О РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

П. В. Харламов (Новосибирск)

§ 1. Исходные уравнения. Если указанное тело находится под действием силы тяжести и несет на себе вращающиеся массы (маховики или жидкость, циркулирующую в многосвязных полостях), то его движение описывается уравнениями [1], которые в обычных обозначениях [2] имеют вид

$$Ap^{\cdot} = (B - C)\, qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2, \qquad \gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3$$

$$(123,\ ABC,\ pqr)$$

или в векторной записи

$$\mathbf{x}^{\cdot} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\times\boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

Эти уравнения при помощи интегралов

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma} = E, \qquad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\gamma} = k, \qquad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \Gamma^2 \tag{1.2}$$

легко преобразуются к виду [3]

$$\mathbf{e}\cdot[\mathbf{x}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] = 0 \tag{1.3}$$

$$[\mathbf{x}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})]\cdot[\mathbf{e}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] + \mathbf{e}\cdot(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})\,(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x} - E) = k$$

$$[\mathbf{x}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})]^2 + (\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x} - E)^2 = \Gamma^2$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x} - E)\,\mathbf{e} + [\mathbf{x}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})]\times\mathbf{e}$$

§ 2. Конус осей равномерного вращения. Пусть вектор угловой скорости постоянен по отношению к телу $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const}$, тогда и $\mathbf{x} = \mathrm{const}$, и из (1.3)

$$\mathbf{e}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})] = 0 \tag{2.1}$$

Оставляя до § 4 исследование случая $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}$, полагаем

$$\boldsymbol{\omega} \neq \omega\mathbf{e} \tag{2.2}$$

и потому из (2.1)

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} = \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\mathbf{e} \tag{2.3}$$

где α и β — некоторые постоянные. Подставив (2.3) в (1.1), имеем

$$\mathbf{e}\times\boldsymbol{\gamma} = \beta\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}), \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \mu\mathbf{e} + \beta\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e}$$

Определив из последнего соотношения (1.2) постоянную μ, получим

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e} + \mathbf{e}\,\sqrt{\Gamma^2 - \beta^2\,[(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e}]^2} \tag{2.4}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\gamma}$ также постоянен по отношению к телу и имеем из (1.1) $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} = 0$; отсюда заключаем, что осью вращения может быть только вертикаль

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\Gamma}{\omega}\,\boldsymbol{\omega} \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5)

$$(\beta + \Gamma/\omega)\,\boldsymbol{\omega} = \{\beta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e} + \sqrt{\Gamma^2 - \beta^2\,[(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\times\mathbf{e}]^2}\}\,\mathbf{e}$$

В силу (2.2), это возможно лишь при $\beta = -\Gamma/\omega$; подставляя это в (2.3), получаем

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} = \alpha\boldsymbol{\omega} - (\Gamma/\omega)\,\mathbf{e}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) = (\Gamma/\omega)\,(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{2.6}$$

Умножая последнее соотношение скалярно на $\boldsymbol{\lambda}$, найдем

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}) = (\Gamma/\omega)\,\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{e}) \tag{2.7}$$

В системе координат, связанной с телом, уравнения (2.1), (2.7) определяет поверхности, пересечение которых будет направляющей линей конуса осей равномерного вращения. При $\boldsymbol{\lambda} \to 0$ этот конус переходит в конус $\mathbf{e}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}) = 0$ (Штауде [4]).

§ 3. Уравнения конуса в главных осях. Запишем (2.1), (2.7) в координатной форме:

$$\begin{aligned}&(B - C)\, e_1 qr + (C - A)\, e_2 rp + (A - B)\, e_3 pq + \\ &+ (\lambda_3 e_2 - \lambda_2 e_3)\, p + (\lambda_1 e_3 - \lambda_3 e_1)\, q + (\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2)\, r = 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&[(B - C)\,\lambda_1 qr + (C - A)\,\lambda_2 rp + (A - B)\,\lambda_3\, pq]\,\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} + \\ &+ [(\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)\, p + (\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)\, q + (\lambda\, e_2 - \lambda_2 e_1)\, r]\,\Gamma = 0\end{aligned} \tag{3.2}$$

Обе эти поверхности в начале координат касаются плоскости

$$(\lambda_3 e_2 - \lambda_2 e_3)\, p + (\lambda_1 e_3 - \lambda_3 e_1)\, q + (\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2) r = 0 \qquad (3.3)$$

