

ОБ УСТОЙЧИВОЙ ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ ГАЛЕЧНОГО БЕРЕГА, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ ПРИБОЯ

С. С. Григорян (Москва)

Под действием прибоа берег, состоящий из гальки или песка, принимает форму цилиндрической поверхности, которая при неизменной силе прибоа остается фиксированной. С изменением силы прибоа эта поверхность перемещается.

В предлагаемой заметке даются приближенный количественный анализ этого явления и сравнение результатов с данными наблюдений. Неизменность положения частиц берега в устойчивом состоянии, очевидно, обеспечивается условием равновесия силы тяжести mg , силы гидродинамического сопротивления P_h и силы взаимодействия с соседними частицами берега P_f (фиг. 1), т. е.

$$P_h - P_f + mg \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

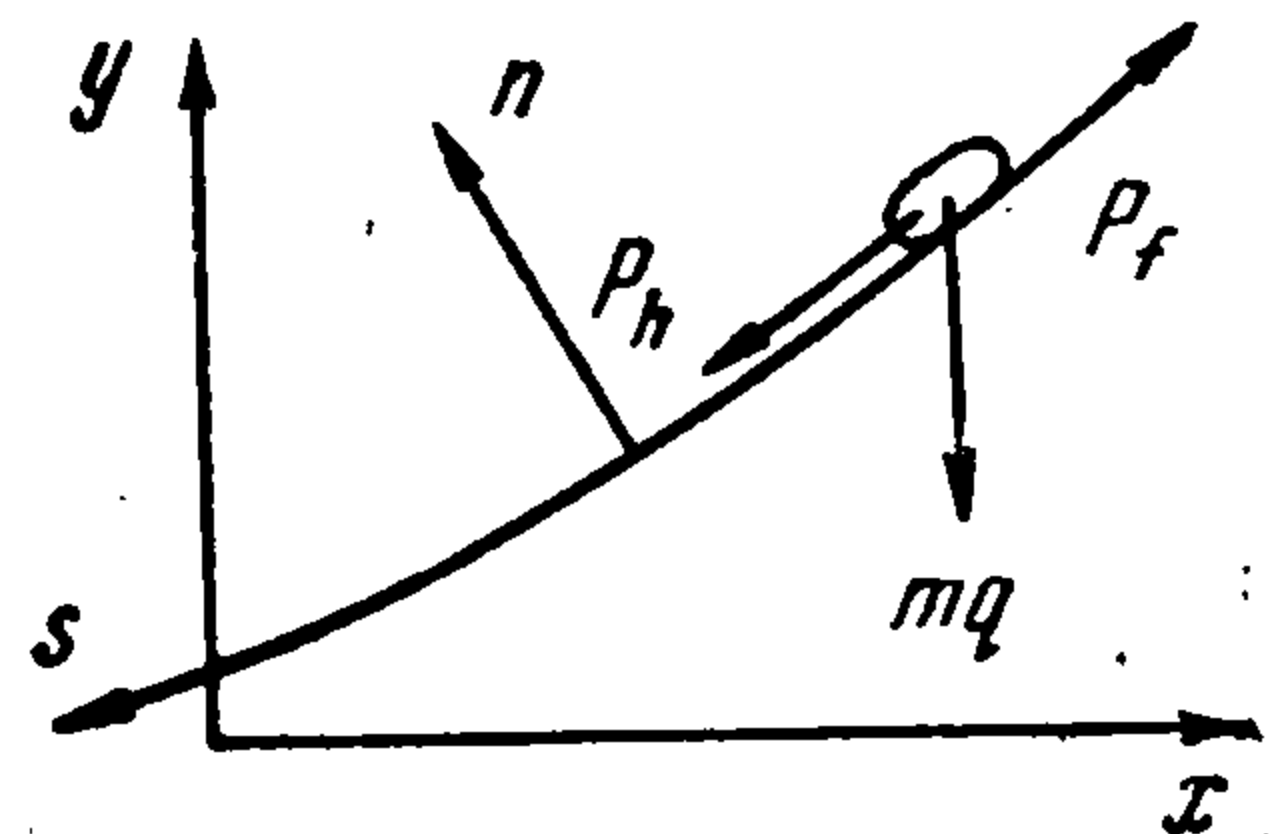
Можно считать, что

$$P_f = mgf \cos \alpha, \quad P_h = \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2 SC_x$$

Здесь f — коэффициент трения, v_{\max} — максимальная скорость потока воды, обтекающего частицу в фазе отката прибоа.

