§ 4. **Особый случай $\omega = \omega e$.** При этом из (1.1) имеем

$$\gamma = \alpha e + \omega (x + \lambda) \tag{4.1}$$

Величина α определяется из (1.2)

$$\alpha^2 + 2\alpha\omega e \cdot (x + \lambda) + \omega^2 (x + \lambda)^2 = \Gamma^2$$

и оказывается постоянной. Поэтому постоянен вектор γ и из (1.1) в этом случае получаем $\gamma = \Gamma e$; вследствие чего (4.1) дает $x + \lambda = \nu e$, или в главных осях

$$\omega A e_1 - \nu e_1 + \lambda_1 = 0 \qquad (ABC,\ 123) \tag{4.2}$$

Исключая ω и ν, находим $I_2 = 0$, где I_2 согласно (3.5).

Это условие в общем случае означает, что равномерное вращение тела вокруг оси, проходящей через центр тяжести, возможно при условии, что вектор λ находится в плоскости, проходящей через ось вращения и нормаль к эллипсоиду инерции, проведенную в точке пересечения его с этой осью. В частности, если центр тяжести находится на одной из главных осей $e_2 = e_3 = 0$, то из (4.2) имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т. е. вектор λ должен быть направлен по той же главной оси. Величина угловой скорости в этом случае может быть любой.

Поступила 4 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полное собр. соч., т. III, ОНТИ, 1936.
2. Харламов П. В. Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Journ. für die reine und angew. Math., 1894, Bd. 113.
5. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Анчев А. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
7. Анчев А. Върху перманентните ротации на тежък жиростат. Годишник Минно-геол. ин-т, София, 1961—1962 (1963), т. 8.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин (Москва)

В работе [1] найдены перманентные вращения твердого тела с неподвижной точкой, в силовых полях Д. Н. Горячева. Ниже исследуется устойчивость этих вращений.

1. Положение твердого тела с закрепленной точкой O будем определять относительно неподвижной прямоугольной системы $\xi\eta\zeta$ прямоугольной системой $x_1x_2x_3$, связанной с телом, оси которой x_i имеют направляющие косинусы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Здесь и в дальнейшем $i = 1, 2, 3$. Проекции угловой скорости на подвижные оси обозначим через p_i, направляющие косинусы перманентной оси — через l_i, а главные моменты инерции тела относительно этих осей — A_i. Рассмотрим твердое тело (у которого $A_1 = A_2 = 2A_3$), находящееся под действием сил, имеющих потенциал

$$U (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a (n - 1)^{-1} \gamma_3^{1-n} + {}^1\!/_2 b (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 \tag{1.1}$$

что соответствует притяжению четырех точек тела [1] неподвижной плоскостью $\xi\eta$ по указанному закону. В работе [1] показано, что перманентные оси с постоянной угловой скоростью проходят через дуги A_1S_1 и A_2S_2, если n нечетно, и дуги A_1S_1 и и $A_2'S_2'$ — если n четно, сферической кривой, которая получается при пересечении двух поверхностей

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \qquad c_2 l_1 - c_1 l_2 - 2b l_1 l_2 = 0 \tag{1.2}$$

и перпендикулярны плоскости $\xi\eta$ (см. фигуру в работе [1]). Причем точки S_1, S_2 и S_2'

соответствуют положению равновесия тела ($\omega = 0$), а A_1, A_2 и A_2' определяют вращение с угловой скоростью $\omega^2 = \infty$, что следует из уравнений [1]

$$(b + {}^1/_2\omega^2)\, l_2 l_3 + a l_2 l_3^{-n} - c_2 l_3 = (b - {}^1/_2\omega^2)\, l_1 l_3 - a l_1 l_3^{-n} + c_1 l_3 = 0 \qquad (1.3)$$

Исследуем устойчивость рассматриваемых перманентных осей по отношению к величинам p_i и γ_i. Проекции угловой скорости вращения тела на подвижные оси, связанные с телом, будут равны

$$p_{i0} = \omega l_i \qquad (1.4)$$

В возмущенном движении полагаем

$$p_i = p_{i0} + \xi_i, \qquad \gamma_i = l_i + \eta_i \qquad (1.5)$$

Уравнения возмущенного движения обладают следующими первыми интегралами:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{3} (A_i \xi_i^2 + 2A_i p_{i0} \xi_i - 2a_i \eta_i) - \sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij} \eta_i \eta_j + O(\xi_i^3, \eta_i^3) = \mathrm{const}$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^{3} A_i (p_{i0} \eta_i + l_i \xi_i + \xi_i \eta_i) = \mathrm{const}, \qquad V_3 = \sum_{i=1}^{3} (\eta_i^2 + 2 l_i \eta_i) = 0 \qquad (1.6)$$

