О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

А. Анчев

(София, Болгария)

Перманентные вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой были открыты Б. К. Млодзеевским [1] и Штауде [2], а достаточные условия устойчивости перманентных вращений указаны В. В. Румянцевым [3]. В. В. Белецким [4] рассмотрены некоторые частные случаи перманентных вращений и их устойчивость в ньютоновском поле сил. Н. Г. Апыхтин [5] нашел перманентные оси вращения в случае, когда уравнения движения допускают интегралы Д. Н. Горячева.

Ниже рассматривается задача о перманентных вращениях твердого тела с одной неподвижной точкой и их устойчивость в потенциальном поле сил.

1. Перманентные оси вращения. Примем неподвижную точку O твердого тела за начало неподвижной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ и за начало подвижной системы осей координат $Ox_1x_2x_3$, неизменным образом связанных с твердым телом, оси которой направлены по главным осям инерции твердого тела для неподвижной точки. Пусть A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции тела для точки O, а γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси $O\zeta$ относительно подвижных осей x_1, x_2, x_3. Будем предполагать, что внешние силы допускают силовую функцию в виде

$$U = U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \qquad (1.1)$$

имеющую непрерывные частные производные первого порядка. Уравнения движения тела в подвижной системе имеют вид

$$A_i \frac{dp_i}{dt} = (A_{i+1} - A_{i+2})\, p_{i+1}p_{i+2} + \gamma_{i+2}\frac{\partial U}{\partial \gamma_{i+1}} - \gamma_{i+1}\frac{\partial U}{\partial \gamma_{i+2}} \qquad (1.2)$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = p_{i+2}\gamma_{i+1} - p_{i+1}\gamma_{i+2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где p_i — проекции мгновенной угловой скорости тела на подвижные оси координат, а индексы не должны превышать 3, что достигается в противном случае вычитанием 3.

Система дифференциальных уравнений (1.2) имеет следующие первые интегралы:

$$A_1p_1^2 + A_2p_2^2 + A_3p_3^2 - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{const}, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad (1.3)$$

$$A_1p_1\gamma_1 + A_2p_2\gamma_2 + A_3p_3\gamma_3 = \text{const},$$

Если существует ось перманентных вращений, то она будет неподвижной как в пространстве, так и в теле. Пусть относительно подвижных осей направляющие косинусы перманентной оси $l_1 = \text{const}$, $l_2 = \text{const}$, $l_3 = \text{const}$, а ω — соответствующая угловая скорость. Тогда имеем $p_i = \omega l_i$; уравнения (1.2) принимают вид

$$A_i l_i \frac{d\omega}{dt} = (A_{i+1} - A_{i+2})\,\omega^2 l_{i+1} l_{i+2} + \gamma_{i+2}\frac{\partial U}{\partial \gamma_{i+1}} - \gamma_{i+1}\frac{\partial U}{\partial \gamma_{i+2}}$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \omega\,(l_{i+2}\gamma_{i+1} - l_{i+1}\gamma_{i+2}) \qquad (1.4)$$

Система (1.4) имеет первые интегралы

$$\omega^2(A_1l_1^2 + A_2l_2^2 + A_3l_3^2) - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = k_1$$

$$\omega\,(A_1l_1\gamma_1 + A_2l_2\gamma_2 + A_3l_3\gamma_3) = k_2 \qquad (1.5)$$

$$l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + l_3\gamma_3 = k_3, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad (1.6)$$

Исключая из (1.5) ω, получаем

$$(A_1l_1\gamma_1 + A_2l_2\gamma_2 + A_3l_3\gamma_3)^2\,[k_1 + 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)] = k_2^2\,(A_1l_1^2 + A_2l_2^2 + A_3l_3^2) \qquad (1.7)$$