Уравнение кривой $y = y(x)$, описывающей устойчивую форму берега, неизвестно, поэтому α — неизвестная величина. Неизвестна также величина v_{\max} . Для определения последней нужно решить гидродинамическую задачу о движении водяной пленки прибоа по наклонному откосу берега. Поскольку эта пленка обычно оказывается тонкой, ее движение можно достаточно просто описать приближенными гидравлическими соотношениями. Если ввести координату s вдоль линии $y = y(x)$ и n по нормали (фиг. 1), то приближенные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} &= - \frac{g}{2n} \frac{\partial}{\partial s} (n^2 \cos \alpha) + g \sin \alpha - F_f \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (vn)}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 1

Здесь v — скорость вдоль s , n — толщина пленки, F_f — сила сопротивления движению жидкости со стороны шероховатого дна, рассчитанная на единицу массы жидкости. Если обозначить через b и ds соответственно ширину элемента жидкости и длину вдоль s , то, предположив, что частица гальки — сплюснутый эллипсоид с большой осью a и малой c , можем заключить, что на площади bds , занятой элементарной частицей жидкости, будет расположено $\sim bds/a^2$ частиц гальки. Следовательно, сила воздействия со стороны дна площадью bds на частицу жидкости массы $dm = \rho n bds$ будет равна $\rho v^2 SC_x bds / 2a^2$, а действующая на единицу массы сила

$$F_f = \frac{v^2 SC_x}{2a^2 n} \quad (3)$$

Здесь S — площадь галечной частицы, участвующая в формировании силы гидродинамического сопротивления, а C_x — коэффициент этого сопротивления.

Для оценки различных членов уравнений (2) и упрощения последних введем безразмерные переменные V, σ, h, τ по формулам

$$v = \sqrt{gl} V, \quad s = l\sigma, \quad n = \varepsilon lh, \quad t = \sqrt{l/g} \tau \quad (4)$$

Здесь l — характерная длина вдоль s , а $\varepsilon \ll 1$. При этом из очевидных физических соображений следует, что $V \sim \sigma \sim h \sim \tau \sim 1$. Уравнения (2) перейдут в

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial \sigma} = - \frac{\varepsilon}{2h} \frac{\partial (h^2 \cos \alpha)}{\partial \sigma} + \sin \alpha - \frac{C_x \pi c \zeta}{\varepsilon \delta a h} V^2, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial (Vh)}{\partial \sigma} = 0 \quad (5)$$

где для площади S подставлено выражение $S = \frac{1}{4} \pi a c \zeta$, $\zeta < 1$. Коэффициент ζ учитывает то обстоятельство, что частица гальки неполностью выступает над соседними

и эффективная площадь миделева сечения в формуле для гидродинамического сопротивления должна быть взята меньшей, чем площадь настоящего миделева сечения

Из соотношений (5) видно, что первым членом в правой части первого уравнения можно пренебречь, а последний имеет порядок $0.005/\varepsilon$ при естественных оценках $C_x \sim 0.1$, $\zeta_c/a \sim 0.1$ (сплюснутая галька), т. е. условием применимости этих соотношений является $\varepsilon \geq 0.005$. Итак, имеем упрощенные уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = g \sin \alpha - \frac{C_x \pi \zeta_c}{8an} v^2, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (vn)}{\partial s} = 0 \quad (6)$$

Перейдя к лагранжевым координатам s_0 , t ($s = s(s_0, t)$, $t = t$), получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g \sin \alpha - \frac{k}{n} v^2, \quad n \frac{\partial s}{\partial s_0} = f(s_0), \quad k = \frac{\pi C_x \zeta_c}{8a} \quad (7)$$

где $f(s_0)$ — произвольная функция, определяемая из начальных данных.

