ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

М. И. Гусейн-Заде (Москва)

Рассматривается плоская задача теории упругости для полуполосы со свободными от напряжений продольными кромками при различных условиях на ее краю. Выясняется, при каких условиях, налагаемых на краевые функции, существует затухающее решение задачи. Необходимость в этих условиях возникла при построении уточненной теории изгиба пластинок [1], согласно которой получение одного из краевых напряженных состояний пластинки сводится к решению задачи о плоской деформации.

Вопрос об условиях существования затухающих решений для полуполосы затронут В. К. Прокоповым [2]. Однако им применен недостаточно обоснованный метод аналогий, который хотя и позволил получить правильные результаты в случае, когда на краю заданы продольное смещение и касательное напряжение, но привел к неверным результатам в случае, когда на краю заданы нормальное напряжение и поперечное смещение.

1. Направим ось x вдоль средней линии полуполосы, а ось y — вдоль ее края. Предположим, что кромки $y = \pm 1$ полуполосы и ее бесконечно удаленный край свободны от напряжений. Рассмотрим три задачи, соответствующие следующим условиям на краю $x = 0$:

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad \tau_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 1)} \tag{1.1}$$

$$2\mu u(0, y) = f_1(y), \qquad \tau_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 2)} \tag{1.2}$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad 2\mu v(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 3)} \tag{1.3}$$

Здесь μ — модуль сдвига.

Граничные условия при $y = \pm 1$ для всех трех задач имеют вид

$$\sigma_y(x, \pm 1) = 0, \qquad \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \tag{1.4}$$

Рассмотрим отдельно случаи кососимметричной и симметричной деформаций полуполосы. В первом случае $f_1(y)$ — нечетные функции y, а $f_2(y)$ — четные; во втором случае — наоборот: $f_1(y)$ — четные, а $f_2(y)$ — нечетные.

Так как полуполоса находится в равновесии, то при любых краевых условиях система напряжений на краю $x = 0$ удовлетворяет условиям

при кососимметричной деформации

$$\int_0^1 \sigma_x(0, y)\, y\, dy = 0, \qquad \int_0^1 \tau_{xy}(0, y)\, dy = 0 \tag{1.5}$$

при симметричной деформации

$$\int_0^1 \sigma_x(0, y)\, dy = 0 \tag{1.6}$$

Следовательно, напряжения на краю $x = 0$ статически эквивалентны нулю независимо от того, известно ли их распределение по краю или нет. Согласно принципу Сен-Венана, напряжения в полуполосе для всех трех задач являются затухающими в направлении оси x. Остается выяснить, каким условиям должны удовлетворять граничные функции, чтобы и смещения имели затухающий характер.

2. Для решения рассматриваемых плоских задач возьмем бигармоническую функцию Эри в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-u_k x} F_k(y) \tag{2.1}$$

Здесь $F_k(y)$ — функции Папковича [3], удовлетворяющие дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$F_k^{\mathrm{IV}}(y) + 2u_k^2 F_k''(y) + u_k^4 F_k(y) = 0 \tag{2.2}$$

и граничным условиям

$$F_k(\pm 1) = 0, \quad F_k'(\pm 1) = 0 \tag{2.3}$$

При рассмотрении кососимметричной деформации в (2.1) следует взять нечетные функции $F_k(y)$, которые имеют вид

$$F_k(y) = u_k \cos u_k \sin u_k y - u_k y \cos u_k y \sin u_k \tag{2.4}$$

где u_k — корни уравнения

$$\sin 2u - 2u = 0 \tag{2.5}$$

В случае симметричной деформации функции $F_k(y)$ — четные; они имеют вид

$$F_k(y) = u_k \sin u_k \cos u_k y - u_k y \sin u_k y \cos u_k \tag{2.6}$$

где u_k — корни уравнения

$$\sin 2u + 2u = 0 \tag{2.7}$$

Считаем, что суммирование в (2.1) ведется по корням уравнения (2.5) (или (2.7)), вещественная часть которых положительна. Функции $F_k(y)$ удовлетворяют установленному Папковичем [3] условию обобщенной ортогональности

$$\int_0^1 [F_k''(y) F_s''(y) - u_k^2 u_s^2 F_k(y) F_s(y)]\, dy = 0 \qquad (k \neq s) \tag{2.8}$$