Система уравнений (1.6) и (1.7) может быть принята для определения γ_i, и, очевидно, эти величины, определенные этой системой, будут постоянными, за исключением особых случаев, например, некоторые из уравнений — суть следствия других, которые не рассматриваются. Тогда из (1.4) видно, что

$$\frac{\gamma_1}{l_1} = \frac{\gamma_2}{l_2} = \frac{\gamma_3}{l_3}$$

Следовательно, перманентной осью будет ось $O\zeta$, т. е. $\gamma_i = l_i$. Из (1.5) следует, что и $\omega = \text{const}$. Остается определить положение перманентной оси в теле, т. е. условия, которым должны удовлетворять l_i, чтобы соответствующая ось, будучи направленной по $O\zeta$, служила осью перманентного вращения. Если обозначим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_i}\right)_{\gamma_1=l_1,\ \gamma_2=l_2,\ \gamma_3=l_3} = L_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

то (1.4) при $\omega = \text{const}$ принимает вид

$$(A_{i+1} - A_{i+2})\,\omega^2\, l_{i+1} l_{i+2} + l_{i+2} L_{i+1} - l_{i+1} L_{i+2} = 0 \tag{1.8}$$

Если уравнения (1.8) умножить соответственно на L_i и сложит получим

$$L_1 (A_2 - A_3)\, l_2 l_3 + L_2 (A_3 - A_1)\, l_3 l_1 + L_3 (A_1 - A_2)\, l_1 l_2 = 0 \tag{1.9}$$

Направляющие косинусы перманентной оси должны удовлетворять, кроме (1.9), еще условию

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{1.10}$$

Уравнения (1.9) и (1.10) не определяют однозначно положение перманентной оси в теле, следовательно, имеется множество осей, удовлетворяющих (1.9) и (1.10). В текущих координатах l_i точка $S\,(l_1,\ l_2,\ l_3)$ должна лежать одновременно на поверхности (1.9) и на сфере (1.10), и ее геометрическим местом является линия пересечения обеих поверхностей. Отметим, что, например, при однородном поле

$$U = -\,mg\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3)$$

или ньютоновском поле сил

$$U = -\,\alpha\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) - \beta\,(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2)$$

поверхность (1.9) будет конусом Штауде [2]

$$x_0 (A_2 - A_3)\, l_2 l_3 + y_0 (A_3 - A_1)\, l_3 l_1 + z_0 (A_1 - A_2)\, l_1 l_2 = 0$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела.

Сфера (1.10) и поверхность (1.9) имеют общие точки $S_1\,(\pm\,1,\ 0,\ 0)$, $S_2\,(0,\ \pm\,1,\ 0)$, $S_3\,(0,\ 0,\ \pm\,1)$, соответствующие главным осям инерции при условии, если величины L_j ограничены. Индекс j принимает значения 1, 2, 3, за исключением значения i, соответствующего рассматриваемой оси. Точка $S_4\,(l_1^1,\ l_2^1,\ l_3^1)$ сферы, для которой нормаль $\mathbf{n}\,(L_1',\ L_2',\ L_3')$ к эквипотенциальной поверхности коллинеарна радиусу-вектору OS_4, т. е. $L_1'/l_1 = L_2'/l_2 = L_3'/l_3$ удовлетворяет также (1.9). Легко можно проверить, что и точка

$$S_5\left(\frac{L_1}{A_1 N},\ \frac{L_2}{A_2 N},\ \frac{L_3}{A_3 N}\right), \qquad N = \pm\left(\frac{L_1^2}{A_1^2} + \frac{L_2^2}{A_2^2} + \frac{L_3^2}{A_3^2}\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

также удовлетворяет (1.9). Если на сфере найдется точка $S_0\ (l_1^0,\ l_2^0,\ l_3^0)$, являющаяся стационарной для силовой функции, т. е. $L_i^0 = 0$, то S_0 удовлетворяет (1.9).