Асимптотическим конусом поверхности (3.1) будет конус Штауде

$$(B - C)\, e_1 qr + (C - A)\, e_2 rp + (A - B)\, e_3 pq = 0 \qquad (3.4)$$

У поверхности (3.2) асимптотический конус описывается уравнением

$$(B - C)\, \lambda_1 qr + (C - A)\, \lambda_2 rp + (A - B)\, \lambda_3\, pq = 0$$

Вид поверхности (3.1) определяется величинами

$$I_1 = e_1 e_2 e_3 (B - C)(C - A)(A - B), \qquad I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ Ae_1 & Be_2 & Ce_3 \end{vmatrix} \qquad (3.5)$$

Если $I_1 I_2 \neq 0$, то (3.1) будет уравнением однополостного гиперболоида; в случае $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$ — уравнением конуса; если же $I_1 = 0$, но $I_2 \neq 0$, то (3.1) будет уравнением гиперболического параболоида, и, наконец, если $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, то (3.1) определяет две плоскости. В случае $\lambda = \lambda e$ плоскость (3.3) исчезает. При этом обе поверхности совпадают с конусом (3.4)

Вместо (3.2) можно рассматривать поверхность

$$\frac{\omega}{\Gamma} = -\frac{(B - C)\, e_1 qr + (C - A)\, e_2 rp + (A - B)\, e_3 pq}{(B - C)\, \lambda_1 qr + (C - A)\, \lambda_2 rp + (A - B)\, \lambda_3\, pq} \qquad (3.6)$$

Отметим один способ исследования конуса осей равномерного вращения. Положим $p = \omega\xi_1$, $q = \omega\xi_2$, $r = \omega\xi_3$. Очевидно,

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.1), (3.6) дают

$$\omega = \frac{(\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)\, \xi_1 + (\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)\, \xi_2 + (\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)\, \xi_3}{(B - C)\, e_1 \xi_2 \xi_3 + (C - A)\, e_2 \xi_3 \xi_1 + (A - B)\, e_3 \xi_1 \xi_2} \qquad (3.8)$$

$$\omega = -\Gamma \frac{(B - C)\, e_1 \xi_2 \xi_3 + (C - A)\, e_2 \xi_3 \xi_1 + (A - B)\, e_3 \xi_1 \xi_2}{(B - C)\, \lambda_1 \xi_2 \xi_3 + (C - A)\, \lambda_2 \xi_3 \xi_1 + (A - B)\, \lambda_3 \xi_1 \xi_2}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}[(B - C)\, e_1 \xi_2 \xi_3 + (C - A)\, e_2 \xi_3 \xi_1 + (A - B)\, e_3 \xi_1 \xi_2]^2 \Gamma + \\ + [(B - C)\, \lambda_1 \xi_2 \xi_3 + (C - A)\, \lambda_2 \xi_3 \xi_1 + (A - B)\, \lambda_3 \xi_1 \xi_2]\, [(\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)\, \xi_1 + \\ + (\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)\, \xi_2 + (\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)\, \xi_3] = 0\end{gathered} \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.9) определяет на единичной сфере (3.7) линию пересечения с этой сферой конуса осей равномерного вращения [1].

Укажем систему координат, которая может оказаться полезной при изучении конуса осей перманентного вращения. Базисные векторы этой системы

$$\mathbf{э}_1 = \frac{\mathbf{e} \times \boldsymbol{\lambda}}{\lambda}, \qquad \mathbf{э}_2 = \mathbf{e}, \qquad \mathbf{э}_3 = \frac{(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{e}}{\lambda}$$

Пусть $\varkappa$ — угол между $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, тогда

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda\, (\mathbf{э}_2 \cos\varkappa + \mathbf{э}_3 \sin\varkappa) \qquad (3.10)$$