где

$$a_i = (\partial U / \partial \gamma_i)_{\gamma_i = l_i}, \qquad a_{ij} = (\partial^2 U / \partial \gamma_i \partial \gamma_j)_{\gamma_i = l_i}$$

Функцию Ляпунова построим по методу Н. Г. Четаева [2] в виде линейной связки интегралов (1.6)

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_3$$

Здесь постоянная λ имеет вид

$$\lambda = A_1\omega^2 + \frac{a_1}{l_1} = A_2\omega^2 + \frac{a_2}{l_2} = A_3\omega^2 + \frac{a_3}{l_3} =$$

$$= A_1\omega^2 - b - \frac{c_1}{l_1} = A_2\omega^2 + b - \frac{c_2}{l_2} = A_3\omega^2 - a l_3^{n-1} \qquad (1.7)$$

что справедливо в силу уравнений Эйлера. Функция V при условиях (1.7) есть

$$V = \sum_{i=1}^{3} [A_i \xi_i^2 - 2\omega A_i \xi_i \eta_i + (\lambda - a_{ii})\, \eta_i^2] - 2 \sum_{i \neq j} a_{ij} \eta_i \eta_j + O(\xi_i^3, \eta_i^3) \qquad (1.8)$$

Очевидно, что функция V будет определено положительной относительно ξ_i и η_i, если будет такой квадратичная часть этой функции, т. е. форма $V - O(\xi_i^3, \eta_i^3)$.

Согласно критерию Сильвестра, необходимыми и достаточными условиями положительной знакоопределенности этой формы будут неравенства

$$\lambda - a_{11} - A_1\omega^2 > 0, \qquad (\lambda - a_{11} - A_1\omega^2)(\lambda - a_{22} - A_2\omega^2) - a_{12}^2 > 0$$

$$\prod_{i=1}^{3} (\lambda - a_{ii} - A_i\omega^2) - \sum_{i=1}^{3} (\lambda - a_{ii} - A_i\omega^2)\, a_{i+1,\, i+2} - 2a_{12}a_{13}a_{23} > 0$$

Для функции (1.1) эти условия принимают вид

$$-c_1/l_1 > 0, \qquad -c_2 / l_2 > 0, \qquad -(n+1)\, a l_3^{-n-1} > 0 \qquad (1.9)$$

При условиях (1.9) функция V будет знакоопределенным интегралом уравнений возмущенного движения, и по теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенное движение (1.4) будет устойчивым по отношению к переменным p_i и γ_i.

Достаточным условиям (1.9) удовлетворяют точки дуги $A_2' S_2'$, которая является допускаемой при n-четном.

Некоторые неустойчивые перманентные оси можно указать, рассмотрев линеаризованную систему уравнений возмущенного движения, которая получается после отбрасывания членов второго и выше порядков относительно возмущений в уравнениях возмущенного движения. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\sigma^2 (\sigma^4 + g_1 \sigma^2 + g_2) = 0 \qquad (1.10)$$

$$g_1 = (1 + {}^1/_4 l_3^2)\, \omega^2 - l_1 (5b l_1 + 3c_1) - 3 l_2 (c_2 - {}^5/_3 b l_2) - a l_3^{-n-1} (2 l_3^2 + n l_1^2 + n l_2^2)$$

Выражение g_2 из-за громоздкости не приводится

Неустойчивость движения (1.4) имеет место при выполнении одного из неравенств [3] $g_1 < 0, \quad g_2 < 0, \quad g_1^2 - 4g_2 < 0$

Например, при положительных значениях постоянных a, b, c_i, для которых в работе [1] сделаны построения на фигуре, выполняется неравенство $c_2 > 2bl_2$, что следует из построения ветви гиперболы (1.2), проходящей через начало координат. А тогда заведомо $c_2 > {}^5/_3 bl_2$. Кроме того, на допускаемых дугах A_1S_1 и A_2S_2 имеем $l_1 > 0$ и $l_2 > 0$. Следовательно, второй и третий члены в (1.10) будут отрицательными. Для положительных значений n отрицательным будет член, содержащий a в (1.10), так как $l_3 > 0$ на дуге A_1S_1, а дуга A_2S_2 будет допускаемой при n нечетном.

