ОДНО ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М. Э. Эглит (Москва)

1°. Рассмотрим сплошную среду, в которой свободная энергия F и другие термодинамические потенциалы (внутренняя энергия U, энтропия S и т. д.) являются функциями системы параметров

$$T, \quad \rho, \quad g^{ij}, \quad \nabla_i\rho, \quad n_i, \quad \nabla_j n_i \tag{1}$$

Здесь T — температура, ρ — плотность, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора в лагранжевой системе координат ξ^i в рассматриваемый момент времени, $\nabla_i\rho$ — компоненты вектора grad ρ в системе ξ^i; n_i — компоненты некоторого вектора (например, вектора, характеризующего анизотропию среды [1]), а $\nabla_j n_i$ — компоненты градиента этого вектора.

Такую среду можно рассматривать как обобщение модели сжимаемой анизотропной жидкости. Упругие среды такого типа вводились в [2,3].

Предположим еще, что для всех процессов в рассматриваемой среде

$$dq^{(e)} = TdS \qquad (dq^{(e)} \text{ — внешний приток тепла}) \tag{2}$$

2°. Легко убедиться, что если свободная энергия F зависит от $\nabla_i\rho$ и $\nabla_j n_i$, то уравнение первого закона термодинамики для элементарной частицы среды нельзя писать в классической форме

$$dE + dU = dA^{(e)} + dq^{(e)} \tag{3}$$

Здесь E — кинетическая энергия, $dA^{(e)}$ — элементарная работа внешних сил.

В самом деле, из (3) с учетом (2) и в предположении, что тензор напряжений p^{ij} симметричен, получим уравнение притока тепла

$$dF = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - S\, dT \tag{4}$$

Если воспользоваться соотношениями, верными в лагранжевой системе координат,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho g^{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \qquad \frac{dg^{kl}}{dt} = -2g^{ki}g^{lj}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \tag{5}$$

то уравнение (4) можно представить в форме

$$\frac{\partial F}{\partial T} dT - \left(\rho g^{ij}\frac{\partial F}{\partial \rho} + 2g^{ki}g^{lj}\frac{\partial F}{\partial g^{kl}}\right) d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \nabla_i\rho} d\nabla_i\rho +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i + \frac{\partial F}{\partial \nabla_j n_i} d\nabla_j n_i = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - S\, dT \tag{6}$$

Так как равенство (6) должно выполняться для всех возможных процессов в рассматриваемой среде, и F и S зависят лишь от параметров (1) и не зависят от скоростей изменения этих параметров, то либо между дифференциалами $d\nabla_i\rho$, $d\nabla_j n_i$, dT, $d\varepsilon_{ij}$, dn_i существуют некоторые, вообще говоря, неинтегрируемые соотношения, либо, если таких соотношений нет, всегда верны равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \nabla_i\rho} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \nabla_j n_i} = 0 \tag{7}$$

Легко видеть, что если между дифференциалами параметров (1) есть универсальные связи, или если (7) выполняются, но не тождественно, то система уравнений для определения деформаций и вектора n в такой среде является переопределенной. Это означает, что в среде могут осуществляться перемещения только некоторых частных классов. Здесь же рассматриваются среды, в которых возможны любые непрерывные перемещения. Для них из (6) следует, что соотношения (7) удовлетворяются тождественно, т. е. F не зависит от $\nabla_i\rho$, $\nabla_j n_i$. Это противоречит предположению (1) и показывает, что для сред с параметрами состояния (1) уравнение первого закона термодинамики нельзя писать в форме (3).

3°. Известно [4], что в некоторых случаях (например, если учитываются поляризация и намагничивание среды в присутствии электромагнитного поля) в правую часть уравнения (3) следует включить еще приток энергии, отличный от $dA^{(e)}$ и $dq^{(e)}$. Рассуждения п. 2° показывают, что изменение свободной энергии, связанное с изменением только градиента плотности, например, не может быть вызвано механической работой макроскопических сил и притоком тепла к частице, а должно быть связано с дополнительным притоком энергии другой природы. Будем обозначать этот приток энергии на единицу массы через dq^{**}, а уравнение притока тепла записывать в виде [1]

$$dF = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - S\, dT + dq^{**} \tag{8}$$

4°. Естественно [4] сделать следующие предположения относительно dq^{**}.

