Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ТЕОРИИ ЭКСТРАКЦИИ ИЗ ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ

В. П. Воротилин, В. С. Крылов, В. Г. Левич
(Москва)

В работе [1] была рассмотрена задача об экстракции вещества из сферической капли достаточно малого радиуса, падающей под действием силы тяжести в жидкой среде. При этом предполагалось, что скорость экстрагирования лимитируется конвективной диффузией через внешнюю среду, а число Пекле, соответствующее внешней среде, достаточно велико, вследствие чего основное изменение концентрации происходит в диффузионном пограничном слое, расположенном вблизи поверхности капли. Аналогичной задаче посвящены работы канадских авторов [2,3], в которых сделана попытка учета влияния гидродинамических потоков вне и внутри капли на скорость массопередачи. Отличие этих работ от работы [1] заключается, с одной стороны, в использовании в неразложенном виде выражения для функции тока, полученного Адамаром [4] и Рыбчинским [5], и, с другой стороны,— в значительно менее точном решении уравнения конвективной диффузии путем подбора различных полиномиальных выражений для профиля концентрации. В работе Кронига и Бринка [6] было исследовано влияние конвективного переноса на скорость обеднения раствора внутри падающей капли при условии, что медленной стадией процесса является диффузия через каплю. В целях оценки максимального влияния циркуляционного движения жидкости внутри капли авторы упростили уравнение массопереноса, предположив, что концентрация растворенного в капле вещества остается постоянной вдоль каждой гидродинамической линии тока. Как показали оценки, проделанные самими авторами, такое предположение заведомо не выполняется вблизи поверхности капли, так что полученные в работе [6] результаты не могут быть применимы в случае достаточно больших значений числа Пекле, когда основное сопротивление массопереносу сосредоточено в диффузионном пограничном слое.

Рассмотрена задача о конвективной диффузии вещества из одиночной капли, движущейся в жидкой среде при малых числах Рейнольдса, при условии, что числа Пекле, соответствующие дисперсной (внутренность капли) и сплошной фазам, весьма велики и что сопротивления, оказываемые массопереносу со стороны каждой из фаз, соизмеримы. Задача решена в квазистационарном приближении, т. е. в предположении, что время релаксации диффузионного пограничного слоя мало по сравнению с временем существенного обеднения капли растворенным веществом. Методом Пуанкаре — Лайтхилла — Го получены два первых члена разложения функции распределения концентрации вещества во внутренней и внешней областях по степеням некоторых соответствующих этим областям параметров, которые предполагаются имеющими одинаковый порядок малости. При помощи полученных решений найдены выражения для потока вещества через поверхность капли, а также для средних коэффициентов массопередачи, соответствующих каждой из фаз. Одним из исходных предположений задачи предполагается выполнение на поверхности капли условия межфазного равновесия, выражаемого законом Генри, поэтому суммарное сопротивление массопереносу (т. е. обратная величина суммарного коэффициента массопередачи) оказалось равным сумме сопротивлений каждой из фаз.

Рассмотрим сферическую каплю достаточно малого радиуса R, содержащую растворенное вещество и движущуюся с постоянной скоростью U

в жидкой среде. Пусть D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии вещества соответственно внутри и вне капли. Если числа Пекле $P_1 = UR / D_1$ и $P_2 = UR / D_2$ достаточно велики, то основное сопротивление переносу вещества из капли будет сосредоточено в узком слое, называемом диффузионным пограничным слоем, который будет расположен по обе стороны от поверхности капли. Можно показать, что при заданных значениях концентрации вещества на границах диффузионного слоя время релаксации последнего, т. е. время, в течение которого в диффузионном слое устанавливается стационарное распределение концентрации, равно

$$\tau_r = \frac{R(1+\mu)}{2U} \qquad \left(\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$$

где μ — отношение динамических вязкостей дисперсной и сплошной жидких сред. В работе [6] было показано, что время τ_d, в течение которого общее количество растворенного в капле вещества уменьшается в e раз, ограничено снизу величиной $0.022\, R^2 / D_1$.

Следовательно, имеет место соотношение

$$\frac{\tau_r}{\tau_d} < 23\, \frac{1+\mu}{P_1}$$

Это означает, что в случае достаточно больших значений числа Пекле P_1 существует достаточно широкий интервал времен t, удовлетворяющих условию $\tau_r \ll t \ll \tau_d$. В этом интервале времен перенос вещества в диффузионном пограничном слое может быть описан стационарным уравнением конвективной диффузии при заданных значениях концентрации за пределами пограничного слоя, совпадающих с начальными значениями концентрации внутри и вне капли. В этом случае задача сводится к нахождению решения системы

$$\begin{aligned} \frac{v_r^{(1)}}{U}\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{v_\theta^{(1)}}{Ur}\frac{\partial c_1}{\partial \theta} &= \frac{1}{\beta P_2}\triangle_{r,\theta}\, c_1, \\ \frac{v_r^{(2)}}{U}\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{v_\theta^{(2)}}{Ur}\frac{\partial c_2}{\partial \theta} &= \frac{1}{P_2}\triangle_{r,\theta}\, c_2 \end{aligned} \qquad \left(\beta = \frac{D_2}{D_1}\right) \tag{1}$$

