Здесь $S(x)$ и $C(x)$ — интегралы Френеля, $\mathrm{si}(x)$ и $\mathrm{ci}(x)$ — интегральные синус и косинус.

Для очень узких импульсов ($\varepsilon \to 0$) формула (3.5) дает

$$p_1(0) = W_1^0 p(0) - \frac{\psi_0 a_0 Y^2}{2a\sqrt{\eta}} \sqrt{1/_2 \pi p(0)} \tag{3.6}$$

При $\beta\varepsilon \gg 1$ из (3.4) имеем

$$p_1(0) = V_1 p(0) + \frac{a\sqrt{2\pi\eta}\,Y^2 \cos\theta_1}{8a_0 \sin^2\varphi} p^{3/2}(0) \tag{3.7}$$

Зависимость коэффициентов W_2, W_3 и W_4 от частоты такая же, как и у W_1. Поэтому для второго отраженного импульса и импульсов, прошедших в упругую среду, имеют место формулы, аналогичные (3.3) — (3.7).

Поступила 15 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Косачевский Л. Я. Об отражении магнитозвуковых волн. ПММ, 1962 т. 26, вып. 5.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
3. Baños A. Normal modes characterizing magnetoelastic plane waves, Phys. Rev., 1956, vol. 104, № 2.
4. Кейлис-Борок В. И., Монин А. С. Магнитоупругие волны и граница земного ядра. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1959, 11.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
6. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СТЫКЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНЬЕВ

С. С. Калмыкова (Харьков)

Рассмотрим прямоугольный клин ($x > 0$, $z > 0$), заполненный анизотропным диэлектриком ($\varepsilon_x = \varepsilon_\perp$, $\varepsilon_z = \varepsilon_\parallel$) и граничащий с идеально проводящим прямоугольным клином ($x > 0$, $z < 0$). Со стороны полупространства $x < 0$ (вакуум), под углом φ_0 к поверхности идеально проводящего клина ($x = 0$, $z < 0$) падает (индекс $\to$) плоская волна с компонентами

$$H_y^{\to} = \exp[ikz\cos\varphi_0 + ikx\sin\varphi_0]$$
$$E_z^{\to} = -\sin\varphi_0 \exp[ikz\cos\varphi_0 + ikx\sin\varphi_0], \qquad k = \omega/c, \qquad \operatorname{Im} k > 0 \tag{1}$$

Найдем уравнение, определяющее поля, рассеянные на границе клиньев. Полное поле в области $x < 0$, $-\infty < z < \infty$ представим в виде суммы падающей и отраженной волн (индекс $\leftarrow$) (решение, соответствующее идеально проводящему полупространству) плюс затухающее от стыка клиньев ($z = 0$) поле, которое будем искать в виде интеграла плоских волн [1, 2]

$$H_y^{\leftarrow}(x<0) = \exp[ikz\cos\varphi_0 - ikx\sin\varphi_0], \quad H_y^* = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{i\tau z + vx}\, d\tau \tag{2}$$

$$E_z^{\leftarrow} = \sin\varphi_0 \exp[ikz\cos\varphi_0 - ikx\sin\varphi_0], \quad E_z^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} h(\tau)\, e^{i\tau z + vx}\, d\tau$$

$$v = (\tau^2 - k^2)^{1/2}$$

(Амплитуда и фаза рассеянной волны (индекс *) обеспечивают при $z \to -\infty$, когда рассеянное поле равно нулю, выполнение граничного условия $E_z^{\to} + E_z^{\leftarrow} = 0$ при $x = 0$.)

Рассеянное поле в диэлектрическом клине также представили в виде суперпозиции плоских волн

$$\mathbf{H}_y^* = \int_{-\infty}^{+\infty} H^\circ(\tau)\, e^{i\tau z - \beta x} d\tau, \qquad \beta = \left[\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}(\tau^2 - k^2\varepsilon_{\perp})\right]^{1/2}$$

$$\mathbf{E}_z^* = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta}{k\varepsilon_{\parallel}} H^\circ(\tau)\, e^{i\tau z - \beta x} d\tau, \qquad \mathbf{E}_x^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{k\varepsilon_{\perp}} H^\circ(\tau)\, e^{i\tau z - \beta x} d\tau \tag{3}$$

Поля (1) — (3) удовлетворяют уравнениям Максвелла. Требуя выполнения граничных условий, получили уравнения для определения неизвестных функций $h(\tau)$ и $H^\circ(\tau)$. Эти граничные условия заключаются в непрерывности полных полей на поверхности $x = 0$, $z > 0$, а также в требовании обращения в нуль тангенциальных компонент рассеянного электрического поля на гранях идеально проводящего клина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H^\circ(\tau) - h(\tau)]\, e^{i\tau z}\, d\tau = 2 \exp(ikz\cos\varphi_0), \qquad z > 0, \quad x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Z_1(\tau) H^\circ(\tau) + Z_2(\tau) h(\tau)]\, e^{i\tau z}\, d\tau = 0 \tag{4}$$

$$\left(Z_1(\tau) = \frac{i\beta}{k\varepsilon_{\parallel}}, \qquad Z_2(\tau) = -\frac{iv}{k}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_2(\tau)\, h(\tau)\, e^{i\tau z}\, d\tau = 0, \qquad z < 0, \quad x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\tau}{k\varepsilon_{\perp}} H^\circ(\tau)\, e^{-\beta x} d\tau = 0, \qquad z = 0, \quad x > 0 \tag{5}$$

