К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. А. Балаева (Москва)

В монографии [1] предлагается метод определения положения нелинейной системы в фазовом пространстве. Ниже дается один из возможных приближенных способов решения нелинейных интегральных уравнений, полученных в работе [1].

Представим уравнения движения управляемой системы в виде

$$z_j^{\cdot} + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\, z_k = X_j(t) + \psi_j(z_1, \ldots, z_r, t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

Здесь z_j — фазовые координаты системы, $X_j(t)$ — известные внешние силы, $\psi_j(z_1, \ldots, z_r, t)$ — нелинейные функции, непрерывные по всем своим аргументам в некоторой области и удовлетворяющие в этой области условиям Липшица относительно $z_1, \ldots, z_r$.

В работе [1] рассматривается метод определения начальных значений всех фазовых координат системы по наблюдаемым приращениям одной или нескольких координат. Пусть доступна измерению одна координата z_s. Обозначая через $S(t)$ отклонения координаты z_s относительно некоторого произвольного, но фиксированного начала отсчета, получим

$$z_s(t_j) - z_s(t_0) = S(t_j) - S(t_0) = L_j \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2}$$

Здесь $t_0, t_1, \ldots, t_r$ — некоторые моменты времени.

Системе уравнений (1) эквивалентна система интегральных уравнений

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\, z_k(t_0) + g_j(t) + I_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

$$g_j(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, \tau)\, X_k(\tau)\, d\tau, \qquad I_j(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, \tau)\, \psi_k[z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau]\, d\tau \tag{3}$$

Здесь $N_{jk}(t, \tau)$ — элементы матричной функции веса для системы

$$z_j^{\cdot} + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\, z_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Подставляя в (2) выражения (3) для $z_s(t_j)$, получим

$$\sum_{k=1}^{r} b_{jk} z_k(t_0) = L_j - g_s(t_j) - I_s(t_j), \quad b_{jk} = N_{sk}(t_j, t_0) - N_{sk}(t_0, t_0) \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{4}$$

Разрешая систему (4) относительно $z_k(t_0)$, найдем

$$z_k(t_0) = \gamma_k - \sum_{\nu=1}^{r} m_{k\nu} I_s(t_\nu), \qquad \gamma_k = \sum_{\nu=1}^{r} m_{k\nu}\, [L_\nu - g_s(t_\nu)] \tag{5}$$

Здесь $m = \| m_{jk} \|$ — матрица, обратная для матрицы $b = \| b_{jk} \|$. Подставляя в (3) вместо $z_k(t_0)$ их выражения из (5), получим [1] систему интегральных уравнений

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\, \gamma_k + g_j(t) - \sum_{k=1}^{r} R_{jk}(t)\, I_s(t_k) + I_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

$$R_{jk}(t) = \sum_{\nu=1}^{r} N_{j\nu}(t, t_0)\, m_{\nu k} \tag{6}$$

Здесь $g_j(t)$ и $I_j(t)$ определяются выражениями (3).

В случае, когда все нелинейные функции $\psi_j(z_1, \ldots, z_r, t)$ зависят только от одной координаты z_s

$$\psi_j(z_1, \ldots, z_r, t) = \psi_j(z_s, t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

будем иметь одно интегральное уравнение

$$z_s(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{sk}(t, t_0)\,\gamma_k + g_s(t) - \sum_{k=1}^{r} R_{sk}(t)\, I_s(t_k) + I_s(t) \tag{8}$$

где согласно (3) и (7)

$$I_s(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} N_{sk}(t, \tau)\,\psi_k\,[z_s(\tau), \tau]\, d\tau \tag{9}$$

Далее нам потребуется решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_j^{\bullet} + \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(t)\, y_k = X_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