где $\triangle_{r,\theta}$ — оператор Лапласа в сферической системе координат, r — расстояние от начала координат, выраженное в единицах радиуса капли, θ — полярный угол. Если начало координат поместить в центре капли, направив полярную ось вертикально вверх, и рассматривать падение капли под действием силы тяжести при малых числах Рейнольдса, то, как показано в работах [4,5], распределения гидродинамических скоростей внутри и вне капли будут иметь соответственно следующий вид

$$v_r^{(1)} = -\frac{U(1-r^2)\cos\theta}{2(1+\mu)}, \qquad v_\theta^{(1)} = \frac{U(1-2r^2)\sin\theta}{2(1+\mu)} \tag{2}$$

$$v_r^{(2)} = U\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{b}{2r^3}\right)\cos\theta, \qquad v_\theta^{(2)} = U\left(-1 + \frac{3a}{4r} + \frac{b}{4r^3}\right)\sin\theta \tag{3}$$

$$\left(a = \frac{2+3\mu}{3(1+\mu)}, \qquad b = \frac{\mu}{1+\mu}\right)$$

Как отмечалось выше, в рассматриваемые промежутки времени ($t \ll \tau_d$) концентрацию вещества в глубине капли (за пределами диффузионного пограничного слоя) можно считать постоянной и равной начальному значению c_{10}

$$c_1 (r \ll 1, \theta) = c_{10} \tag{4}$$

Будем также считать заданной концентрацию вещества в сплошной среде на достаточном удалении от капли:

$$c_2 (r \gg 1, \theta) = c_{2\infty} \tag{5}$$

На поверхности капли должны быть непрерывны потоки вещества

$$D_1 \frac{\partial c_1}{\partial r} (1, \theta) = D_2 \frac{\partial c_2}{\partial r} (1, \theta) \tag{6}$$

Кроме того, можно считать, что вследствие больших скоростей физического растворения на границе раздела мгновенно устанавливается условие межфазного равновесия. При достаточно малых концентрациях экстрагируемого вещества такое условие выражается законом Генри

$$c_1 (1, \theta) = \alpha c_2 (1, \theta) \tag{7}$$

Здесь α — коэффициент, зависящий от температуры и давления.

Для решения поставленной задачи будет использован метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го [7–11], нашедший в последние годы весьма широкое и эффективное применение в различных задачах гидродинамики, тепло- и массообмена. Этот метод представляет собой комбинацию метода пограничного слоя Прандтля и метода модифицированной теории возмущений Пуанкаре — Лайтхилла, согласно которой разложению в ряд по степеням малого параметра подвергается не только искомая функция, но и независимые переменные. Основное достоинство этого метода заключается в том, что он позволяет избегать возрастания порядка особенностей в решениях, соответствующих более высоким приближениям, и тем самым позволяет устранять расходимости в интегральных величинах, получаемых при помощи этих решений.

Выберем в качестве параметров разложения, соответствующих дисперсной и сплошной фазам, величины

$$f_1 = \sqrt{(1 + \mu) / \beta P_2}, \qquad f_2 = \sqrt{(1 + \mu) / P_2} \tag{8}$$

и предположим, что эти величины имеют одинаковый порядок малости. Легко видеть, что условие $f_1 \ll 1$ обеспечивает выполнение неравенства $\tau_r \ll \tau_d$, уже использованного при формулировке основных уравнений (1) диффузионного пограничного слоя.

Запишем величины c_i и r в виде степенных разложений по параметрам f_i $(i = 1, 2)$ с точностью до членов первого порядка малости

$$c_i = c_i^{(0)} + f_i c_i^{(1)} + \ldots, \qquad r = 1 + f_i \rho + \ldots \tag{9}$$

Подставив эти разложения в уравнения (1) и граничные условия (4) — (7), получаем для $c_i^{(0)}$ систему уравнений

$$\rho\nu \frac{\partial c_i^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{1 - \nu^2}{2} \frac{\partial c_i^{(0)}}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 c_i^{(0)}}{\partial \rho^2} = 0 \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} c_1^{(0)} (-\infty, \nu) = c_{10}, \qquad c_2^{(0)} (\infty, \nu) = c_{2\infty} \\ c_1^{(0)} (0, \nu) = \alpha c_2^{(0)} (0, \nu), \qquad \frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial \rho} (0, \nu) = \sqrt{\beta} \frac{\partial c_2^{(0)}}{\partial \rho} (0, \nu) \quad (\nu = \cos\theta) \end{gathered} \tag{11}$$