Напряжения, соответствующие функции напряжений (2.1), имеют вид

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-u_k x} F_k''(y), \qquad \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k^2 e^{-u_k x} F_k(y)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k e^{-u_k x} F_k'(y) \tag{2.9}$$

Используя метод Лява [4], получим выражения для смещений

$$2\mu u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-u_k x} \left[-(1-\sigma) \frac{1}{u_k} F_k''(y) + \sigma u_k F_k(y) \right] + u_0 \tag{2.10}$$

$$2\mu v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-u_k x} \left[-(1-\sigma) \frac{1}{u_k^2} F_k'''(\mu) - (2-\sigma) F_k'(y) \right] + v_0$$

где σ — коэффициент Пуассона. Величины u_0 и v_0 — линейные функции координата и представляют смещения полуполосы как абсолютно твердого тела. При рассмотрении кососимметричной деформации следует принять

$$u_0 = -ay, \qquad v_0 = ax + b \tag{2.11}$$

а при симметричной деформации

$$u_0 = c, \qquad v_0 = 0 \tag{2.12}$$

Выше указывалось, что суммирование рядов в (2.9) и (2.10) ведется по корням уравнений (2.5) и (2.7), вещественная часть которых положительна. Следовательно, напряжения (2.9) имеют затухающий характер. Если в выражениях (2.10) отсутствуют члены u_0 и v_0, то смещения также имеют затухающий характер.

3. Рассмотрим первую задачу, отвечающую краевым условиям (1.1). Для полного решения этой задачи необходимо найти значения a_k. Однако решить вопрос о существовании затухающих решений можно и без определения величин a_k.

На смещения в этой задаче не наложено никаких условий; они определяются с точностью до смещений полуполосы как абсолютно твердого тела. Полагая, что полуполоса не испытывает таких смещений, т. е. полагая $u_0 = v_0 = 0$, получим, что смещения полуполосы имеют затухающий характер в направлении оси x.

Таким образом, условия

$$\int_0^1 f_1(y)\, y\, dy = 0, \qquad \int_0^1 f_2(y)\, dy = 0 \tag{3.1}$$

при кососимметричной деформации и условие

$$\int_0^1 f_1(y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

при симметричной деформации необходимы и достаточны для существования затухающих решений первой задачи.

4. Рассмотрим вторую задачу, отвечающую краевым условиям (1.2). Остановимся сначала на случае кососимметричной деформации. Из (1.5) получим одно условие, налагаемое на граничную функцию $f_2(y)$

$$\int_0^1 f_2(y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

Из условий (1.2), принимая во внимание (2.9) и (2.10), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[-(1-\sigma)\frac{1}{u_k}F_k''(y) + \sigma u_k F_k(y)\right] - ay = f_1(y)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k F_k'(y) = f_2(y) \tag{4.2}$$

Вводя обозначения

$$\psi_1(y) = \frac{\sigma}{1-\sigma}\psi_2(y) - \frac{1}{1-\sigma}f_1(y), \qquad \psi_2(y) = \int_0^y f_2(y)\,dy \tag{4.3}$$

приведем уравнения (4.2) к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{u_k}F_k''(y) + \frac{1}{1-\sigma}ay = \psi_1(y), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k F_k(y) = \psi_2(y) \tag{4.4}$$

Соотношение обобщенной ортогональности (2.8) позволяет из (4.4) определить значения коэффициентов a_k. Воспользовавшись им, получим

$$a_k = \frac{1}{2u_k^3 \sin^4 u_k}\int_0^1 \left[F_k''(y)\psi_1(y) - u_k^2 F_k(y)\psi_2(y)\right] dy \tag{4.5}$$