1) Приток энергии dq^{**} происходит через поверхность частицы, т. е.

$$\rho\, dq^{**} = \operatorname{div} \mathbf{Q}\, dt = \nabla_k Q^k dt \tag{9}$$

2) Вектор $\mathbf{Q}$ обращается в нуль, если все параметры (1) не изменяются в частице, т. е.

$$Q^k dt = \varkappa^k dT + \Lambda^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} dg^{ij} + M^{ki} d\nabla_i \rho + N^{ki} dn_i + P^{kji} d\nabla_j n_i \tag{10}$$

Здесь мы не включили член вида $\Lambda^k d\rho$, имея в виду, что хотя ρ и g^{ij} — независимые параметры, их дифференциалы связаны универсальным соотношением, именно: $2d\rho = \rho g_{ij} dg^{ij}$.

Перепишем теперь уравнение притока тепла (8) с учетом (9), (10) и (5)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial T} dT - \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} g^{ij} + 2 g^{ki} g^{lj} \frac{\partial F}{\partial g^{kl}} + \nabla_k \rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho} g^{ij}\right) d\varepsilon_{ij} - \\
- \rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho} g^{ij} \nabla_k d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i + \frac{\partial F}{\partial \nabla_j n_i} d\nabla_j n_i = - S\, dT + \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + \\
+ \frac{1}{\rho} \nabla_k \varkappa^k dT + \frac{1}{\rho} \varkappa^k \nabla_k dT - \frac{2}{\rho} \nabla_k \Lambda^{kij} d\varepsilon_{ij} - \frac{2}{\rho} \Lambda^{kij} \nabla_k d\varepsilon_{ij} + \\
+ \frac{1}{\rho} \nabla_k M^{ki} d\nabla_i \rho + \frac{1}{\rho} M^{ki} \nabla_k d\nabla_i \rho + \frac{1}{\rho} \nabla_k N^{ki} dn_i + \frac{1}{\rho} N^{ki} \nabla_k dn_i + \\
+ \frac{1}{\rho} \nabla_k P^{kji} d\nabla_j n_i + \frac{1}{\rho} P^{kji} \nabla_k d\nabla_j n_i
\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь была использована еще формула

$$d\nabla_i \rho = - \nabla_i \rho g^{kj} d\varepsilon_{kj} - \rho g^{kj} \nabla_i d\varepsilon_{kj} \tag{12}$$

Из уравнения (11) получим все определяющие уравнения для нашей среды в предположении, что $\varkappa^k$, Λ^{kji}, M^{ki}, N^{ki} и P^{kji} не зависят от скоростей изменения параметров (1), и между дифференциалами, входящими в (11), нет универсальных для рассматриваемой среды связей.

При получении определяющих уравнений воспользуемся еще следующими формулами перестановки символов ∇_i — ковариантного дифференцирования по ξ^i и d — дифференциала по времени при постоянных ξ^i

$$\begin{aligned}
d\nabla_k \rho &= \nabla_k d\rho \\
d\nabla_k \varepsilon_{ij} &= \nabla_k d\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_j{}^s L^{pqr}_{kis} + \varepsilon_i{}^s L^{pqr}_{kjs}) \nabla_p d\varepsilon_{qr} \\
d\nabla_k \nabla_i \rho &= \nabla_k d\nabla_i \rho - \nabla^s \rho L^{pqr}_{kis} \nabla_p d\varepsilon_{qr} \\
d\nabla_k n_i &= \nabla_k dn_i - n^s L^{pqr}_{kis} \nabla_p d\varepsilon_{qr}
\end{aligned}$$

---

1 Необходимость введения dq^{**} подробно обсуждалась в докладе Л. И. Седова на XV Международном конгрессе по прикладной механике, Москва, 1964.