К уравнениям (7) нужно добавить начальные условия

$$v(s_0, 0) = v_0(s_0), \quad n(s_0, 0) = n_0(s_0), \quad s(s_0, 0) = s_0$$

Наблюдения показывают, что в момент начала отката прибое скорости всех частиц воды почти одновременно обращаются в нуль, т. е. можно принять условие $v_0(s_0) = 0$. Решение возникающей задачи затруднительно, ибо, кроме ее нелинейности, $\alpha(s_0)$ неизвестна, и должна определяться из соотношения (1), в котором, в свою очередь, v_{\max} неизвестно и определяется из решения гидродинамической задачи.

Однако для наших целей нет нужды решать всю гидродинамическую задачу, достаточно определить v_{\max} для каждой точки кривой, по которой стекает пленка прибое. Эту последнюю задачу можно приближенно решить следующим образом.

Перейдем в уравнениях (1), (7) к безразмерным переменным

$$v = \sqrt{ga}V, \quad t = \sqrt{a/g}\tau, \quad s = a\sigma, \quad s_0 = a\sigma_0, \quad n = av \quad (8)$$

и учтем формулу

$$m = 1/8 \pi a^2 c (\rho_1 - \rho) \quad (9)$$

где ρ_1 — плотность материала гальки. Будем иметь

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = V, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = \sin \alpha - \frac{p}{v} V^2 \quad (10)$$

$$\sin \alpha - f \cos \alpha + qV_{\max}^2 = 0 \quad (11)$$

$$p = \frac{\pi \zeta C_x c}{8a}, \quad q = \frac{3 \zeta C_x \rho}{4(\rho_1 - \rho)} \quad (12)$$

Если перейти в уравнениях (10) от переменных σ_0 , τ к σ_0 , σ , то получающееся для V^2 уравнение (линейное, обыкновенное) можно формально проинтегрировать с учетом начального условия $V_0 = 0$

$$V^2 = 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin \alpha(\xi) \exp \left[- \int_{\xi}^{\sigma} \frac{2pd\lambda}{v(\sigma_0, \lambda)} \right] d\xi \quad (13)$$

Этот интеграл — формальный, ибо $v(\sigma_0, \lambda)$ неизвестна. Однако формула (13) позволяет сделать оценки нужные для определения V_{\max} . Дифференцируем (13) по σ_0

$$\frac{\partial V^2}{\partial \sigma_0} = -2 \sin \alpha(\sigma_0) + 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin \alpha(\xi) \exp \left[- \int_{\xi}^{\sigma} \frac{2pd\lambda}{v(\sigma_0, \lambda)} \right] \left[\int_{\xi}^{\sigma} \frac{2p}{v^2(\sigma_0, \lambda)} \frac{\partial v(\sigma_0, \lambda)}{\partial \sigma_0} d\lambda \right] d\xi \quad (14)$$

Из (14) имеем $\partial V^2 / \partial \sigma_0 < 0$ при $\sigma \sim \sigma_0$. При $\tau \rightarrow \infty$, т. е. $\sigma \rightarrow \infty$, имеем из (10), (11), (13)

$$V \rightarrow V_{\infty} = \text{const}, \quad v \rightarrow v_{\infty} = \text{const}, \quad \alpha \rightarrow \alpha_{\infty} = \text{const}, \quad v_{\infty} \sin \alpha_{\infty} - pV_{\infty}^2 = 0$$

т. е. с течением времени v перестает зависеть от σ_0 , и второе слагаемое в правой части (14) обращается в нуль. Это позволяет заключить с большой степенью уверенности, что

неравенства $\partial V^2 / \partial \sigma_0 > 0$ не возникает вовсе, т. е. что для каждого значения σ максимальная скорость достигается в частице $\sigma_0 = 0$.