Из (4.4) можно определить и постоянную a. Для этой цели умножим первое соотношение на y и проинтегрируем по y от 0 до 1. Принимая во внимание, что

$$\int_0^1 F_k''(y)\,y\,dy = 0$$

имеем

$$\frac{1}{3(1-\sigma)}a = \int_0^1 \psi_1(y)\,y\,dy$$

Подставляя значение $\psi_1(y)$ и выполняя интегрирование по частям, получим

$$a = -3\left[\int_0^1 f_1(y)\,y\,dy + \frac{\sigma}{2}\int_0^1 f_2(y)\,y^2\,dy\right] \tag{4.6}$$

Выше отмечалось, что если в (2.10) величины u_0 и v_0 обращаются в нуль, то смещения полуполосы имеют затухающий характер. На смещение $v(x, y)$ в рассматриваемой задаче никаких условий не наложено. Следовательно, нужно положить $v_0 = 0$.

Для величины a получено значение (4.6). Если выполняется условие

$$\int_0^1 f_1(y)\,y\,dy + \frac{\sigma}{2}\int_0^1 f_2(y)\,y^2\,dy = 0 \tag{4.7}$$

то a обращается в нуль. Тогда из (2.11) следует, что $u_0 = 0$.

Таким образом, если выполняется (4.7), то перемещения в рассматриваемой задаче, представленные рядами по функциям Папковича, имеют затухающий характер.

Условия (4.7) можно установить другим способом. Предположим, что краевым функциям $f_1(y)$ и $f_2(y)$ отвечает затухающее решение задачи. Тогда с самого начала следует положить, что в (2.10) слагаемые u_0, v_0, а в (4.2) величина a равны нулю. Выясним, каким условиям должны удовлетворять независимые одна от другой функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$, чтобы при $0 \leqslant y < 1$ одновременно имели место разложения (4.2) (при $a = 0$).

Возможность подобных разложений двух функций [1] для одного частного случая исследована Г. А. Гринбергом [5]. Проведем аналогичное исследование для рассматриваемой задачи.

Величины u_k в (4.2) являются корнями уравнения (2.5) с положительной действительной частью. Уравнение (2.5) в плоскости комплексного переменного u имеет бесконечное множество четверок комплексных корней первого порядка u_k, $\bar{u}_k$, $-\bar{u}_k$, $-u_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и корень $u = 0$ третьего порядка.

Принимая во внимание, что суммы рядов, входящих в (4.2), по корням с положительной действительной частью равны суммам рядов по корням с отрицательной действительной частью, распространим суммирование в (4.2) на все ненулевые корни уравнения (2.5), вводя перед суммами множитель $^1/_2$. Кроме того, второе соотношение в (4.2) заменим соотношением, получаемым интегрированием по y в пределах от 0 до y.

В результате из (4.2) получим соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4n} a_k \left[-(1-\sigma) \frac{1}{u_k} F_k''(y) + \sigma u_k^2 F_k(y) \right] = f_1(y) \qquad (4.8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4n} a_k u_k F_k(y) = \psi_2(y$$

Здесь различным корням уравнения (2.5) приписан различный номер.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять граничные функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$, чтобы одновременно имели место разложения (4.8). Обозначим левые части в (4.8) через $A(y)$ и $B(y)$ соответственно. Подставляя значения a_k из (4.5) и заменяя $\psi_1(y)$ его выражением из (4.3), представим $A(y)$ и $B(y)$ в виде

$$A(y) = T_{f_1}^{(1)}(y) - T_{f_1}^{(2)}(y) - \frac{1}{1-\sigma} T_{f_1}^{(3)}(y) - \frac{1}{1-\sigma} T_{f_1}^{(4)}(y) -$$

$$- \sigma T_{\psi_2}^{(1)}(y) + T_{\psi_2}^{(2)}(y) + \frac{\sigma}{1-\sigma} T_{\psi_2}^{(3)}(y) - \frac{1}{1-\sigma} T_{\psi_2}^{(4)}(y) \qquad (4.9)$$

$$B(y) = \frac{1}{1-\sigma}\left(- T_{f_1}^{(3)}(y) + T_{f_1}^{(4)}(y) + \sigma T_{\psi_2}^{(3)}(y) - T_{\psi_2}^{(4)}(y)\right)$$