Значит, положения равновесия $\omega = 0$, определяемые точками S_1 и S_2, будут неустойчивыми, ибо здесь $g_1 < 0$. Неустойчивыми будут перманентные оси, проходящие через точки, которые содержатся вблизи S_1 и S_2. Конечные точки заведомо неустойчивых дуг определятся значением ω^2, обращающим в нуль g_1.

2. Пусть симметричное тело ($A_1 = A_2$) находится в силовом поле с функцией

$$U = aA_1 / (n-1)\gamma_3^{n-1} \qquad (n \neq 1, \quad a > 0)$$

Перманентные оси с постоянной угловой скоростью вращения около них совпадают с осью ζ, составляя два вида таких осей [1]

$$l_1 \neq 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \omega^2 = a / (\varepsilon - 1)\, l_3^{n+1}, \quad \varepsilon = A_3 / A_1 \qquad (2.1)$$

$$l_1 = l_2 = 0, \quad l_3 = 1, \quad \omega \text{ — любая величина} \qquad (2.2)$$

Укажем, когда вращения (2.1) неустойчивы. Уравнения возмущенного движения в этом случае суть

$$(-1)^k \xi_k^{\cdot} = (\varepsilon - 1)\,\omega\,[l_3(\xi_{3-k} - \omega\eta_{3-k}) + l_{3-k}(\xi_3 + n\omega\eta_3)] + O(\xi_i^2, \eta_i^2)$$

$$\eta_i^{\cdot} = l_{i+1}(\xi_{i+2} - \omega\eta_{i+2}) - l_{i+2}(\xi_{i+1} - \omega\eta_{i+1}) + O(\xi_i^2, \eta_i^2) \qquad (2.3)$$

$$\xi_3^{\cdot} = 0 \qquad (k = 1,2;\ i = 1, 2, 3)$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (2.3) имеет вид

$$\sigma^4(\sigma^2 + g) = 0$$

$$g = \omega^2 l_3^3 \left\{\left[\varepsilon - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{l_3^2} - 1\right) - 2\right]^2 - \left(\frac{1}{l_3^2} - 1\right)\left[\frac{n^2}{4}\left(\frac{1}{l_3^2} - 1\right) + n - 1\right]\right\}$$

Согласно теореме Ляпунова о неустойчивости, по первому приближению невозмущенное движение (2.1) неустойчиво, когда $g < 0$.

Для $n = 0$ (случая Лагранжа) неустойчивость вращательных движений (2.1) при помощи характеристического уравнения линеаризованной системы установить невозможно. Но при