Подставим (3.10) и векторы $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{э}_1 + \omega_2 \mathbf{э}_2 + \omega_3 \mathbf{э}_3$, $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{э}_1 + x_2 \mathbf{э}_2 + x_3 \mathbf{э}_3$ (причем $x_i = A_{i1}\omega_1 + A_{i2}\omega_2 + A_{i3}\omega_3$) в (2.1), (2.7)

$$(A_{33} - A_{11})\, \omega_1 \omega_3 + A_{31} (\omega_1^2 - \omega_3^2) + A_{23} \omega_1 \omega_2 - A_{12} \omega_2 \omega_3 - \lambda\omega_1 \sin\varkappa = 0$$

$$\begin{gathered}[(A_{22} - A_{11})\, \omega_1 \omega_2 + A_{21} (\omega_1^2 - \omega_2^2) + A_{23} \omega_1 \omega_3 - A_{12} \omega_2 \omega_3 - \\ - \lambda\omega_1 \cos\varkappa]\, \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} + \Gamma\omega_1 = 0\end{gathered}$$

---

[1] В. Н. Дрофа [5] ввел лишнее для случая $\omega = \mathrm{const}$ требование пропорциональности коэффициентов соответствующих уравнений и поэтому пришел к неверному заключению, что тяжелый гиростат имеет в общем случае лишь одну ось равномерного вращения. Аналогичную ошибку допустил и А. Анчев [6,7].

§ 4. **Особый случай $\omega = \omega e$.** При этом из (1.1) имеем

$$\gamma = \alpha e + \omega (x + \lambda) \tag{4.1}$$

Величина α определяется из (1.2)

$$\alpha^2 + 2\alpha\omega e \cdot (x + \lambda) + \omega^2 (x + \lambda)^2 = \Gamma^2$$

и оказывается постоянной. Поэтому постоянен вектор γ и из (1.1) в этом случае получаем $\gamma = \Gamma e$; вследствие чего (4.1) дает $x + \lambda = \nu e$, или в главных осях

$$\omega A e_1 - \nu e_1 + \lambda_1 = 0 \qquad (ABC,\ 123) \tag{4.2}$$

Исключая ω и ν, находим $I_2 = 0$, где I_2 согласно (3.5).

Это условие в общем случае означает, что равномерное вращение тела вокруг оси, проходящей через центр тяжести, возможно при условии, что вектор λ находится в плоскости, проходящей через ось вращения и нормаль к эллипсоиду инерции, проведенную в точке пересечения его с этой осью. В частности, если центр тяжести находится на одной из главных осей $e_2 = e_3 = 0$, то из (4.2) имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т. е. вектор λ должен быть направлен по той же главной оси. Величина угловой скорости в этом случае может быть любой.

Поступила 4 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полное собр. соч., т. III, ОНТИ, 1936.
2. Харламов П. В. Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Journ. für die reine und angew. Math., 1894, Bd. 113.
5. Дрофа В. Н. О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
6. Анчев А. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
7. Анчев А. Върху перманентните ротации на тежък жиростат. Годишник Минно-геол. ин-т, София, 1961—1962 (1963), т. 8.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин (Москва)

В работе [1] найдены перманентные вращения твердого тела с неподвижной точкой, в силовых полях Д. Н. Горячева. Ниже исследуется устойчивость этих вращений.

1. Положение твердого тела с закрепленной точкой O будем определять относительно неподвижной прямоугольной системы $\xi\eta\zeta$ прямоугольной системой $x_1x_2x_3$, связанной с телом, оси которой x_i имеют направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i. Здесь и в дальнейшем $i = 1, 2, 3$. Проекции угловой скорости на подвижные оси обозначим через p_i, направляющие косинусы перманентной оси — через l_i, а главные моменты инерции тела относительно этих осей — A_i. Рассмотрим твердое тело (у которого $A_1 = A_2 = 2A_3$), находящееся под действием сил, имеющих потенциал

$$U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a(n-1)^{-1} \gamma_3^{1-n} + {}^1\!/_2 b (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 \tag{1.1}$$

что соответствует притяжению четырех точек тела [1] неподвижной плоскостью $\xi\eta$ по указанному закону. В работе [1] показано, что перманентные оси с постоянной угловой скоростью проходят через дуги A_1S_1 и A_2S_2, если n нечетно, и дуги A_1S_1 и и $A_2'S_2'$ — если n четно, сферической кривой, которая получается при пересечении двух поверхностей

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \qquad c_2l_1 - c_1l_2 - 2bl_1l_2 = 0 \tag{1.2}$$

и перпендикулярны плоскости $\xi\eta$ (см. фигуру в работе [1]). Причем точки S_1, S_2 и S_2'