---

[1] Отметим, что в работе [5] при выводе условий, обеспечивающих возможность разложений (1.7), допущена неточность: при вычислении интеграла (2.16) не принят во внимание вычет подынтегральной функции относительно полюса первого порядка в точке $z = 0$. Устраняя эту неточность, получим взамен (2.21)

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 2\,[f_1(y) - f_1(1) + (1-y)\, f_1'(0) + {}^1/_4 (1-y^2)(f_1'(1) - f_1'(0))]$$

и вместо (2.24)

$$V_1(y) = f_1(y) - f_1(1) + (1-y)\, f_1'(0) + {}^1/_4 (1-y^2)(f_1'(1) - f_1'(0))$$

Для того чтобы сумма ряда $V_1(y)$ равнялась $f_1(y)$, достаточно выполнение условий $f_1(1) = 0$, $f_1'(0) = 0$, $f_1'(1) = 0$.

В работе [5] были указаны только первые два условия, второе из которых само собой выполняется для четной непрерывной функции, заданной на интервале $(-1\ \ +1)$ и имеющей непрерывную производную.

где

$$T_\omega^{(1)}(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{4u_k^4\sin^4 u_k}\int_0^1\omega(x)\,F_k^*(x)\,F_k^*(y)dx$$

$$T_\omega^{(2)}(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{4u_k^4\sin^4 u_k}\int_0^1\omega(x)\,u_k^2F_k(x)\,F_k^*(y)\,dx \tag{4.10}$$

$$T_\omega^{(3)}(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{4u_k^4\sin^4 u_k}\int_0^1\omega(x)\,u_k^2\,F_k^*(x)\,F_k(y)\,dx$$

$$T_\omega^{(4)}(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{4u_k^4\sin^4 u_k}\int_0^1\omega(x)\,u_k^4\,F_k(x)\,F_k(y)\,dx$$

Здесь $\omega(x)$ — любая нечетная функция

$$F_k^*(x)=F_k''(x)+u_k^2F_k(x)=2u_k^2\sin u_k\sin u_k y \tag{4.11}$$

Остановимся на вычислении $T_\omega^{(1)}(y)$. Преобразуем $T_\omega^{(1)}(y)$, выполняя перестановку порядков суммирования и интегрирования, к виду

$$T_\omega^{(1)}(y)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\omega(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^*(x)\,F_k^*(y)}{4u_k^4\sin^4 u_k}\,dx \tag{4.12}$$

Сумму, стоящую под знаком интеграла, обозначим через $C_n(x,y)$. Введем функцию $\varphi(z)=\sin 2z-2z$. Очевидно, что $\varphi'(z)=-4\sin^2 z$. Подставляя значения $F_k^*(x)$ и $F_k^*(y)$ из (4.11), представим $C_n(x,y)$ в виде

$$C_n(x,y)=-\sum_{k=1}^{4n}\frac{4\sin u_k y\sin u_k x}{\varphi'(u_k)} \tag{4.13}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_n(x,y)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n}\frac{4\sin zy\sin zx}{\varphi(z)}\,dz \tag{4.14}$$

взятый по окружности радиуса R_n с центром в начале координат плоскости z. Радиус R_n выбираем таким образом, чтобы внутрь окружности попали $4n$ комплексных корней уравнения $\varphi(z)=0$, причем условимся, что R_n отличается на конечную величину от $|u_{4n}|$ и от $|u_{4n+1}|$. При вычислении остальных величин $T_\omega^{(i)}(y)$ $(i=2,3,4)$ относительно R_n следует еще предположить, что R_n отличается на конечную величину от значений $z_s=s\pi$ $(s=1,2,\ldots)$, являющихся корнями уравнения $\sin z=0$.