Таким образом, для любого места на кривой имеем $V_{\max} = V|_{\sigma_0} = 0$. Поэтому задача окончательно сводится к решению следующей системы уравнений с начальными условиями (значок \max у V опускаем):

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = V, \quad \frac{dV}{d\tau} = \sin \alpha (\sigma) - \mu V^2, \quad \sin \alpha - f \cos \alpha - qV^2 = 0, \quad \sigma(0) = 0, \quad V(0) = 0 \quad (15)$$

В этих соотношениях $\mu = p/v$ полагаем постоянной величиной, ибо v меняется мало, и можно пользоваться некоторым средним значением v_* . Это среднее значение можно, например, определять опытным путем из соотношения

$$\left(\frac{q}{\mu} + 1\right) \sin \alpha_\infty = f \cos \alpha_\infty \quad (16)$$

получающегося из (15) при $\tau \rightarrow \infty$, $dV/d\tau \rightarrow 0$. Если из опыта известна величина α_∞ , то по формуле (16) определяются отношение q/μ и v_*

$$\frac{q}{\mu} = \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha_\infty} - 1; \quad v_* = \frac{\pi c (\rho_1 - \rho)}{6a\rho} \left(\frac{f}{\operatorname{tg} \alpha_\infty} - 1\right) \quad (17)$$

Исключив из (15) величину V , получим задачу только для α

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{2\mu}{\sqrt{q}} \sqrt{f \cos \alpha - \sin \alpha} \frac{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha}{f \sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \alpha(0) \equiv \alpha_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f \quad (18)$$

Таким образом, для $\alpha(\tau)$ имеем задачу Коши, решаемую в квадратурах

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(f \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha}{[(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha] \sqrt{f \cos \alpha - \sin \alpha}} = -\frac{2\mu}{\sqrt{q}} \tau \quad (19)$$

Пользуясь соотношениями $d\sigma \cos \alpha = d\xi$ ($\xi = x/a$), $d\sigma = V d\tau$ и формулами (15), получим

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\cos \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha)}{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha} \quad \text{или} \quad \xi = -\frac{1}{2\mu} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\cos \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha}{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha} \quad (20)$$

Кроме того, $d\eta = -\operatorname{tg} \alpha d\xi$, значит,

$$\eta = \frac{1}{2\mu} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha}{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha} \quad (21)$$

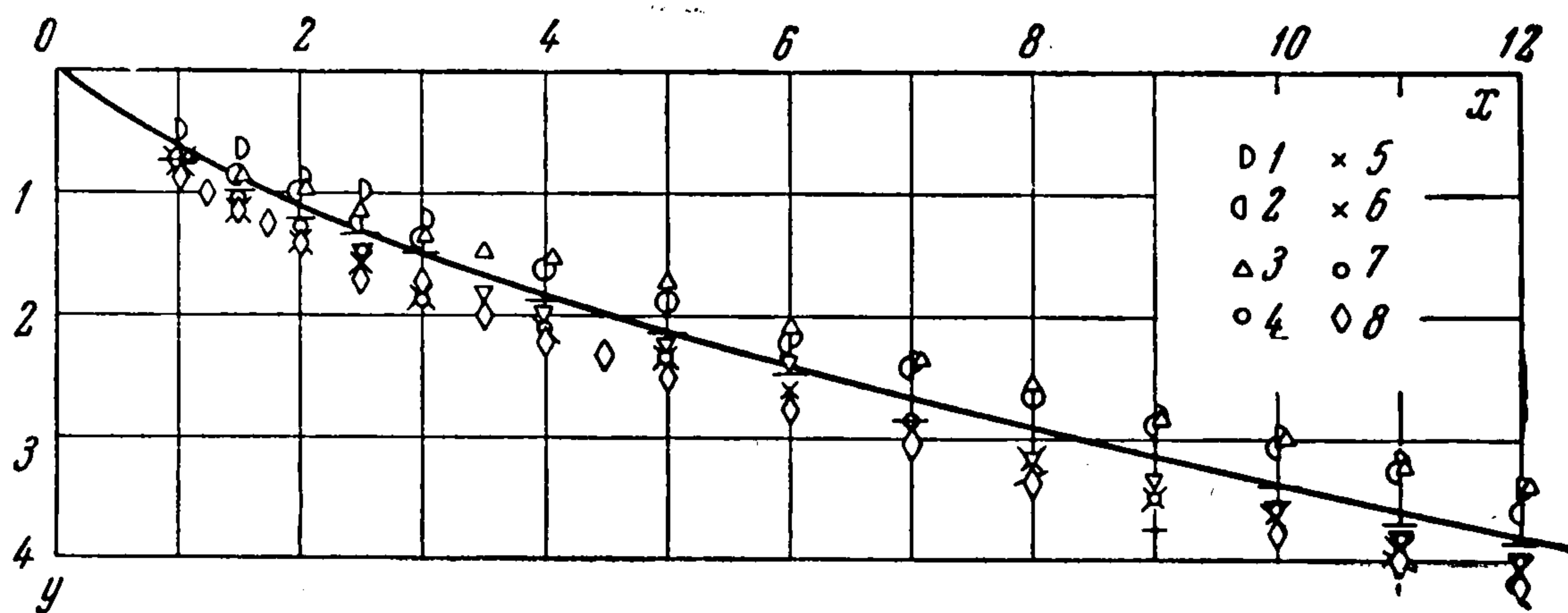
Введем переменные $2\mu\xi = X$, $2\mu\eta = Y$. Тогда