Каждой точке S сферической кривой, полученной пересечением (1.9) и (1.10), соответствует полуось OS, которая может служить осью перманентного вращения, если направляющие косинусы ее (координаты S) таковы, что из (1.8) получим неотрицательную величину для ω^2, т. е. если

$$\omega^2 = \frac{1}{A_2 - A_3}\left(\frac{L_3}{l_3} - \frac{L_2}{l_2}\right) = \frac{1}{A_3 - A_1}\left(\frac{L_1}{l_1} - \frac{L_3}{l_3}\right) = \frac{1}{A_1 - A_2}\left(\frac{L_2}{l_2} - \frac{L_1}{l_1}\right) \geqslant 0 \tag{1.12}$$

Для точек S_1, S_2, S_3 имеем $\omega^2 = \infty$, и, следовательно, главные оси инерции не могут быть перманентными осями в общем случае. Для точек S_4 и S_0 получаем $\omega = 0$, и тело находится в равновесии.

Если какая-нибудь из точек S_1, S_2, S_3 совпадает с S_0 или S_4, например, $S_1 = S_0$, то в этом случае главная ось инерции x_1, как это видно из (1.8), является осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью. В случае, если какая-нибудь из главных осей инерции может быть осью перманентного вращения, имеем силовую функцию с $\partial U / \partial \gamma_i = \gamma_i f_i (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Для точки S_5 из (1.12) получаем

$$\omega^2 = \mp \left(\frac{L_1^2}{A_1^2} + \frac{L_2^2}{A_2^2} + \frac{L_3^2}{A_3^2}\right)^{1/2}$$

и, следовательно, перманентные вращения возможны только для полуосей, проходящих через S_5, соответствующих минусу в (1.11).

2. Некоторые частные случаи. (а) Пусть эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения и, например, $A_1 = A_2 \neq A_3$. Зависимости (1.8) и (1.9) примут вид

$$(A_1 - A_3)\,\omega^2 l_2 l_3 + l_3 L_2 - l_2 L_3 = 0, \qquad -(A_1 - A_3)\,\omega^2 l_3 l_1 + l_1 L_3 - l_3 L_1 = 0$$

$$l_2 L_1 - l_1 L_2 = 0 \tag{2.1}$$

$$l_3 (l_2 L_1 - l_1 L_2) = 0 \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) показывает, что поверхность (1.9) распадается на плоскость

$$l_3 = 0 \tag{2.3}$$

и поверхность

$$l_2 L_1 - l_1 L_2 = 0 \tag{2.4}$$

(a_1) Случай $l_3 = 0$. Из (2.1) видно, что каждая ось $(l_1, l_2, 0)$ плоскости (2.3), удовлетворяющей (2.4), будет осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью, если выполнено еще $L_3 = 0$. Условие (2.4) для главной оси x_1 выполнено, если $L_2 = 0$, а для x_2 — если $L_1 = 0$.

(a_2) Случай $l_3 \neq 0$. Здесь возможные оси перманентного вращения и соответствующая угловая скорость удовлетворяют условию

$$\omega^2 = \frac{1}{A_1 - A_3}\left(\frac{L_3}{l_3} - \frac{L_1}{l_1}\right) = \frac{1}{A_1 - A_3}\left(\frac{L_3}{l_3} - \frac{L_2}{l_2}\right) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Из (2.1) видно, что если $L_1 = L_2 = 0$, то главная ось инерции x_3 является осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью.

(б). Если эллипсоид инерции шаровой, т. е. $A_1 = A_2 = A_3$, то из (1.8) видно, что единственными осями перманентного вращения являются оси, соответствующие нормалям к эквипотенциальной поверхности или ее стационарным точкам.

(в) Пусть эллипсоид инерции не есть эллипсоид вращения, но силовая функция имеет вид $U = U(\gamma_1, \gamma_2)$. Учитывая, что $L_3 = 0$, уравнения (1.8) и (1.9) получим в виде

$$l_3 [(A_2 - A_3)\,\omega^2 l_2 + L_2] = 0, \qquad l_3 [(A_3 - A_1)\,\omega^2 l_1 - L_1] = 0 \tag{2.6}$$

$$(A_1 - A_2)\,\omega^2 l_1 l_2 + l_2 L_1 - l_1 L_2 = 0, \qquad l_3 [L_1 (A_2 - A_3)\, l_2 + L_2 (A_3 - A_1)\, l_1] = 0 \tag{2.7}$$