Интеграл (4.14) равен сумме вычетов подынтегральной функции относительно особых точек. Особые точки подынтегральной функции совпадают с корнями функции $\varphi(z)$. Внутри окружности R_n функция $\varphi(z)$ имеет $4n$ корней $z=u_k$ первого порядка и корень $z=0$ третьего порядка. Следовательно, $J_n(x,y)$ равен сумме вычетов подынтегральной функции относительно полюсов $z=u_k$ $(k=1,2,\ldots,4n)$ первого порядка и вычета относительно полюса $z=0$ третьего порядка. Но сумма вычетов относительно полюсов $z=u_k$ $(k=1,2,\ldots,4n)$ равна $C_n(x,y)$, а вычет относительно $z=0$ равен $3xy$. Таким образом, имеем

$$J_n(x,y)=C_n(x,y)+3xy \tag{4.15}$$

Перейдем к пределу при $R_n\to\infty$. Если $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y<1$, то из леммы Жордана следует, что интеграл $J_n(x,y)$ при $R_n\to\infty$ равномерно по x стремится к нулю.

Из (4.15) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}C_n(x,y)=-3xy$$

причем стремление $C_n(x,y)$ к пределу при $n\to\infty$ — равномерное по x при неизменном y. Тогда для всякой абсолютно интегрируемой в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$ функции

$\omega(x)$ из (4.12) имеем

$$T_\omega^{(1)}(y) = -3y\int_0^1 \omega(x)\, x\, dx \tag{4.16}$$

На определении величин $T_\omega^{(i)}(y)$ $(i = 2, 3, 4)$ подробно останавливаться не будем. Оно проводится в основном по аналогии с вычислением $T_\omega^{(1)}(y)$. Следует только до перестановки порядков суммирования и интегрирования выполнить интегрирование по частям (один раз при вычислении $T_\omega^{(2)}(y)$, $T_\omega^{(3)}(y)$ и два раза при вычислении $T_\omega^{(4)}(y)$, и учесть вычеты подынтегральных функций относительно полюсов $z_s = s\pi$ $(s = 1, 2, \ldots)$, являющихся корнями уравнения $\sin z = 0$. Приведем окончательные результаты

$$T_\omega^{(2)}(y) = T_\omega^{(3)}(y) = T_\omega^{(4)}(y) = -\omega(x) \tag{4.17}$$

Из (4.9) (4.16), и (4.17) следует, что

$$A(y) = -3y\left[\int_0^1 f_1(x)\, x\, dx + {}^1/_2\sigma\int_0^1 f_2(x)\, x^2\, dx\right] + f_1(y)$$

$$B(y) = \psi_2(y)]$$

Но $A(y)$ и $B(y)$ равны левым частям в (4.8). Отсюда видно, что если краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ удовлетворяют ранее установленным условиям (4.7), то ряды, стоящие слева в (4.8), дают представления функций $f_1(y)$ и $\psi_2(y)$ при $0 \leqslant y < 1$. Таким образом, если при кососимметричной деформации краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ второй задачи (1.2) подчиняются условиям (4.1) и (4.7), то задача имеет затухающее решение. Условие (4.1) следует из условий равновесия, а (4.7) будет условием разрешимости рассматриваемой задачи в рядах по функциям Папковича в классе затухающих функций.

Заметим, что для установления условий существования затухающих решений во всех остальных случаях применимы оба способа, используемые выше. Условимся, однако, в дальнейшем пользоваться более простым первым способом, который основан на определении из краевых условий незатухающих слагаемых, входящих в выражения для смещений, и в приравнивании их нулю.