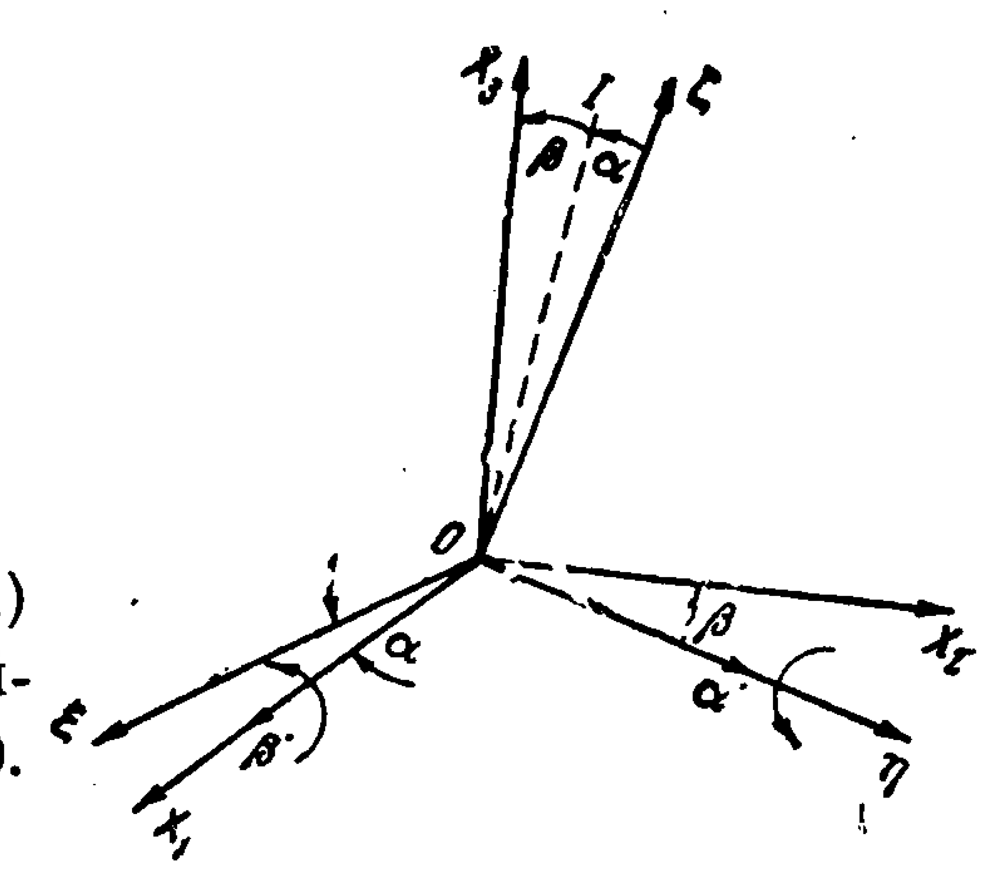
$$2n > \left(1 + \frac{1}{|l_3|}\right)^{-1}, \qquad 2n < \left(1 - \frac{1}{|l_3|}\right)^{-1}$$

существует два вещественных зачения

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = {}^1/_2 n\,(l_3^{-2} - 1) +$$
$$+ 2 \mp \{(l_3^{-2} - 1)\,[{}^1/_4 n^2 (l_3^{-2} - 1) + n - 1]\}^{1/2}$$

и когда $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, невозмущенное движение (2.1) неустойчиво. Заметим, что $\varepsilon > 0$, и выделение неустойчивых вращений (2.1) связано с существованием $\varepsilon_2 > 0$. Последнее имеет место, например, при условии

$$2\left(1 - \frac{1}{l_3^2}\right) < \frac{n}{2} < \left(1 - \frac{1}{|l_3|}\right)^{-1}$$



Фиг. 1

Любопытно то обстоятельство, что при помощи теоремы Рауса можно доказать устойчивость по отношению к θ и $\theta^{\cdot}$ ($\cos\theta = \gamma_3$), если $g > 0$ [4].

При помощи интегралов (1.6), а также интеграла $V_4 = \xi_3 = \text{const}$, можно получить следующее условие устойчивости вращений (2.1) по отношению к p_3 и γ_3.

Построим, следуя В. В. Румянцеву [5], функцию Ляпунова

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \omega^2 V_3 + \varepsilon\mu V_4^2 = (\xi_1 - \omega\eta_1)^2 +$$

$$+ (\xi_2 - \omega\eta_2)^2 + (1 + \mu)\, \varepsilon\xi_3^2 - 2\varepsilon\omega\xi_3\eta_3 + \omega^2\, [1 - n\,(\varepsilon - 1)\, l_3^2]\, \eta^2{}_3 + O\,(\xi_i^3,\ \eta_i^3) \qquad (2.4)$$

Постоянную $\mu > 0$ можно выбрать такой, что квадратичная часть функции (2.4) будет определенно положительной относительно ξ_3 и η_3, если

$$1 - n\,(\varepsilon - 1)\, l_3^2 > 0 \qquad (2.5)$$

Тогда по теореме об устойчивости по отношению к части переменных [5], невозмущенное движение (2.1) при условии (2.5) устойчиво по отношению к p_3 и γ_3.

Необходимость и достаточность условия устойчивости вращений (2.2) вида

$$\varepsilon^2\omega^2 > 4a \qquad (2.6)$$

можно доказать, приняв в качестве функции Ляпунова интеграл-связку Четаева [2]

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - (a + \varepsilon\omega\lambda)\, V_3 + \mu V_4^2 - 2\,(\varepsilon\omega + \varepsilon\lambda)\, V_4$$

а в качестве функции Четаева взять $W = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$, либо воспользоваться условием устойчивости вращений (2.2), полученным В. В. Белецким [6] для силового поля $U = U\,(\gamma_3)$.