Здесь

$$2L_{ijk}^{pqr} = \delta_i^p (\delta_j^q \delta_k^r + \delta_k^q \delta_j^r) + \delta_j^p (\delta_k^q \delta_i^r + \delta_i^q \delta_k^r) - \delta_k^p (\delta_i^q \delta_j^r + \delta_j^q \delta_i^r) \tag{13}$$

(δ_k^p — символы Кронекера)

Формулы (13) становятся очевидными, если учесть, что для дифференциалов по времени символов Кристоффеля Γ_{ij}^k в лагранжевой системе координат имеем

$$d\Gamma_{ij}^k = \nabla_i \nabla_j v^k \, dt = g^{ks} (\nabla_i d\varepsilon_{js} + \nabla_j d\varepsilon_{is} - \nabla_s d\varepsilon_{ij}) = L_{ijs}^{pqr} g^{ks} \nabla_p d\varepsilon_{qr}$$

При сделанных предположениях требование, чтобы уравнение притока тепла (11) выполнялось во всех процессах, происходящих в рассматриваемой среде, приводит к следующим определяющим уравнениям

$$M^{ki} = 0, \qquad P^{kji} = 0, \qquad \varkappa^k = 0 \tag{14}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{15}$$

$$N^{ji} = \rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_j n_i}, \qquad \frac{\partial F}{\partial n_i} = \frac{1}{\rho} \nabla_k N^{ki} \tag{16}$$

$$\frac{2}{\rho} \Lambda^{kij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho} g^{ij} + \frac{\partial F}{\partial \nabla_p n_q} n^s L_{pqs}^{kij} \tag{17}$$

$$\frac{p^{ij}}{\rho} = -\left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} + \nabla_k \rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho}\right) g^{ij} - 2 g^{ki} g^{lj} \frac{\partial F}{\partial g^{kl}} + \frac{2}{\rho} \nabla_k \Lambda^{kij} \tag{18}$$

Если свободная энергия известна как функция своих параметров, то уравнения (14), (16) и (17) позволяют вычислить приток энергии dq^{**}

$$dq^{**} = \frac{1}{\rho} \nabla_k \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho}\right) d\rho + \frac{\partial F}{\partial \nabla_k \rho} d\nabla_k \rho + \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \nabla_k n_i} d\nabla_k n_i - \frac{1}{\rho} \nabla_k \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \nabla_p n_q} n^s L_{pqs}^{kij}\right) d\varepsilon_{ij} \tag{19}$$

Из (19), в частности, видно, что при деформировании сред, в которых F не зависит от $\nabla_i \rho$, но зависит от $\nabla_j n_i$, возникает отличный от нуля dq^{**} в общем случае даже в процессах с $dn_i = 0$ и $d\nabla_k n_i = 0$.

Равенства (17), (18) показывают, что тензор напряжений в такой среде не является шаровым, причем это верно и для состояний равновесия. Поэтому среда, в которой вободная энергия в данный момент времени зависит не только от значения плотности, но и от значения градиента плотности, не является жидкостью в обычном понимании.

Отметим также, что зависимость свободной энергии от градиентов плотности и вектора n приводит к тому, что напряжения зависят в общем случае от градиентов всех параметров (1), в частности, от вторых производных по пространству от ρ и n, причем эта зависимость от вторых производных — линейная. При изучении сред [1], в которых свободная энергия зависит от производных от плотности по времени [5], также получается, что напряжения зависят от производных от ρ по времени на единицу большего порядка — линейным образом. Однако и в том, и в другом случае этот вывод существенно связан с предположением, что dq^{**} — приток энергии через поверхность (или отсутствует), а также с условием обратимости (2).

5°. Для выявления характерных особенностей механического поведения сред, у которых энергия зависит от градиента плотности, рассмотрим следующую простую модель. Предположим, что F зависит только от T, ρ, g^{ij} и $\nabla_i \rho$, т. е.

$$F = F(T, \rho, \mu), \qquad \mu = g^{ij} \nabla_i \rho \; \nabla_j \rho \tag{20}$$

Положим еще

$$F = F_1 + \frac{k^2}{2\rho^2} \mu \tag{21}$$

[1] Такие среды рассматривались в диссертации М. Э. Эглит, МГУ, 1962.