В этом случае поверхность (1.9) распадается на плоскость (2.3) и поверхность

$$L_1 (A_2 - A_3)\, l_2 + L_2 (A_3 - A_1)\, l_1 = 0 \tag{2.8}$$

($в_1$) Случай $l_3 = 0$. Как видно из (2.6), возможные оси перманентного вращения и соответствующая угловая скорость подчинены условию

$$\omega^2 = \frac{1}{A_1 - A_2}\left(\frac{L_2}{l_2} - \frac{L_1}{l_1}\right) \geqslant 0 \tag{2.9}$$

Главная ось инерции x_1 (x_2) будет осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью, если $L_2 = 0$ $(L_1 = 0)$.

(б$_2$) Случай $l_3 \neq 0$. Ось перманентного вращения должна удовлетворять (2.8) Возможные оси перманентных вращений и соответствующую угловую скорость определяем из условия

$$\omega^2 = \frac{1}{A_3 - A_1} \frac{L_1}{l_1} = -\frac{1}{A_2 - A_3} \frac{L_2}{l_2} = \frac{1}{A_1 - A_2} \left(\frac{L_2}{l_2} - \frac{L_1}{l_1} \right) \geqslant 0 \qquad (2.10)$$

Главная ось инерции x_3 является осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью, если $L_1 = L_2 = 0$, т. е. если она соответствует стационарной точке силовой функции $U(\gamma_1, \gamma_2)$.

(г) Пусть $U = U(\gamma_1)$. Так как в этом случае $L_2 = L_3 = 0$, то из (1.8) получаем

$$(A_2 - A_3)\,\omega^2 l_2 l_3 = 0, \qquad l_3 [(A_3 - A_1)\,\omega^2 l_1 - L_1] = 0$$

$$l_2 [(A_1 - A_2)\,\omega^2 l_1 + L_1] = 0 \qquad (2.11)$$

(г$_1$) Случай $l_2 \neq l_3 = 0$. Ось x_1 является осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью.

(г$_2$) Случай $l_2 = 0$, $l_3 \neq 0$. Возможные оси перманентных вращений и соответствующая угловая скорость удовлетворяют условию

$$\omega^2 = \frac{L_1}{l_1 (A_3 - A_1)} \geqslant 0$$

Ось x_3 будет осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью если $L_1 = 0$, т. е. когда она соответствует стационарной точке силовой функции.

(г$_3$) Случай $l_2 \neq 0$, $l_3 \neq 0$. Если $A_2 \neq A_3$, то возможно только равновесие при $L_1 = 0$. Если $A_2 = A_3$, то возможные оси перманентных вращений и соответствующую угловую скорость определяем из условия

$$\omega^2 = \frac{L_1}{l_1 (A_2 - A_1)} \geqslant 0$$

Если $l_1 = 0$ является стационарной точкой силовой функции ($L_1 = 0$) и $A_2 = A_3$, то перманентные вращения вокруг каждой из осей $(0, l_2, l_3)$ совершаются с произвольной угловой скоростью.

3. Устойчивость перманентных вращений. Пусть

$$p_i = \omega l_i, \qquad \gamma_i = l_i = \text{const}, \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \omega = \text{const} \qquad (3.1)$$

определяют частное решение уравнений движения (1.2), соответствующее перманентному вращению твердого тела. Движение (3.1) примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость. Подставив в уравнения (1.2)

$$p_i = \omega l_i + \xi_i, \qquad \gamma_i = l_i + \eta_i, \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (3.2)$$

получаем уравнения возмущенного движения, которые допускают первые интегралы

$$V_1 = A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + 2\omega (A_1 l_1 \xi_1 + A_2 l_2 \xi_2 + A_3 l_3 \xi_3) -$$
$$- 2U (l_1 + \eta_1, l_2 + \eta_2, l_3 + \eta_3) = \text{const} \qquad (3.3)$$

$$V_2 = A_1\xi_1\eta_1 + A_2\xi_2\eta_2 + A_3\xi_3\eta_3 + \omega (A_1 l_1 \eta_1 + A_2 l_2 \eta_2 + A_3 l_3 \eta_3) +$$
$$+ A_1 l_1 \xi_1 + A_2 l_2 \xi_2 + A_3 l_3 \xi_3 = \text{const}$$

