НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА БОЛЬЦА—МАЙЕРА

В. А. Космодемьянский (Москва)

Рассматривается общая задача оптимизации некоторых процессов управления. Предполагается, что функции управления параметрически известным образом, зависят от времени и положения своих точек разрыва первого рода. Положение этих точек находится из условий экстремума некоторого функционала.

Обосновывается применимость необходимых условий вариационного исчисления— правила множителей (п. 2), условий Вейерштрасса (п. 3), Клебша (п. 4) и Якоби (п. 5) — к задачам рассматриваемого типа.

Иллюстрация изложенной теории проводится на элементарном примере прямолинейного движения двухступенчатой ракеты в однородном поле тяжести без учета сопротивления среды (п. 6).

1. Пусть процесс, происходящий в некоторой динамической системе, описывается n обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$g_s = x_s^{\cdot} - f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

и системой r конечных зависимостей

$$\Psi_k = \Psi_k \ (u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \ (k = 1, \ldots, r < m) \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1), (1.2) $x_s(t)$—координаты, определяющие положение системы, а $u_j(t, t_i)$—функции управления, имеющие разрывы первого рода в моменты t_i.

Пусть зависимость $m - r$ функций управления $u_1, \ldots, u_{m-r}$ от t и t_i задана в явном виде.

Координаты системы удовлетворяют p условиям на концах (t_0, T не фиксированы)

$$\varphi_l = \varphi_l\,[t_0, T, x(t_0), x(T)] = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p < 2n + 1) \tag{1.3}$$

Следует определить моменты времени t_i, выбор которых доставит экстремум функционалу вида

$$J = g\,[t_0, x(t_0), T, x(T)] + \int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u)\,dt \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим условие стационарности (правило множителей). Будем считать введенным понятие допустимого семейства (Блисс), а именно, кривые семейства $x(t, b)$ непрерывны и имеют почти всюду, за исключением конечного числа точек t_i, непрерывные производные по аргументу t; непрерывная частная производная от функций рассматриваемого семейства по параметру b существует всюду в области изменения аргументов t и b. Вариациями семейства вдоль кривой E (соответствующей значению параметра $b = 0$) называются величины, определяемые равенствами:

$$\delta t_i(0) = \frac{\partial t_i}{\partial b_\sigma}\,db_\sigma = \xi_{i,\sigma}\,db_\sigma, \qquad \delta x_s = \frac{\partial x_s(t, 0)}{\partial b_\sigma}\,db_\sigma = \eta_{s,\sigma}\,db_\sigma \tag{2.1}$$

$$\delta u_j = \frac{\partial u_j(t, t_i(0))}{\partial b_\sigma}\,db_\sigma = \zeta_{j,\sigma} db_\sigma$$

Здесь b_σ — совокупность параметров $b_1, \ldots, b_s$, $\xi_{i,\sigma}$, $\eta_{s,\sigma}$, $\zeta_{j,\sigma}$—совокупность вариаций, соответствующих параметру b_σ (здесь и в дальнейшем суммирование происходит по индексу, встречающемуся дважды), вариации $\eta_{s,\sigma}(t)$, $\zeta_{j,\sigma}(t)$ вдоль кривой E семейства удовлетворяют уравнениям вариаций вдоль кривой E

$$\delta g_s = \dot{\eta}_{s,\sigma} - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}\eta_{i,\sigma} - \frac{\partial f_s}{\partial u_j}\zeta_{j,\sigma} = 0, \qquad \delta\psi_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial u_j}\zeta_{j,\sigma} = 0 \quad \begin{pmatrix} i=1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, n \\ k=1, \ldots, r; \ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

а также уравнениям вариаций концевых условий

$$\delta\varphi_l = (\varphi_{l,0} + x_{s0}^{\bullet}\,\varphi_{l,\,s0})\,\xi_{0,\sigma} + \varphi_{l,\,s0}\eta_{s,\,\sigma}(t_0) + (\varphi_{l,n} + x_{sn}^{\bullet}\varphi_{l,\,sn})\,\xi_{n,\sigma} + \varphi_{l,sn}\eta_{s,\,\sigma}(T) \quad (2.3)$$

индекс n соответствует значениям параметров, рассматриваемых в момент времени T.