$$\begin{aligned} X &= \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha}{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha_\infty}{\sin \alpha_0} \left\{ \cos \alpha_\infty - \cos (\alpha + \alpha_\infty - \alpha_0) + \cos \alpha_\infty \cos (\alpha_0 - \alpha_\infty) \ln \frac{\operatorname{tg} [1/2 (\alpha_0 - \alpha_\infty)]}{\operatorname{tg} [1/2 (\alpha - \alpha_\infty)]} \right\} \\ &\quad - Y = \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{\sin \alpha (f \sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha}{(1 + q/\mu) \sin \alpha - f \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha_\infty}{\sin \alpha_0} \left\{ \sin \alpha_\infty - \sin (\alpha + \alpha_\infty - \alpha_0) + \sin \alpha_\infty \cos (\alpha_0 - \alpha_\infty) \ln \frac{\operatorname{tg} [1/2 (\alpha_0 - \alpha_\infty)]}{\operatorname{tg} [1/2 (\alpha - \alpha_\infty)]} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Исключив параметр α , получим уравнение кривой $Y = -\Phi(X; f, f_\infty)$, которое зависит лишь от двух параметров f и $f_\infty = \operatorname{tg} \alpha_\infty$. Чтобы перейти к размерным переменным x и y , нужно умножить X и Y на размерный множитель L