Воспользовавшись леммой Рапопорта [3], можно из условий (4) выразить $h(\tau)$ и $H^\circ(\tau)$ через граничные значения на контуре $\operatorname{Im}\tau = 0$ функций, аналитичных в верхней (индекс $+$) и нижней ($-$) полуплоскостях комплексной переменной τ

$$h(\tau) = \frac{1}{Z_2(\tau)}\, \xi^-(\tau)$$

$$H^\circ(\tau) = \frac{1}{Z_1(\tau)}\, [\psi^+(\tau) - \xi^-(\tau)] \tag{6}$$

$$H^\circ(\tau) - h(\tau) = \varphi^+(\tau) + \frac{1}{\pi i(\tau - k\cos\varphi_0)}$$

Исключая $h(\tau)$ и $H^\circ(\tau)$ из (6), получим граничную задачу

$$\varphi^+(\tau) = \frac{1}{Z_1(\tau)}\, \psi^+(\tau) - \frac{\Delta(\tau)}{Z_1 Z_2}\, \xi^-(\tau) - \frac{1}{\pi i(\tau - k\cos\varphi_0)}, \qquad \Delta = Z_1 + Z_2 \tag{7}$$

Эта граничная задача содержит три неизвестные функции. Связь между двумя из них можно получить из условия (5), которое требует четности функции $H^\circ(\tau)$

$$\psi^+(\tau) + \xi^-(-\tau) = \xi^-(\tau) + \psi^+(-\tau) \tag{8}$$

Условие Зоммерфельда [1, 4], заключающееся в требовании конечности поля H_y вблизи края $z = 0$, $x = 0$ проводящего клина, обращает в нуль левую и правую части

(8). Поэтому имеем

$$\varphi^{+}(\tau)=-\frac{1}{Z_1(\tau)}\xi^{-}(-\tau)-\frac{\Delta(\tau)}{Z_1(\tau)Z_2(\tau)}\xi^{-}(\tau)-\frac{1}{\pi i(\tau-k\cos\varphi_0)} \tag{9}$$

Соотношение типа (9) для задачи об идеально проводящей полубесконечной полосе конечной толщины в волноводе с однородным заполнением и идеально проводящими стенками впервые было получено Джонсом [5], который также указал способ сведения такого соотношения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (при условии, что коэффициенты в задаче есть целые функции).

Покажем, что соотношение (9) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Прежде всего заметим, что соотношение типа (9) эквивалентно системе из двух граничных задач для двух кусочно-непрерывных функций (второе соотношение можно получить заменой τ на $-\tau$). Учитывая, что коэффициенты в (9) являются четными функциями τ, получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}+\frac{Z_1(\tau)Z_2(\tau)}{2\Delta(\tau)\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{Z_2(\tau')}-\frac{1}{Z_2(\tau)}\right]\frac{\xi(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}=$$
$$=-\frac{2Z_1(\tau)Z_2(\tau)k\cos\varphi_0}{\Delta(\tau)\pi i(\tau^2-k^2\cos^2\varphi_0)} \tag{10}$$

где

$$\xi(\tau)=\xi^{-}(-\tau)-\xi^{-}(\tau),\qquad \xi^{-}(-\tau)+\xi^{-}(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi\frac{(\tau')\,d\tau'}{\tau'-\tau}$$

Таким образом, задача дифракции плоской волны на стыке идеально проводящего и анизотропного диэлектрического прямоугольных клиньев сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Уравнение (10) может быть исследовано на основе хорошо известной теории таких уравнений (см., например, монографию Н. И. Мусхелишвили [6]).

Так как $\operatorname{Im} k\neq 0$, то $\Delta(\tau)$ не обращается в нуль на вещественной оси. Индекс этого уравнения равен нулю. Поэтому уравнение (10) эквивалентно следующему уравнению Фредгольма

$$\xi(\tau)=-\frac{2k\cos\varphi_0}{(\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z_1(\tau')Z_2(\tau')\,d\tau'}{\Delta(\tau')(\tau'^2-k^2\cos^2\varphi_0)(\tau'-\tau)}-$$
$$-\frac{1}{2(\pi i)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z_1(\tau')Z_2(\tau')\,d\tau'}{\Delta(\tau')(\tau'-\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{Z_2(u)}-\frac{1}{Z_2(\tau')}\right]\frac{\xi(u)\,du}{u-\tau'} \tag{11}$$

Последнее уравнение можно решить численно, а при наличии малого параметра (например, $|\varepsilon_0|^{-1}\ll 1$) — методом последовательных приближений.

Автор благодарит В. П. Шестопалова за постоянный интерес и помощь в работе, а также В. И. Курилко за предложенную тему.

Поступила 7 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоммерфельд А. Оптика. Изд. иностр. лит., 1953.
2. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Изд. «Советское радио», 1953.
3. Рапопорт И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, стр. 1403.
4. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
5. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.