Покажем, что данная кривая E удовлетворяющая уравнениям (1.1), может быть включена в семейство кривых, обладающих свойствами кривой E, т. е. поставленная в п. 1 задача не тривиальна.

Справедлива следующая лемма включения (Блисс).

Пусть допустимая кривая E удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2), а $\xi_{i,\,\sigma}$, $\eta_{s,\,\sigma}(t)$, $\zeta_{j,\,\sigma}(t)$ допустимая совокупность вариаций, удовлетворяющих уравнениям (2.2) вдоль E. Тогда существует допустимое s — параметрическое семейство, содержащее кривую E при значениях параметров $b_\sigma = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ состоящее из кривых, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (1.2) и такое, что для всякого $\sigma = 1, \ldots, s$ величины $\eta_{s,\,\sigma}(t)$, $\zeta_{j,\,\sigma}(t)$ являются вариациями этого семейства вдоль E по параметру b_σ.

Рассмотрим функции $t_i'(b)$ определяемые из равенств

$$t_i(b) = t_i(0) + \frac{\partial t_i}{\partial b_\sigma} b_\sigma \qquad (|\, b_\sigma| < \varepsilon)$$

Если $b_\sigma = 0$, то $t_i(0) = t_i$. Предполагая, что вдоль E соответствующая матрица имеет ранг равный числу уравнений, представим функции управления в виде $u_j = u_j(t, b)$.

Разлагая эти функции в окрестности значения $b = 0$ (т. е. кривой E) по параметру b_σ получим

$$u_j\,[t, t_i(b)] = u_j(t, t_i) + \zeta_{j,\,\sigma} b_\sigma$$

Тогда система дифференциальных уравнений примет вид

$$x_s^{\bullet} - f_s\,[x, u + \zeta\, b, t] = 0$$

Пусть t_1 значение момента времени, соответствующее угловой точке кривой E.

Из теоремы существования следует, что в окрестности $(x_s, t, b = 0)$ имеется решение нормальной системы дифференциальных уравнений, по крайней мере на отрезке $[t_0, t_1]$, которое можно представить в виде $x_s = X_s\,[t, t_0, x(t_0), b]$ с начальной точкой t_0, $x_s(t_0)$. Функции

$$x_s = X_s\,[t, t_1, x(t_1) + b\eta(t_1), b] = x_s(t, b) \quad (2.4)$$

определяют тогда элементарное семейство, кривые которого удовлетворяют уравнениям $g_s = 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$. При $t = t_1$ для функции $x_s(t)$ имеем

$$x_s(t_1, b) = X_s\,[t_1, x(t_1) + b\eta(t_1), b] = x_s(t_1, 0) + b_\sigma\eta_{s,\,\sigma}(t_1)$$

т. е. вариации функций данного семейства $x_{s,\,b}(t, 0)$ вдоль E имеют начальные значения $\eta_{s,\,\sigma}(t_1)$.

Так как функции, определяемые равенствами (2.4), удовлетворяют уравнениям $g_s = 0$, следовательно, $x_{s,\,b}(t, 0)$ удовлетворяют уравнениям $\delta g_s = 0$ и тождественны с вариациями $\eta_{s,\,\sigma}(t)$ так как эти вариации составляют единственное решение уравнений $\delta g_s = 0$ принимающих начальные значения $\eta_{s,\,\sigma}(t)_1$.

Подобным же образом можно построить в интервале (t_1, t_2) новое элементарное семейство, примыкающее к данному, и т. д.

Предположим, что в рассматриваемом отрезке $[t_0, T]$ имеется лишь одна точка t_1, в которой функции управления u_j терпят разрыв.

Функции, значения которых рассматриваются в интервале (t_0, t_1) обозначаются индексом — (например, $x_s^-(t)$, $u_j^-(t)$); функции, значения которых рассматриваются в интервале (t_1, T) обозначаются индексом + (например, $x_s^+(t)$, $u_j^+(t)$ и т. д.).

