным значениям ω_0, θ_0 и $\theta_0' = 0$.

В сферических координатах $\rho = r_0 = \mathrm{const}$, θ и φ имеем

$$T = {}^1\!/_2 m r_0^2 ([\theta']^2 + \sin^2\theta\, [\varphi']^2) \tag{5.1}$$

$$\Pi = -m r_0 g \cos\theta \tag{5.2}$$

Координата φ — циклическая, и уравнения (1.2) имеют вид

$$\theta'' - \frac{p^2\cos\theta}{m^2 r_0^4 \sin^3\theta} + g\frac{\sin\theta}{r_0} = 0, \qquad p' = u \qquad (p = m r_0^2 \sin^2\theta\, \varphi') \tag{5.3}$$

В заданном установившемся движении

$$p = m r_0^2 \omega_0 \sin^2\theta_0, \qquad \cos\theta_0 = g / \omega_0^2 r_0, \qquad (g < \omega_0^2 r_0) \tag{5.4}$$

Составим уравнения возмущенного движения для системы (5.3) в окрестности движения (5.4). Получим

$$\Delta\theta'' + \Delta\theta\omega_0^2 (1 + 3\cos^2\theta_0) - \frac{2\omega_0}{m r_0^2}\operatorname{ctg}\theta_0 + \nu(\Delta\theta, \Delta p) = 0, \qquad \Delta p' = u \tag{5.5}$$

Здесь разложение величины $\nu(\Delta\theta, \Delta p)$ по степеням $\Delta\theta$ и Δp начинается с членов второго порядка:

$$\nu(\Delta\theta, \Delta p) = -{}^3\!/_2\,\omega_0^2 (3 + \cos^2\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0 \Delta\theta^2 +$$

$$+ \frac{2\omega_0(1 + \cos^2\theta_0)}{m r_0^2 \sin^2\theta_0}\Delta\theta\Delta p - \frac{\cos\theta_0}{m^2 r_0^4 \sin^3\theta_0}\Delta p^2 + \ldots$$

Полагая $x_1 = \Delta\theta$, $x_2 = \Delta\theta' / \omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_0}$, $x_3 = \Delta p$ и изменяя масштаб времени $\omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_0} t = \tau$, приведем линейную часть системы (5.5) к виду (2.1)

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + \gamma x_3, \qquad \frac{dx_3}{d\tau} = \beta u \tag{5.6}$$

$$(\gamma = 2\cos\theta_0 / m r_0^2 \omega_0 (1 + 3\cos^2\theta_0)\sin\theta_0, \qquad \beta = 1 / \omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_0})$$

Величины β и γ отличны от нуля. Следовательно, система (5.6) вполне управляема и задача имеет решение. Время τ°, за которое требуется осуществить управление, примем равным одному периоду собственных колебаний системы (5.6), т. е. $\tau^\circ = 2\pi$. (В исходном масштабе времени t время управления $t^\circ = 2\pi / \omega_0 \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_0}$).)

Найдем значение управляющего момента $u(t)$ для случая

$$g = 10 \text{ м/сек}, \quad m = 1 \text{ кг}, \quad r_0 = 0.4 \text{ м}, \quad \omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}, \quad \theta_0 = 1.318 \text{ рад}, \quad \theta_0' = 0,$$
$$\omega(0) = 8 \text{ сек}^{-1}, \quad \theta(0) = 1.518 \text{ рад}, \quad \theta'(0) = 0$$

Тогда в системе (5.6) имеем $\gamma = 0.272$, $\beta = 0.093$, фундаментальная матрица однородной системы имеет вид (3.4), начальные условия $x_{10} = 0.200$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = -0.224$, вектор $c = \{-x_{10}, -x_{20}, -x_{30}\} = \{-0.200, 0, 0.224\}$, плоскость (3.9) определяется вектором $c^* = \{-c_2 / \beta\gamma, (\gamma c_3 - c_1) / \beta\gamma, c_3 / \beta\} = \{0, 10.455, 2.436\}$. После того как найдены графически значения λ_i°, управляющее воздействие (3.13), решающее линейную задачу (5.6), имеет вид

$$u_{(1)}^\circ(t, x^\circ) = 2.672 \operatorname{sign}(0.244\cos t + 0.054) \tag{5.7}$$

Управление (5.7) есть релейная функция, меняющая знак при $t_1 = 1.795$ *сек*, $t_2 = 4.488$ *сек*. Управление $u_{(1)}^\circ(t, x^\circ)$ (5.7) приводит систему (5.6) за время $\tau^\circ = 2\pi$ в точку $x(2\pi) = 0$ по траектории, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned}
x_1(t, x_0^\circ) &= -0.061 + 0.261\cos t + \int_0^t 0.025 u_{(1)}^\circ(\vartheta, x^\circ)(1 - \cos(t - \vartheta))\, d\vartheta \\
x_2(t, x^\circ) &= -0.261\sin t + \int_0^t 0.025 u_{(1)}^\circ(\vartheta, x^\circ)\sin(t - \vartheta)\, d\vartheta \\
x_3(t, x^\circ) &= -0.224 + \int_0^t 0.093 u_{(1)}^\circ(\vartheta, x^\circ)\, d\vartheta
\end{aligned} \tag{5.8}$$

С учетом членов второго порядка

$$f^{(2)}(x, u) = \{0, a x_1^2 + b x_1 x_3 + c x_3^2, 0\} \quad (a = 0.999, \ b = -1.263, \ c = 0.091)$$

система (5.5) приводится к состоянию $y^{(1)} = \{-0.058, 0.026, 0\}$, определяемому формулой (4.5). Решая задачу о приведении системы (5.6) в точку $-y^{(1)}$, находим

$$c_{(1)} = \{-0.142, -0.026, 0.224\}, \qquad c_{(1)}^* = \{1.027, 8.140, 2.436\}$$

Управляющее воздействие $u_{(2)}^\circ(t, x^\circ)$ равно

$$u_{(2)}^\circ(t, x^\circ) = 2.136 \operatorname{sign}(0.030\sin t + 0.234\cos t + 0.082) \tag{5.9}$$

Управление (5.9) приводит систему с учетом членов второго порядка в точку $\{-0.007, 0.006, 0\}$ по траектории, вычисляемой по (5.8), где вместо $u_{(1)}^\circ(\vartheta, x^\circ)$ нужно подставить $u_{(2)}^\circ(\vartheta, x^\circ)$ согласно (5.9).

Поступила 3 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
3. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I Конгресса ИФАК, т. 2, Изд-во АН СССР, 1961.
4. Красовский Н. Н. К проблеме существования оптимальных траекторий. Изв. высш. учебн. завед., 1959, № 6 (13).
5. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1961.