где $F_1 = F_1(\rho, T)$ — свободная энергия единицы массы совершенного газа, а k^2 — константа; размерность k^2 равна размерности произведения F на квадрат некоторой длины l. Таким образом, в числе параметров, характеризующих рассматриваемую среду, появляется линейный размер [6]. При постановке конкретных задач также обычно возникает некоторая длина L, характеризующая объекты, участвующие в задаче. По-видимому, уточнение модели совершенного газа, даваемое формулой (21), может оказаться существенным в задачах, в которых $L^2 \sim l^2$ или $L^2 \ll l^2$.

В силу (15), выражение для энтропии рассматриваемой среды будет совпадать с выражением для энтропии совершенного газа, и, в частности, условием адиабатичности (совпадающим здесь с условием $S = \text{const}$) будет $T = c\rho^{\gamma-1}$.

Выпишем еще формулы для компонент тензора напряжений (совпадающие с формулой Клапейрона при $k = 0$)

$$p^{ij} = -\left(R\rho T + \frac{k^2}{\rho}\mu - k^2\nabla_\alpha \nabla^\alpha \rho\right) g^{ij} - \frac{k^2}{\rho}\nabla^i\nabla^j\rho \tag{22}$$

и замкнутую систему уравнений, описывающих адиабатические движения рассматриваемой среды при отсутствии массовых сил в эйлеровой системе координат

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_k v^k = 0 \tag{23}$$

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = -A\rho^{\gamma-1}\nabla^i\rho + \frac{2k^2}{\rho^2}\nabla^i\rho\nabla_j\rho\nabla^j\rho - \frac{3k^2}{\rho}\nabla_j\nabla^i\rho\nabla^j\rho - \frac{k^2}{\rho}\nabla^i\rho\nabla_j\nabla^j\rho + k^2\nabla^i\nabla_j\nabla^j\rho$$

$$\left(A = \frac{\gamma R T_0}{{\rho_0}^{\gamma-1}} = \text{const}\right) \tag{24}$$

Изучим малые ($\rho = \rho_0 + \rho'$, ρ' и v^i малы вместе со своими производными) одномерные движения с плоскими волнами. Очевидно, что в таком приближении в рассматриваемой среде можно получить только продольные волны. Это связано с тем, что с точностью до малых первого порядка тензор напряжений здесь является шаровым.

Для продольных волн, распространяющихся вдоль оси x, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2} - k^2\frac{\partial^4\rho'}{\partial x^4} \qquad (a_0^2 = \gamma R T_0) \tag{25}$$

Здесь a_0 — скорость звука в совершенном газе.

Уравнение (25) допускает решения вида $\exp[i(\alpha x - \omega t)]$, причем длина волны связана с частотой дисперсионным уравнением

$$\omega = \pm\alpha\sqrt{a_0^2 + k^2\alpha^2} \tag{26}$$

Следовательно, при учете зависимости свободной энергии от градиента плотности в среде обнаруживается дисперсия звука. Этот эффект существен для коротких волн ($k^2\alpha^2 \sim a_0^2$) и не существен для длинных ($k^2\alpha^2 \ll a_0^2$). При помощи измерения дисперсии коротких волн можно вычислить величину k^2 для рассматриваемой среды.

Поступила 20 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals. Trans. Soc. Rheol, 1961, vol. 5. p. 23—34.
2. Casal P. Capillarité interne en mécanique des miliex continus. Compt. Rend. Acad. Sci., 1963, vol. 256, No. 18, p. 3820—3822.
3. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rational Mechanics and Analysis, 1964, No. 1, p. 51—78.
4. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Когарко С. Б. Об одной модели кавитирующей жидкости, Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1331—1333.
6. Amiel R. Pouvoir rotatoir des milieux capillaires. Compt. Rend. Acad. Sci., 1964, vol. 258, No. 6, p. 1709.