Вид зависимостей $u_j^{\pm}(t, t_i, T)$, определяемый в каждой конкретной задаче ее условиями, на ход доказательства не влияет, поэтому для определенности положим

$$u_j^- = u_j^-(t, t_0), \qquad u_j^+ = u_j^+(t, t_1)$$

Введем функции L и H равные соответственно

$$L = f^\circ + \lambda_s g_s - \mu_k \Psi_k = \lambda_s x_s^{\boldsymbol{\cdot}} - H$$

$$H = H_\lambda + H_\mu = \lambda_\alpha f_\alpha - \mu_k \psi_k \qquad (\lambda_0 = -1)$$

где $\lambda_s(t)$, $\mu_k(t)$ — множители Лагранжа.

Составляя выражение для первой вариации, выберем множители $\lambda_s^\pm(t)$, $\mu_k^\pm(t)$ такими, чтобы обратились в нуль коэффициенты при $\eta_{s,\sigma}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$; $\zeta_{j,\sigma}(t)$ $(j = m, \; -r + 1, \ldots, m)$; коэффициенты при оставшихся независимых вариациях приравняем нулю. В результате получим:

Уравнения, которым удовлетворяют экстремали

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_s^\pm} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\partial L}{\partial \mu_k^\pm} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.5}$$

Дифференциальные уравнения для определения $\lambda_s^\pm(t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_s^{\boldsymbol{\cdot}\pm}} - \frac{\partial L}{\partial x_s^\pm} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

конечные уравнения для определения $\mu_k^\pm(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j^\pm} = 0 \qquad (j = m - r + 1, \ldots, m) \tag{2.7}$$

краевые условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s^+(T)} + \lambda_s(T) = 0, \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial x_s(t_0)} + \lambda_s(t_0) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_s(T)} x_s^{\boldsymbol{\cdot}}(T) + f^\circ(T) = 0 \qquad (\Phi = g + \rho_l \varphi_l)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t_0} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_s(t_0)} x_s^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0) + f^\circ(T) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t_0} dt = 0 \tag{2.9}$$

Условия, аналогичные условиям Вейерштрасса — Эрдмана

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_s^{\boldsymbol{\cdot}}}\right)_{t_1 - 0} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_s^{\boldsymbol{\cdot}}}\right)_{t_1 + 0}, \qquad (H_\lambda)_{t_1 - 0} - (H_\lambda)_{t_1 + 0} + \int_{t_1}^{T} \frac{\partial H}{\partial t_1} dt = 0 \tag{2.10}$$

Итак, получены: $2n$/дифференциальных уравнений первого порядка (2.6) для определения множителей $\lambda_s^\pm(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$; $2r$ соотношений (2.7) для определения $\mu_k^\pm(t)$ $(k = 1, \ldots, r)$; кроме того, имеем $2n$ дифференциальных уравнений (2.5) для определения $x_s^\pm(t)$ $(s = 1, \ldots n)$.

Неизвестными величинами пока будут: $4n$ произвольных постоянных, полученных от решения соответствующих дифференциальных уравнений первого порядка (2.5) и (2.6), величины t_0, t_1, T, а также p множителей ρ_l всего $4n + p + 3$ величин.

Для определения этих неизвестных имеем $2n$ краевых условий (2.8); n — условий непрерывности множителей $\lambda_s(t)$ уравнения (2.10); n — условий непрерывности координат в точке t_1 $x_s^-(t_1) = x_s^+(t_1)$ и p соотношений (1.3); три уравнения (2.9), (2.10); всего $4n + p + 3$ величин.

Уравнения (2.5) — (2.10) уравнения определяющие условия стационарности функционала J данной вариационной задачи.

3. Для рассматриваемого типа задач имеет место необходимое условие Вейерштрасса, которое формулируется следующим образом [3].