$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2 (l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + l_3\eta_3) = 0$$

Разложив $U(l_1 + \eta_1, l_2 + \eta_2, l_3 + \eta_3)$ в ряд по степеням η_i, для V_1 получим

$$V_1 = \sum_{i=1}^{3} A_i \xi_i^2 + 2\omega \sum_{i=1}^{3} A_i l_i \xi_i - 2 \sum_{i=1}^{3} L_i \eta_i - \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{3} L_{ij} \eta_i \eta_j + \varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

Здесь

$$L_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i \, \partial \gamma_j} \right)_{\gamma_1 = l_1,\ \gamma_2 = l_2,\ \gamma_3 = l_3}$$

а $\varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — функция, содержащая члены разложения, в которых η_i выше второй степени.

Функцию Ляпунова строим по методу Н. Г. Четаева [6] в виде

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3 + {}^1/_4 \mu V_3^2 = A_1\xi_1^2 + A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + (\lambda + \mu l_1^2 - L_{11})\eta_1^2 +$$
$$+ (\lambda + \mu l_2^2 - L_{22})\eta_2^2 + (\lambda + \mu l_3^2 - L_{33})\eta_3^2 - 2\omega(A_1\xi_1\eta_1 + A_2\xi_2\eta_2 + A_3\xi_3\eta_3) +$$
$$+ 2[(\mu l_1 l_2 - L_{12})\eta_1\eta_2 + (\mu l_1 l_3 - L_{13})\eta_1\eta_3 + (\mu l_2 l_3 - L_{23})\eta_2\eta_3] +$$
$$+ f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \text{const} \tag{3.4}$$

постоянная λ на основании (1.8) равна

$$\lambda = A_1\omega^2 + \frac{L_1}{l_1} = A_2\omega^2 + \frac{L_2}{l_2} = A_3\omega^2 + \frac{L_3}{l_3} \tag{3.5}$$

Здесь μ — произвольная постоянная, а $f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ содержит η_i в степени только выше второй.

Функция V будет определенно положительной функцией переменных ξ_i, η_i, если таковой будет квадратичная часть функции V, т. е. квадратичная форма $W = V - f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности W, а следовательно и функции V, согласно критерию Сильвестра, являются неравенства

$$m_1 - A_1\omega^2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} m_1 - A_1\omega^2 & k_{12} \\ k_{12} & m_2 - A_2\omega^2 \end{vmatrix} > 0 \tag{3.6}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 - A_1\omega^2 & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & m_2 - A_2\omega^2 & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & m_3 - A_3\omega^2 \end{vmatrix} > 0 \tag{3.7}$$

где

$$m_i = \lambda + \mu l_i^2 - L_{ii}, \qquad k_{i,\,i+1} = \mu l_i l_{i+1} - L_{i,\,i+1} \tag{3.8}$$

При выполнении условий (3.6), (3.7) функция V будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения, и по теореме Ляпунова об устойчивости — невозмущенное движение (3.1), соответствующее перманентным вращениям твердого тела, будет устойчивым по отношению к переменным p_i, γ_i.

Если ось перманентного вращения проходит через стационарную точку $S_0(l_1^\circ, l_2^\circ, l_3^\circ)$ силовой функции, т. е. $L_i = 0$, как уже было отмечено, $\omega = 0$, и тело находится в равновесии. При $\mu = 0$ из (3.7) получаем достаточные условия устойчивости в этом случае

$$-L_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} > 0 \tag{3.9}$$

Неравенства (3.9) — достаточные условия для того, чтобы в точке S_0 силовая функция имела максимум, т. е. они совпадают с достаточными условиями устойчивости равновесия согласно критерию Лагранжа (Лежен—Дирихле).