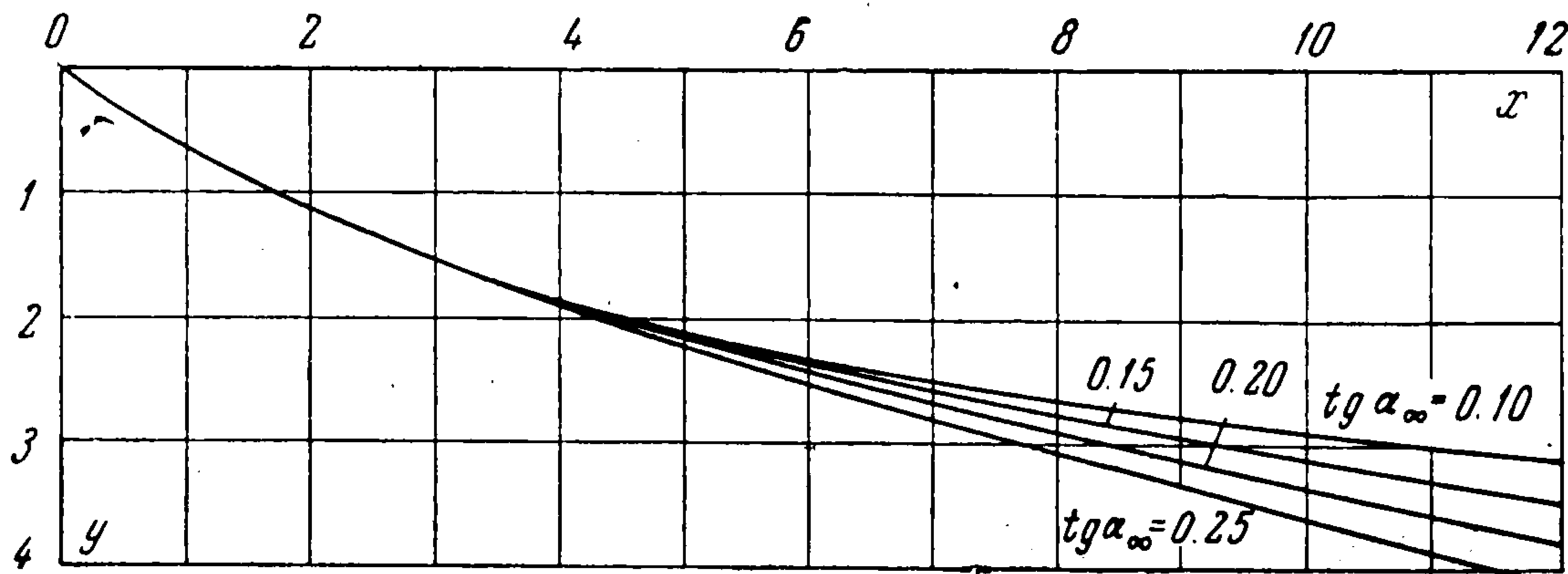
$$L = \frac{a}{2\mu} = \frac{4a^2 v_*}{\pi \xi C_x c} = \frac{2(\rho_1 - \rho)}{3\xi C_x \rho} \left(\frac{f}{f_\infty} - 1\right) a \quad (23)$$

Подставив значения $\zeta \sim 0.3$, $C_x \sim 0.3$, $\rho_1 / \rho \sim 3$, $f / f_\infty \sim 3$, будем иметь $L \sim 30 a$; если размер гальки $a \sim 3$ см, то $L \sim 1$ м, что находится в соответствии с результатами наблюдений. Если же имеем песок, для которого можно принять $C_x \sim 0.6$, $\zeta \sim 0.3$, $\rho_1 / \rho \sim 3$, $f / f_\infty \sim 7$, $a \sim 0.1$ см, то будем иметь $L \sim 4.5$ см. Таким образом, у песчаного берега линия $y = y(x)$ практически будет прямой.



Фиг. 2

Летом 1962 г. автор провел некоторые измерения формы кривой $y = y(x)$ на галечном берегу в поселке Рыбачье (Крым). Измерения производились при помощи простейших приспособлений при разной интенсивности прибоя в тихую и штормовую погоду. Результаты приводятся на фиг. 2. Значки на фиг. 2 соответствуют следующим



Фиг. 3

условиям проведения измерений: треугольники с обращенными вниз остриями, ромбы, кружки, горизонтальные и наклоненные влево или вправо черточки — измерения в тихую погоду при слабом прибое, треугольники с обращенными вверх остриями и полукружия двух видов — измерения при сильном штормовом прибое, сдвинувшем границу омываемой прибоем полосы далеко (на несколько метров) в глубь суши. Там же приводится график кривой (22) для случая $f = \operatorname{tg} \alpha_0 = 0.75$, $f_\infty = f / (1 + q/\mu) = 0.20$, $\zeta = 0.30$, $C_x = 0.30$, $\rho_1 / \rho = 3$, $a = 3$ см. Единица на осях координат равна 12 см. На фиг. 3 приведены рассчитанные по формулам (22), (23) графики для этих же условий при четырех значениях f_∞ , указанных на фигуре.