при начальных условиях $y_j(t_0) = \gamma_j$. Это решение имеет вид

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)\,\gamma_k + g_j(t)$$

где $g_j(t)$ определяются по формулам (3). Учитывая, что матрица m является обратной для матрицы b, можно, в соответствии с (4) и (5), получить соотношения

$$y_s(t_j) - y_s(t_0) = \sum_{k=1}^{r} b_{jk}\gamma_k + g_s(t_j) = \sum_{k,\,\nu=1}^{r} b_{jk} m_{k\nu}\,[L_\nu - g_s(t_\nu)] + g_s(t_j) = L_j \tag{10}$$

Рассматривая разности

$$u(t) = z_s(t) - z_s(t_0), \qquad v(t) = y_s(t) - y_s(t_0) \tag{11}$$

согласно (2) и (10), будем иметь

$$u(t_j) = v(t_j) = L_j, \quad z_s(t_j) = v(t_j) + z_s(t_0) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{12}$$

Принимая во внимание соотношения (12), можно нелинейное интегральное уравнение (8) решить приближенным способом. А именно, учитывая (12), будем считать, что

$$z_s(t) \approx v(t) + z_s(t_0) \quad \text{при } t \in [t_0, t_r] \tag{13}$$

и, согласно (9),

$$I_s(t) \approx c\,[z_s(t_0), t] = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} N_{sk}(t, \tau)\,\psi_k\,[v(\tau) + z_s(t_0), \tau]\, d\tau \tag{14}$$

Это приближение тем точнее, чем меньше интервал $[t_0, t_r]$.

Подставим в (8) приближенные значения $z_s(t)$ и $I_s(t)$ согласно (13) и (14). Тогда, полагая $t = t^* \in [t_0, t_r]$ и заменяя $z_s(t_0)$ через Z, получим для Z уравнение

$$Z = \gamma_s - \sum_{k=1}^{r} R_{sk}(t^*)\, c\,(Z, t_k) + c\,(Z, t^*) \tag{15}$$

Из (15) следует, что погрешность $\varepsilon(t^*) = Z(t^*) - z_s(t_0)$ будет функцией от t^*. Докажем, что во всех точках $t^* = t_j$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ эта погрешность имеет одно и то же значение

$$\varepsilon(t_j) = Z(t_j) - z_s(t_0) = \varepsilon \qquad (j = 0, 1, \ldots, r)$$

Для этого покажем, что все $r + 1$ соотношения, которые получаем из (15) при $t^* = t_j$, эквивалентны одному и тому же соотношению

$$Z = \gamma_s - \sum_{k=1}^{r} m_{sk}\, c\,(Z, t_k) \tag{16}$$

Справедливость последнего утверждения следует из формулы

$$R_{sk}(t_j) = \begin{cases} m_{sk} + 1 & j = k \\ m_{sk} & j \neq k \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots, r \\ k = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{17}$$

которую можно получить так: подставляя в (2) выражение (8) для $z_s(t_j)$, имеем

$$L_j = \sum_{k=1}^{r} b_{jk}\gamma_k - \sum_{k=1}^{r} \rho_{jk} I_s(t_k) + I_s(t_j) + g_s(t_j) \qquad (j = 1, \ldots, r)$$
$$\rho_{jk} = R_{sk}(t_j) - R_{sk}(t_0) \tag{18}$$

Вводя матрицы

$$I = \begin{Vmatrix} I_s(t_1) \\ \vdots \\ I_s(t_r) \end{Vmatrix}, \quad g = \begin{Vmatrix} g_s(t_1) \\ \vdots \\ g_s(t_r) \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_r \end{Vmatrix}, \quad \gamma = \begin{Vmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} \rho = \|\rho_{jk}\| \\ b = \|b_{jk}\| \\ m = \|m_{jk}\| \end{matrix} \qquad (j, k = 1, \ldots, r)$$

представим соотношения (18) и (5) в матричном виде

$$L = b\gamma - \rho I + I + g, \qquad \gamma = m(L - g) \tag{19}$$

Учитывая, что $m = b^{-1}$, легко видеть из (19), что $(-\rho + E)\, I = 0$. Следовательно $\rho = E$, где E — единичная матрица порядка $(r \times r)$. Теперь из (18) и (6) следует справедливость соотношений (17). Из изложенного следует, что для получения приближенного значения $z_s(t_0)$ целесообразно пользоваться уравнением (16), которое получается из (15) при $t^* = t_j (j = 0, 1, \ldots, r)$.