Перейдем к рассмотрению симметричной деформации полуполосы, отвечающей условиям (1.2).

Условие равновесия (1.6) не налагает никаких условий на краевые функции. Из граничных условий (1.2), учитывая (2.9), (2.10) и (2.12), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left[-(1-\sigma)\frac{1}{u_k}F_k''(y) + \sigma u_k F_k(y)\right] + c = f_1(y)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k F_k'(y) = f_2(y) \tag{4.18}$$

Здесь $F_k(y)$ — четные функции Папковича (2.6). Использование свойств функций Папковича позволяет из системы (4.18) определить и коэффициенты $a_k (k = 1, 2,\ldots)$ и величину c. Однако для наших целей достаточно определить величину c.

Интегрируя по y в пределах от 0 до 1 первое и предварительно умноженное на y второе соотношение (4.18), нетрудно получить

$$c = \int_0^1 f_1(y)\, dy + \sigma\int_0^1 f_2(y)\, y dy \tag{4.19}$$

Из (4.19) и (2.12) следует, что если выполняется условие

$$\int_0^1 f_1(y)\, dy + \sigma\int_0^1 f_2(y)\, y dy = 0 \tag{4.20}$$

то величины c и, следовательно, u_0 обращаются в нуль.

Таким образом, если при симметричной деформации краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ второй задачи удовлетворяют условию (4.20), то смещения имеют затухающий характер.

5. Рассмотрим третью задачу, отвечающую краевым условиям (1.3). В случае кососимметричной деформации полуполосы условия равновесия (1.5) дают одно условие, налагаемое на граничную функцию $f_1(y)$. Оно имеет вид

$$\int_0^1 f_1(y)\, y\, dy = 0 \tag{5.1}$$

Из граничных условий (1.3) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k''(y) = f_1(y)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[-(2-\sigma) F_k'(y) - (1-\sigma) \frac{1}{u_k^2} F_k'''(y) \right] + b = f_2(y) \tag{5.2}$$

Из (5.2) определим величину b. Для этой цели проинтегрируем по y в пределах от 0 до 1 второе соотношение, первое соотношение, умноженное на y^3, и второе соотношение, умноженное на y^2. Из полученных соотношений нетрудно получить, что

$$b = \frac{1}{2} \left[(2-\sigma) \int_0^1 f_1(y)\, y^3\, dy + 3 \int_0^1 f_2(y) (1-y^2)\, dy \right]$$

Если выполняется условие

$$(2-\sigma) \int_0^1 f_1(y)\, y^3\, dy + 3 \int_0^1 f_2(y) (1-y^2)\, dy = 0 \tag{5.3}$$

то $b = 0$. На смещение $u(0, y)$ в рассматриваемой задаче не налагается никаких условий. Поэтому следует принять, что $u_0 = 0$, т. е. $a = 0$. Тогда, как это вытекает из (2.11), и $v_0 = 0$.

Таким образом, если при кососимметричной деформации полуполосы краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ третьей задачи (1.3) удовлетворяют условиям (5.1) и (5.3), то задача имеет затухающее решение.

Перейдем к рассмотрению симметричной деформации полуполосы при краевых условиях (1.3).

Из условия равновесия (1.6) получим условие, налагаемое на функцию $f_1(y)$.

$$\int_0^1 f_1(y)\, dy = 0 \tag{5.4}$$

На смещение $u(0, y)$ в рассматриваемом случае не наложено никаких условий. Поэтому следует положить, что величина u_0 в (2.10) равна нулю.

Таким образом, если при симметричной деформации полуполосы на краевую функцию $f_1(y)$ третьей задачи (1.3) наложено условие (5.4), то задача имеет затухающее решение.

Поступила 11 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. П р о к о п о в В. К. О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича для прямоугольной пластинки. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. П а п к о в и ч П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II. Судпромгиз, 1941.
4. Л е й б е н з о н Л. С. Краткий курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
5. Г р и н б е р г Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.