Для определения f специально был насыпан на берегу конус из сухой и мокрой гальки и измерен угол при вершине конуса, кроме того, измерялся угол наклона кривой $y = y(x)$ в вершине ($x = 0$). Результаты измерений были близки и дали $f = 0.75$.

Подбор q/μ , т. е. $f_\infty = \operatorname{tg} \alpha_\infty$, производился по экспериментальным данным для $y = y(x)$ при больших x , когда практически график $y = y(x)$ превращался в прямую (см. фиг. 2).

Данные фиг. 2 свидетельствуют, что, во-первых, действительно, вид кривой $y = y(x)$ слабо зависит от силы прибоя (от силы прибоя, как отмечалось выше, существенно зависит расположение этой кривой, т. е. положение точки $x = y = 0$); во-вторых, предлагаемая приближенная теория удовлетворительно описывает явление.

Более внимательное рассмотрение фиг. 2 показывает, что средние экспериментальные значения ординат линии $y = y(x)$ для штормового прибоя всюду, за исключением группы для первых трех значений абсциссы, отличаются от ординат для случая слабого прибоя на примерно постоянную величину. Поэтому, если сдвинуть вниз кривую для штормового прибоя, то она совпадает с кривой для слабого прибоя всюду, кроме указанных трех точек. Это расхождение объясняется следующим. В то время как при слабом прибое граница между омываемым и сухим участками берега очерчена весьма четко с изломом в линии поперечного профиля, при шторме эта граница более размыта. Это связано с тем, что величина нерегулярности штормового прибоя значительна, и край водяной пленки иногда заливает гребень омываемого участка берега (точку $x = y = 0$) и сглаживает его, унося частицы гребня в фазе наката в глубь суши и уменьшая ординаты кривой $y = y(x)$ в окрестности точки $x = 0$.

Если такое перестроение произвести, то рассчитанная по предлагаемому методу кривая на фиг. 2 окажется выше средней экспериментальной. Можно, однако, добиться совпадения этих кривых незначительным изменением принятых выше значений ζ и C_x в разумных для этих величин пределах, т. е. соответствующим изменением масштабного множителя L и значения $\operatorname{tg} \alpha_{\infty}$.

Отметим еще, что построенные выше соотношения применимы для описания только участка берега, периодически осушаемого и вновь омываемого пленкой прибоя. Профиль участка берега, находящегося постоянно под водой, как показывают наблюдения, более крутой и наклонен примерно под углом естественного откоса. Таким образом, построенная выше кривая, начиная с места удара разрушающихся при подходе к берегу волн, уходя под воду, постепенно становится все более крутой и уже на глубине порядка 1 м идет под углом естественного откоса.

Координаты точек кривой $y = y(x)$ измерялись при помощи двух реек с рисками, горизонтирование рейки Ox производилось при помощи маски для подводного плавания, на стекло которой наливался небольшой объем воды, превращавший маску в уровень.

В проведении измерений принимали участие Л. С. Магазинер и В. М. Рыжик, расчеты выполнены Г. И. Иевлевой. Автор приносит им свою благодарность.

Поступила 29 XII 1964

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ

В. И. Феодосьев (Москва)

В связи с часто возникающими в настоящее время рабочими дискуссиями по поводу устойчивости упругих систем со следящими силами нами была запрограммирована и решена следующая задача.

Тонкий упругий стержень совершает равноускоренное движение под действием следящей силы, приложенной к одному из торцов.

Дифференциальное уравнение упругой линии однородного стержня будет

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P}{l} (l - x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Полагая $y = X e^{i\Omega t}$ и переходя к безразмерной форме получим

$$\eta^{IV} + \beta [(1 - \zeta) \eta]' - \omega^2 \eta = 0$$

Здесь

$$\beta = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \omega^2 = \frac{\rho Fl^4}{EI} \Omega^2, \quad \zeta = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{X}{l}$$

Граничные условия

$$\eta'' = 0, \quad \eta''' = 0, \quad \text{при } \zeta = 0; \quad \eta'' = 0, \quad \eta''' = 0 \quad \text{при } \zeta = 1$$