3. Если точки твердого тела притягиваются неподвижной плокостью $\xi\eta$ пропорционально расстояниям до этой плоскости, силовая функция $U = -\, {}^1\!/_2\mu\Sigma A_i\gamma_i^2$ в случае динамически симметричного твердого тела $(A_1 = A_2)$ принимает вид $U = -\, {}^1\!/_2\, \mu\, (A_3 - A_1)\, \gamma_3^2 + \mathrm{const}$, и будем иметь частный случай вращений (2.1) вокруг перпендикуляра к плоскости $\xi\eta$

$$a = \mu\,(\varepsilon - 1), \qquad n = -1, \qquad \omega^2 = \mu \qquad (3.1)$$

Достаточное условие устойчивости (2.5) этих вращений принимает вид

$$1 - l_3^2 + \varepsilon l_3^2 > 0 \qquad (3.2)$$

При $l_3^2 < 1$ условии (3.2) выполняется всегда, поэтому устойчивость рассматриваемых вращений имеет место при любом положении тела относительно перпендикуляра к плоскоети $\xi\eta$. Достаточные условия, приведенные Г. К. Пожарицким [7], позволяют выделить лишь некоторые устойчивые вращения (3.1).

4. Рассмотрим вращение симметричного твердого тела, находящегося под действием постоянной в подвижной системе координат силы [1], вокруг оси, которая пересекает указанную силу, и исследуем устойчивость этого вращения по отношению к переменным p_i. Уравнения возмущенного движения

$$(-1)^k\xi_k^{\,\bullet} = (\varepsilon - 1)\,(p_{2+k}\xi_{k+1} - p_{k+1}\xi_{k+2} + \xi_{k+1}\xi_{k+2}), \quad \xi_3^{\,\bullet} = 0 \qquad (k = 1,\, 2) \quad (4.1)$$

имеют общее решение

$$\xi_1 = a\sin\,(\Omega t + \varphi) - bp_{10}\,(b + p_{30})^{-1}, \qquad \xi_2 = a\cos\,(\Omega t + \varphi) - bp_{20}\,(b + p_{30})^{-1}$$

$$\xi_3 = b, \qquad \Omega = (1 - \varepsilon)\,(b + p_{30}) \qquad (a,\, b,\, \varphi = \mathrm{const}) \qquad (4.2)$$

Из (4,2) следует, что рассматриваемое вращение устойчиво, если $b \neq -p_{30}$.

5. Если точки твердого тела притягиваются плоскостью $\xi\zeta$ и отталкиваются плоскостью $\eta\zeta$ пропорционально расстояния до плоскостей, силовая функция [8]

$$2U = \mu\,[A_1(\beta_1^2 - \alpha_1^2) + A_2(\beta_2^2 - \alpha_2^2) + A_3(\beta_3^2 - \alpha_3^2)] \qquad (5.1)$$

Уравнения Эйлера—Пуассона показывают, что перманентная ось с постоянной угловой скоростью вращения существует у симметричного тела; совпадает она с осью ζ.

Силовая функция (5.1) преобразуется к виду

$$2U = \mu\,(A_3 - A_1)\,(\beta_3^2 - \alpha_3^2) \qquad (5.2)$$

т. е. зависит только от косинусов углов оси симметрии тела с неподвижными осями ξ и η. Исследуем устойчивость этого вращения. Если рассматривать движение тела в переменных p_i, α_i, β_i, γ_i, уравнения возмущенного движения, которые получим из уравнений Эйлера—Пуассона, содержат периодические функции, и исследование этих уравнений уже в первом приближении становится затруднительным.

Задача упрощается, если ось x_3 оставить прежней, а x_1 и x_2 расположить произвольно в экваториальной плоскости эллипсоида инерции тела, построенного для точки O, не скрепляя их с телом; при этом величины α_3 и β_3 остаются прежними.

