ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ В. Л. ДОБРОВОЛЬСКОГО «О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ»

Б. Д. Аннин (Новосибирск)

В статье В. Л. Добровольского [1] выведены необходимые и достаточные условия, при которых функция напряжений $F(x, y)$ в пластической области D плоскости (x, y) будет бигармонической. Условия эти следующие. Пусть функция $\theta = \theta(x, y)$ $(x, y) \in D$ определяется через $F(x, y)$ из уравнения

$$\operatorname{tg}\theta(x, y) = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \qquad \left(\sigma_x = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)$$

Здесь σ_x, σ_y, τ — компоненты тензора напряжений, k — предел текучести при чистом сдвиге. Функция $\theta(x, y)$ удовлетворяет в D системе уравнений

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

Частным решением этой системы будет функция

$$\theta^*(x, y) = -2\operatorname{arc\,tg}\frac{y - y_0}{x - x_0} + \theta_0 \qquad (x_0, y_0, \theta_0 = \text{const})$$

Бигармоничность пластической функции напряжений, которой отвечает $\theta^*(x, y)$ при $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$, существенно использована в работе Л. А. Галина [2].

Докажем, что решений системы уравнений (1), отличных от $\theta^*(x, y)$, не существует. Очевидно, $\theta(x, y)$ — аналитическая функция относительно x, y. Дифференцируя (1) по x и y, определим все третьи производные от функции $\theta(x, y)$. Затем из условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3\theta}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3\theta}{\partial x\,\partial y^2}$$

найдем

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

Из условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3\theta}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^3}\right)$$

также следует уравнение (2). Из уравнений (1) образуем уравнение

$$\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right] - 4\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{[\partial^2\theta]}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{3}$$

Применяя к уравнениям (2) и (3) преобразование Лежандра, т. е. вводя новые переменные ξ, η и новую функцию $\Phi(\xi, \eta)$ по формулам $\xi = \partial\theta / \partial x$, $\eta = \partial\theta / \partial y$, $\Phi = x\xi + y\eta - \theta$ и переходя в плоскости (ξ, η) к полярным координатам, найдем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + r\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$$

Отсюда следует

$$\theta = c\operatorname{arc\,tg}\frac{y - b}{x - a} + d \qquad (a, b, c, d = \text{const})$$

Подставляя (4) в первое уравнение (1), найдем $c = -2$. Таким образом, решений системы уравнений (1), отличных от $\theta^*(x, y)$, не существует.

Поступила 16 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский В. Л. О применении комплексных переменных к плоской пластической деформации. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. Пластические области у круговых отверстий в пластинках и балках. ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, стр. 367—386.