Допустимая кривая E удовлетворяющая системе уравнений (1.1) и условиям стационарности с множителями $\lambda_0 = -1$, $\lambda_s(t)$ удовлетворяет необходимому условию

Вейерштрасса с этими множителями, если для всякого элемента $(t, x, x^{\cdot}, u, \lambda, \mu)$ кривой E выполняется неравенство

$$E = L(x, X^{\cdot}, U, \lambda, \mu, t) - L(x, x^{\cdot}, u, \lambda, \mu, t) - \frac{\partial L}{\partial x_s^{\cdot}}(X_s^{\cdot} - x_s^{\cdot}) \geqslant 0 \qquad (3.1)$$

при всевозможных допустимых $(x^{\cdot}, u, \lambda, \mu) \neq (X^{\cdot}, U, \lambda, \mu)$ удовлетворяющих системам (1.1), (1.2).

Используя нормальность основной системы дифференциальных уравнений, представим функцию Вейерштрасса в виде

$$E = H(x, u, \lambda, \mu, t) - H(x, U, \lambda, \mu, t)$$

т. е. необходимое условие сильного минимума влечет за собой неравенство

$$H(x, u, \lambda, \mu, t) \geqslant H(x, H, \lambda, \mu, t) \qquad (3.2)$$

Доказательство теоремы совпадает с доказательством аналогичной теоремы, проведенным в работах [2, 3].

4. Пусть управление U_k и производные от координат $X_s^{\cdot}$ отличаются от u_k и $x_s^{\cdot}$ на малые величины

$$U_k = u_k + \delta u_k, \qquad X_s^{\cdot} = x_s^{\cdot} + \delta x_s^{\cdot} \qquad (4.1)$$

где δu_k, $\delta x_s^{\cdot}$ удовлетворяют уравнениям вариаций вдоль E:

$$\eta_{s,\sigma}^{\cdot} - \frac{\partial f_s}{\partial u_j}\zeta_{j,\sigma} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_k}{\partial u_j}\zeta_{j,\sigma} = 0 \qquad (4.2)$$

Подставив (4.1) в неравенство (3.2) и разлагая E по степеням δu_k, $\delta x_s^{\cdot}$ получим

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\delta u_\alpha \delta u_\beta \leqslant 0 \qquad (4.3)$$

Таким образом, необходимое условие Клебша формулируется в виде: «Допустимая кривая E удовлетворяющая уравнениям $g_s = 0$, $\psi_k = 0$ и правилу множителей, удовлетворяет необходимому условию Клебша с этими множителями, если для всякого элемента кривой $(t, x, x^{\cdot}, u, \lambda, \mu) \in E$ выполнено неравенство (4.3) для любых δu_k, δu_β удовлетворяющих уравнениям в вариациях (4.2).

5. Считаем по-прежнему, что рассматриваемая кривая E содержится в s — параметрическом семействе и удовлетворяет правилу множителей, т. е. $x_s = x_s^{\bullet}(t, b)$ $(|b| < \varepsilon)$. Представим первый дифференциал от J в виде

$$\Delta I = \Delta\Phi + [L(t_1 - 0) - L(t_1 + 0)]\delta t_1 + L(T)\delta T - L(t_0)\delta t_0 +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s^-}\delta x_s^- + \frac{\partial L}{\partial x_s^{\cdot -}}\delta x_s^{\cdot -} + \frac{\partial L}{\partial u_\beta^-}\delta u_\beta^-\right]dt +$$
$$+ \int_{t_1}^{T}\left[\frac{\partial L}{\partial x_s^+}\delta x_s^+ + \frac{\partial L}{\partial x_s^{\cdot +}}\delta x_s^{\cdot +} + \frac{\partial L}{\delta u_\beta^+}\delta u_\beta^+\right]dt$$

Рассматривая последнее выражение как сложную функцию от параметра b находим второй дифференциал в виде

$$\Delta^2 I = \Delta\varphi + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial t} - x_\alpha^{\cdot}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{\cdot}}\right)\delta t^2 + 2\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha \delta t + 2\frac{\partial L}{\partial u_j}\delta u_j \delta t\right]_{t_0}^{T} +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial t} - x_\alpha^{\cdot}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{\cdot}}\right)\delta t^2 + 2\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha \delta t + 2\frac{\partial L}{\partial u_j}\delta u_j \delta t\right]_{t_1+0}^{t_1-0} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[2\omega^- + \frac{\partial L}{\partial u_\beta^-}\frac{\partial^2 u_\beta^-}{\partial t_0^2}\delta t_0^2\right]dt + \int_{t_1}^{T}\left[2\omega^+ + \frac{\partial L}{\partial u_\beta^+}\frac{\partial^2 u_\beta^+}{\partial t_1^2}\delta t_1^2\right]dt \qquad (5.1)$$