Если силовая функция U такова, что $L_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, для достаточных условий устойчивости перманентных вращений из (3.6) получим

$$\mu l_1^2 + \frac{L_1}{l_1} - L_{11} > 0 \tag{3.10}$$

$$\mu\left[\left(\frac{L_2}{l_2} - L_{22}\right) l_1^2 + \left(\frac{L_1}{l_1} - L_{11}\right) l_2^2\right] + \left(\frac{L_1}{l_1} - L_{11}\right)\left(\frac{L_2}{l_2} - L_{22}\right) > 0$$

$$\mu\left[\left(\frac{L_2}{l_2} - L_{22}\right)\left(\frac{L_3}{l_3} - L_{33}\right) l_1^2 + \left(\frac{L_1}{l_1} - L_{11}\right)\left(\frac{L_3}{l_3} - L_{33}\right) l_2^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{L_1}{l_1} - L_{11}\right) \times \left(\frac{L_2}{l_2} - L_{22}\right) l_3^2\right] + \left(\frac{L_1}{l_1} - L_{11}\right)\left(\frac{L_2}{l_2} - L_{22}\right)\left(\frac{L_3}{l_3} - L_{33}\right) > 0$$

Например, если имеем однородное поле сил $U = -P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3)$, где P — вес тела, а x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести, из условия (3.10) получим известные условия В. В. Румянцева об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [3].

Н. Г. Апыхтиным [5] рассмотрен вопрос о перманентных вращениях твердого тела с одной неподвижной точкой для случая Д. Н. Горячева, а именно, $A_1 = A_2 = 2A_3$, и силовая функция имеет вид

$$U = A_1 [a(n-1)^{-1} \gamma_3^{1-n} + {}^1/_2\, b(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2]$$

где a, b, c_1, c_2 — постоянные, а n — целое положительное число. В случае

$$\begin{aligned} &L_1 = -A_1(c_1 + bl_1), \qquad &&L_{11} = -A_1 b \\ &L_2 = -A_1(c_2 - bl_2), &&L_{22} = A_1 b \qquad\qquad L_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \\ &L_3 = -A_1 a l_3^{-n}, &&L_{33} = A_1 n a l_3^{-n-1} \end{aligned}$$

достаточные условия (3.10) дают, например, при $\mu = 0$ неравенства

$$-\frac{c_1}{l_1} > 0, \qquad -\frac{c_2}{l_2} > 0, \qquad -\frac{a}{l_3^{n+1}} > 0$$

4. Устойчивость перманентных вращений вокруг главных осей инерции. Будем предполагать, что силовая функция удовлетворяет условию $L_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Если силовая функция имеет стационарную точку, соответствующую какой-нибудь из главных осей инерции, то эта ось является осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью. Пусть, например, $S_1(1, 0, 0)$ будет стационарной точкой. Чтобы исследовать устойчивость перманентных вращений вокруг оси x_1, построим функцию Ляпунова в виде (3.4), в которую следует вставить теперь $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$ и $\lambda = A_1\omega^2$. Условия знакоопределенности этой функции (3.6), а следовательно, и достаточные условия устойчивости легко можно привести к виду

$$\mu - L_{11} > 0, \qquad (A_1 - A_2)\omega^2 - L_{22} > 0, \qquad (A_1 - A_3)\omega^2 - L_{33} > 0 \tag{4.1}$$

(а) Пусть $S_1(1, 0, 0)$ соответствует максимуму силовой функции, т. е. $L_{ii} < 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Из (4.1) при $\mu = 0$ следует:

($а_1$) Случай $A_1 > A_2 \geqslant A_3$ — движение устойчиво при произвольной угловой скорости, т. е. перманентные вращения вокруг главной оси инерции, соответствующей максимальному моменту инерции, устойчивы при произвольной угловой скорости.