Положение оси симметрии тела x_3 определим углом α — между ее проекцией I на плоскость $\xi\eta$ и осью ζ (см. фигуру) и углом β — между проекцией I и самой осью x_3. Поворот тела вокруг оси x_3 определим углом φ.

Углы α, β, φ будут голономными координатами рассматриваемой механической системы. В самом деле, если повернуть систему $\xi\eta\zeta$ вокруг оси η на угол α, она займет положение системы $x_1\eta I$, а при повороте последней на угол β вокруг оси x_1 — положение подвижной системы $x_1x_2x_3$. При повороте твердого тела вокруг оси x_3 на угол φ получим данное положение тела. По известной теореме аналитической геометрии о косинусе угла между двумя прямыми в пространстве имеем

$$\alpha_3 = \cos x_3\xi = \sin\alpha\cos\beta, \qquad \beta_3 = \cos x_3\eta = -\sin\beta$$

Из доказательства голономности координат α, β, φ следует, что проекции угловой скорости вращения тела на подвижные оси суть

$$p_1 = \beta^\cdot, \qquad p_2 = \alpha^\cdot\cos\beta, \qquad p_3 = \varphi^\cdot - \alpha^\cdot\sin\beta$$

Тогда выражение для функции Лагранжа имеет вид

$$L = T + U = {}^1/_2 A_1 (\alpha^{\cdot 2}\cos^2\beta + \beta^{\cdot 2}) + {}^1/_2 A_3 (\varphi^\cdot - \alpha^\cdot\sin\beta)^2 + \\ + {}^1/_2 \mu (A_3 - A_1)(\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta)$$

Координата φ — циклическая, поэтому ей соответствует интеграл уравнений Лагранжа

$$\partial L / \partial\varphi^\cdot = A_3 r_0 = A_3 (\varphi^\cdot - \alpha^\cdot\sin\beta)$$

Методом игнорирования циклических координат получим уравнения в форме Лагранжа с функцией Рауса

$$R = {}^1/_2 A_1 (\alpha^{\cdot 2}\cos^2\beta + \beta^{\cdot 2}) + {}^1/_2 A_3 r_0^2 + {}^1/_2 \mu (A_3 - A_1)(\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta) - \\ - A_3 r_0 (r_0 + \alpha^\cdot\sin\beta)$$

Эти уравнения не будут содержать переменную φ:

$$A_1\alpha^{\cdot\cdot}\cos\beta - 2A_1\alpha^\cdot\beta^\cdot\sin\beta - A_3 r_0\beta^\cdot = -\mu(A_3 - A_1)\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$$

$$A_1\beta^{\cdot\cdot} + A_1\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta + A_3 r_0\alpha^\cdot\cos\beta = \mu(A_3 - A_1)(1 + \sin^2\alpha)\sin\beta\cos\beta \qquad (5.3)$$

Указанному перманентному вращению соответствует решение уравнений (5.3)

$$\alpha = \beta = \alpha^\cdot = \beta^\cdot = 0, \qquad \varphi^\cdot = r_0 \qquad (5.4)$$

В возмущенном движении полагаем

$$\alpha = \alpha, \qquad \beta = \beta, \qquad \alpha^\cdot = \alpha^\cdot, \qquad \beta^\cdot = \beta^\cdot$$

Тогда уравнения в вариациях имеют вид

$$A_1\alpha^{\cdot\cdot} + \mu(A_3 - A_1)\alpha - A_3 r_0\beta^\cdot = 0, \; A_1\beta^{\cdot\cdot} - \mu(A_3 - A_1)\beta + A_3 r_0\alpha^\cdot = 0 \qquad (5.5)$$

Характеристическое уравнение системы (5.5) есть

$$A_1\sigma^4 + A_3 r_0^2\sigma^2 - \mu^2(A_3 - A_1)^2 = 0$$

Оно имеет положительные корни всегда, и, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, заключаем о неустойчивости движения (5.4).

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 6 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Апыхтин Н. Г. О перманентных осях твердого тела с одной закрепленной точкой в случае существования интервалов Горячева. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лангранжа, ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
3. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение, т. I, Изд. ин. лит.,1952.
4. Скимель В. Н. Об устойчивости некоторых движений гиростата. Тр. Казан. авиац. ин-та, 1962, вып. 71.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. Моск. ун-та, 1957, № 4.
6. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
7. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
8. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.