После того как из уравнения (16) найдено $Z \approx z_s(t_0)$, начальные значения остальных координат $z_j(t_0)$ определяются согласно (5) и (14) по формулам

$$z_j(t_0) \approx \gamma_j - \sum_{k=1}^{r} m_{jk}\, c(Z, t_k) \qquad (j = 1, \ldots, r; \quad j \neq s) \tag{20}$$

Если в уравнениях (1) имеются нелинейные функции, зависящие от нескольких координат z_{p_k}, то для применения рассмотренного выше способа необходимо иметь в системе соответствующие приращения $S_{p_k}(t_j) - S_{p_k}(t_0)$ по всем этим координатам, так как только в этом случае можно пользоваться приближениями, аналогичными (13).

В качестве примера рассмотрим задачу об определении начальных значений обобщенных координат гироскопического компаса с нелинейной восстанавливающей силой, рассмотренную в работе [1]. Уравнения движения системы имеют вид

$$z_j^{\bullet} + a_{j1}z_1 + a_{j2}z_2 + a_{j3}z_3 = \psi_j(z_1) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{21}$$

$$z_1 = \alpha, \qquad z_2 = \beta - \frac{HU \sin\varphi}{\rho l P}, \qquad z_3 = \vartheta + \frac{HU \sin\varphi}{\rho l P}$$

$$k^2 = \frac{lPU\cos\varphi}{H}, \qquad \psi_2(z_1) = -\zeta z_1^3, \qquad \psi_1(z_1) = \psi_3(z_1) = 0$$

Матрица коэффициентов a_{jk} имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0, & -k^2/U\cos\varphi, & -k^2(1-\rho)\,/\,U\cos\varphi \\ U\cos\varphi, & 0, & 0 \\ 0, & F, & F \end{Vmatrix} \tag{22}$$

Здесь α — угол поворота гирокомпаса в азимуте, β — угол подъема северного диаметра гиросферы над плоскостью горизонта, ϑ — угол наклона зеркала жидкости гидравлического успокоителя над плоскостью экватора гиросферы, H — кинетический момент, lP — статический момент чувствительного элемента, ρ, F — параметры гидравлического успокоителя, $\psi_2(z_1)$ — нелинейная восстанавливающая сила, U — угловая скорость вращения земного шара, φ — широта места наблюдения. В качестве координаты, по которой ведутся измерения приращений L_j, выберем отклонение гирокомпаса в азимуте относительно некоторого произвольного, но фиксированного начала отсчета

$$L_j = S(t_j) - S(t_0) = z_1(t_j) - z_1(t_0) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{23}$$

где t_0, t_1, t_2, t_3 — некоторые моменты времени. Уравнение (16) принимает вид

$$Z = \gamma_1 - \sum_{k=1}^{3} m_{1k}\, c(Z, t_k), \quad \gamma_j = \sum_{k=1}^{3} m_{jk} L_k$$

$$\| m_{jk} \| = \| b_{jk} \|^{-1}, \quad b_{jk} = N_{1k}(t_j, t_0) - N_{1k}(t_0, t_0) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{24}$$

$$c(Z, t) = \int_{t_0}^{t} N_{12}(t, \tau)\, \psi_2 [v(\tau) + Z]\, d\tau, \qquad v(t) = \sum_{k=1}^{3} N_{1k}(t, t_0)\, \gamma_k - \gamma_1$$