где

$$\Delta x_\alpha = x_\alpha^{\cdot}\delta t + \delta x_\alpha, \qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha\,\delta t + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\delta t^2$$

$$-2\omega = \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\delta x_\alpha \delta x_\beta + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial u_\beta}\delta x_\alpha \delta u_\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_\beta}\delta u_k \delta u_\beta$$

$$(t = t_0,\ T,\ t_1 - 0,\ t_1 + 0)$$

Выражение (5.1) должно быть неотрицательным при любых допустимых совокупностях вариаций, удовлетворяющих уравнениям в вариациях (2.2) вдоль E.

Таким образом, установлена возможность применения четвертого необходимого условия к задачам рассматриваемого типа, которое гласит:

«Кривая E с множителями $\lambda_0 = -1$, $\lambda_s(t)$ удовлетворяет четвертому необходимому условию минимума, если вторая вариация $\Delta^2 I$ (5.1) вдоль E неотрицательна».

Условие неотрицательности второй вариации можно получить, переходя к решению присоединенной задачи о минимуме второй вариации [2, 3].

6. Проиллюстрируем изложенную выше теорию на примере прямолинейного движения двухступенчатой ракеты в однородном поле тяжести без учета сопротивления среды. Уравнение движения имеет вид

$$v^{\cdot} = -V^r\frac{u^{\cdot}}{u} - g \tag{6.1}$$

где v — скорость составной ракеты, g — ускорение силы тяжести, V^r — относительная скорость отбрасываемых частиц, u — безразмерная масса составной ракеты, равная $u = m/m_0$, m — масса с. р. меняющаяся по линейному закону, m_0 — стартовый вес.

Оптимальный момент t_1 разбиения составной двухступенчатой ракеты, выбор которого обеспечит максимум v в конце активного участка, найдется из соотношения

$$\beta_1 V_1^r u_1 u_{2-} = \beta_2 V_2^r u_2 u_{1-}, \qquad (\beta_i \text{ — секундный расход топлива})$$

$$u_1 = u(t_1 + 0), \qquad u_{2-} = u(T - 0), \quad u_2 = u(T + 0), \qquad u_{1-} = u(t_1 - 0)$$

Значение $\lambda(t) = -1$, следовательно функция H равна:

$$H = -\left(\frac{\beta V^r}{u} - g\right)$$

Для рассматриваемой вариационной задачи проверим выполнение всех необходимых условий вдоль предполагаемой экстремали E_2, которая находится как решение уравнения (6.1). Неравенство Вейерштрасса (3.2) дает

$$-\frac{\beta_1 V_1^r}{u_{1-}} \geqslant -\frac{\beta_2 V_2^r}{u_1}, \qquad v^{\cdot}(t_1 - 0) \leqslant v^{\cdot}(t_1 + 0) \tag{6.2}$$

т. е. двигатель двухступенчатой ракеты должен в любой момент времени сообщать ракете не меньшее ускорение, чем то, которое одноступенчатая ракета получала бы в те же моменты времени от своего двигателя.

Сравнивая E_2 с решением, которое получится для трехступенчатой ракеты, приходим к аналогичному (6.2) неравенству.

Неравенство Вейерштрасса позволяет установить, что однородная ракета с n числом ступеней будет давать максимальную скорость большую, чем ракета с $k < n$ ступенями. Легко проверить, что необходимые условия Клебша и Якоби вдоль E_2 реализуемой двухступенчатой однородной ракетой не выполнены.

Поступила 9 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодемьянский В. А. Об одном типе вариационных задач. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
2. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, т. 26, 1962, вып. 1.
3. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. Изд-во иностр. литер., 1950.