($а_2$) Случай $A_2 > A_1 > A_3$. Из (4.1) видно, что достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\omega^2 < \frac{-L_{22}}{A_2 - A_1} \tag{4.2}$$

($а_3$) Случай $A_1 < A_2 \leqslant A_3$. Из (4.1) следует, что достаточными условиями устойчивости являются неравенства

$$\omega^2 < \frac{-L_{22}}{A_2 - A_1}, \qquad \omega^2 < \frac{-L_{33}}{A_3 - A_1} \tag{4.3}$$

(б) Пусть $S_1(1, 0, 0)$ соответствует минимуму силовой функции, т. е. $L_{ii} > 0$. Выбирая $\mu > L_{11}$, видим, что условия (4.1) выполнены только тогда, когда x_1 будет осью максимального момента инерции $A_1 > A_2 \geqslant A_3$ и, кроме того,

$$\omega^2 > \frac{L_{22}}{A_1 - A_2}, \qquad \omega^2 > \frac{L_{33}}{A_1 - A_3} \tag{4.4}$$

(в) Пусть стационарная точка $S_1(1, 0, 0)$ не соответствует ни максимуму, ни минимуму силовой функции. Если $L_{11} \geqslant 0$, $L_{22} < 0$, $L_{33} < 0$, то результаты совпадают с полученными в (а), если $L_{11} \leqslant 0$, $L_{22} > 0$, $L_{33} > 0$ — с результатами, полученными в (б). Если $L_{22} > 0$, $L_{33} < 0$, а L_{11} — любое, то при $A_1 > A_2 \geqslant A_3$, как видно из (4.1), достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\omega^2 > \frac{L_{22}}{A_1 - A_2} \tag{4.5}$$

а при $A_3 > A_1 > A_2$ — неравенства

$$\frac{L_{22}}{A_1 - A_2} < \omega^2 < \frac{-L_{33}}{A_3 - A_1} \tag{4.6}$$

при $A_2 > A_1 > A_3$ второе из неравенств (4.1) не может быть удовлетворенным.

Ось x_1 (1, 0, 0) будет осью перманентного вращения с произвольной угловой скоростью и в случае, когда она является нормалью к эквипотенциальной поверхности, т. е. когда для нее $L_1 \neq 0$, $L_2 = L_3 = 0$. Чтобы исследовать устойчивость перманентных вращений в этом случае, построим функцию Ляпунова в виде (3.4), в которой следует положить $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$, $\lambda = A_1\omega^2 + L_1$. Функция Ляпунова будет знакоопределенной положительной согласно (3.6), если выполнены неравенства

$$\mu + L_1 - L_{11} > 0, \qquad (A_1 - A_2)\,\omega^2 + L_1 - L_{22} > 0$$

$$(A_1 - A_3)\,\omega^2 + L_1 - L_{33} > 0 \tag{4.7}$$

являющиеся достаточными условиями устойчивости перманентных вращений в этом случае.

В качестве применения условия (4.7) рассмотрим условия устойчивости перманентных вращений, когда силовая функция имеет вид

$$U = -\alpha\,(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2) \tag{4.8}$$

где $\alpha > 0$ — постоянная. Н. Г. Апыхтин показал, что если $\omega^2 \neq 2\alpha$ и эллипсоид инерции не шаровой, перманентными осями могут быть только главные оси инерции. Когда силовая функция имеет вид (4.8), достаточные условия устойчивости перманентных вращений вокруг оси x_1 (1, 0, 0), согласно (4.7), имеют вид

$$\mu > 0, \quad (A_1 - A_2)(\omega^2 - 2\alpha) > 0, \quad (A_1 - A_3)(\omega^2 - 2\alpha) > 0 \tag{4.9}$$

Из (4.9) видно, что если ось x_1 — ось максимального момента инерции при $A_1 > A_2 \geqslant A_3$, то достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\omega^2 > 2\alpha \tag{4.10}$$

а если x_1 — ось минимального момента инерции тела — неравенство

$$\omega^2 < 2\alpha \tag{4.11}$$

Поступила 29 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении твердого тела около неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, 1894, т. 7.
2. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bevegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. J. reine und angew. Math., 1894, B. 113.
3. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
5. Апыхтин Н. Г. О перманентных осях вращения тела с закрепленной точкой в случае существования интегралов. Д. Н. Горячева. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеоретиздат, 1955.
7. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.