Здесь $N_{jk}(t, \tau)$ — элементы матричной функции веса системы (21) при $\psi_2(z_1) = 0$. Учитывая вид нелинейной функции $\psi_2(z_1)$, представим уравнение (24) в виде

$$a_0 Z^3 + 3a_1 Z^2 + (3a_2 - 1) Z + a_3 + \gamma_1 = 0$$

$$a_\nu = \zeta \sum_{k=1}^{3} m_{1k} \omega_{k\nu}, \quad \omega_{k\nu} = \int_{t_0}^{t_k} N_{12}(t_k, \tau)\, v^\nu(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{25}$$

После определения $Z \approx z_1(t_0)$ из уравнения (25) величины $z_2(t_0)$ и $z_3(t_0)$ определяются по формуле (20), которая для данной задачи принимает вид

$$z_j(t_0) \approx \gamma_j + \zeta \sum_{k=1}^{3} m_{jk} (\omega_{k0} Z^3 + 3\omega_{k1} Z^2 + 3\omega_{k2} Z + \omega_{k3}) \qquad (j = 2, 3) \tag{26}$$

Величины $N_{1k}(t, t_0)$ и $\omega_{k\nu}$ могут быть вычислены на вычислительной машине путем интегрирования при различных начальных условиях и правых частях следующей системы дифференциальных уравнений (27)

$$y_j^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} a_{jk} y_k = 0, \quad x_{j\nu}^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} a_{jk} x_{k\nu} = \varepsilon_j (y_1 - \gamma_1)^\nu \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 1 \\ \varepsilon_3 = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3 \\ \nu = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы (27) имеет вид (28)

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{3} N_{jk}(t, t_0)\, y_k(t_0), \qquad x_{j\nu} = \sum_{k=1}^{3} N_{jk}(t, t_0)\, x_{k\nu}(t_0) + \int_{t_0}^{t} N_{j2}(t, \tau) [y_1(\tau) - \gamma_1]^\nu d\tau$$

Из (25), (24) и (28) вытекают соотношения

$$N_{1k}(t, t_0) = y_1(t) \quad \text{при } y_j(t_0) = 0, \quad j \neq k, \quad y_k(t_0) = 1$$

$$\omega_{k\nu} = x_{1\nu}(t_k) \quad \text{при } y_j(t_0) = \gamma_j, \quad x_{j\nu}(t_0) = 0 \tag{29}$$

Вычисления были проведены для следующих значений параметров системы:

$k^2 = 1.53921 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-2}$, $\quad \rho = 0.38, \quad F = 1.5 \cdot 10^{-3}$ *сек*$^{-2}$, $\quad \zeta = 0.4 \cdot 10^{-3}$ *сек*$^{-1}$

$U \cos \varphi = 4.11368 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, $\quad t_0 = 0, \quad t_1 = 150$ *сек*, $\quad t_2 = 300$ *сек*, $\quad t_3 = 450$ *сек*

Величины L_j, определяемые согласно (23), были найдены путем интегрирования системы (21) при начальных условиях $z_1(0) = 0.3$, $z_2(0) = 0.004$, $z_3(0) = 0.004$.

Коэффициенты a_ν вычислялись согласно (25) и (29) путем интегрирования системы (27) на вычислительной машине. При этом уравнение (25) оказалось следующим:

$$9.723656 Z^3 + 0.212817 Z^2 + 0.998616 Z - 0.581265 = 0 \tag{30}$$

Уравнение (30) имеет решение: $Z = 0.299997$; два других корня комплексные.

Приближенные начальные значения фазовых координат, полученные в результате решения уравнения (30) и по формулам (26), будут следующими:

$$z_1(0) \approx 0.299997, \quad z_2(0) \approx 0.004001, \quad z_3(0) \approx 0.003998 \tag{31}$$

Величины (31) достаточно близки к принятым начальным значениям.

Поступила 30 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи управления движением. Физматгиз, 1963.