Нетрудно показать, что эта система имеет решение (12)

$$c_i^{(0)} = A_i \operatorname{erf} \chi + B_i \quad (i = 1,2), \ \chi(\rho, \nu) = \rho(1 - \nu^2)\left[8 \int_{-1}^{\nu} (1 - x^2)\, dx\right]^{-1/2}$$

$$A_1 = -\frac{\sqrt{\beta}(c_{10} - \alpha c_{2\infty})}{\alpha + \sqrt{\beta}}, \qquad A_2 = -\frac{c_{10} - \alpha c_{2\infty}}{\alpha + \sqrt{\beta}}$$

$$B_1 = \frac{\alpha\left(c_{10} + \sqrt{\beta} c_{2\infty}\right)}{\alpha + \sqrt{\beta}}, \qquad B_2 = \frac{c_{10} + \sqrt{\beta} c_{2\infty}}{\alpha + \sqrt{\beta}} \tag{13}$$

Если теперь написать систему уравнений для $c_i^{(1)}$, то поправка к выражению для локального потока вещества на границе раздела, полученная в результате решения этой системы, будет иметь особенности при $\nu = \pm 1$, которые приведут к расходимости выражения для интегрального потока. Во избежание этой трудности произведем преобразование координат

$$\rho = \xi, \qquad \nu = \eta + f_i g_i(\xi, \eta) \tag{14}$$

подобрав функции $g_i(\xi, \eta)$ таким образом, чтобы поправка к локальному потоку на границе раздела, вычисленная в первом приближении по параметрам f_i, не содержала неблагоприятных особенностей. Совершенно очевидно, что переход от переменных ρ, ν к переменным ξ, η, определяемый формулами (14), должен вызвать изменения лишь в уравнениях для $c_i^{(1)}$. Решения же для $c_i^{(0)}$ при этом будут по-прежнему определяться формулами (12), (13) с точностью до замены $(\rho, \nu) \to (\xi, \eta)$.

Произведя в уравнениях (1) замену координат (14) и подставив разложения (9), получим систему (15)

$$\xi\eta \frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1 - \eta^2}{2} \frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 c_i^{(1)}}{\partial \xi^2} = \left(2 - \xi g_i - \frac{\xi^2 \eta}{2} h_i\right) \frac{\partial c_i^{(0)}}{\partial \xi} +$$

$$+ \left[\eta\left(g_i + \xi \frac{\partial g_i}{\partial \xi}\right) + \frac{1 - \eta^2}{2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial \eta} - 3\xi k_i\right) - \frac{\partial^2 g_i}{\partial \xi^2}\right] \frac{\partial c_i^{(0)}}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial g_i}{\partial \xi} \frac{\partial^2 c_i^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \quad (i = 1,2)$$

с граничными условиями

$$c_1^{(1)}(-\infty, \eta) = c_2^{(1)}(\infty, \eta) = 0, \quad c_1^{(1)}(0, \eta) = \alpha \sqrt{\beta}\, c_2^{(1)}(0, \eta)$$

$$\frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi}(0, \eta) = \beta \frac{\partial c_2^{(1)}}{\partial \xi}(0, \eta) \quad (h_1 = k_1 = 1, \quad h_2 = 3\mu - 2, \quad k_2 = \mu) \tag{16}$$

Введем новые переменные ψ и τ по формулам

$$\psi = \xi(1 - \eta^2), \qquad \tau = 2 \int_{-1}^{\eta} (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}(2 - \eta)(1 + \eta)^2 \tag{17}$$

Преобразуя уравнения (15) к переменным (17) и подставляя выражения (12), (13) для функций $c_i^{(0)}$, получим уравнение типа уравнения теплопроводности с источниками (18)

$$\frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 c_i^{(1)}}{\partial \psi^2} = \frac{A_i}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\psi^2/4\tau} \left\{\frac{2}{1 - \eta^2} + \frac{\psi^2 \eta (6k_i - h_i)}{2(1 - \eta^2)^3} - \frac{\psi g_i}{1 - \eta^2}\left[\frac{\eta}{\tau} + \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \frac{\psi^2 k_i}{\tau(1 - \eta^2)} + \frac{2\psi}{1 - \eta^2}\left[\eta + \frac{(1 - \eta^2)^2}{2\tau}\right]\left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial \psi^2} - \frac{\partial g_i}{\partial \tau} + \frac{2}{\psi}\left(1 - \frac{\psi^2}{2\tau}\right)\frac{\partial g_i}{\partial \psi}\right]\right\}$$

Выберем функции $g_i(\psi, \eta)$ таким образом, чтобы в правой части уравнения (18) исчезли члены, содержащие самую сильную особенность в точках $\eta = \pm 1$. Очевидно, для этого необходимо положить

$$g_i(\psi, \eta) = \frac{\psi\eta\,(6k_i - h_i)}{2\,(1 + \eta^2)} \tag{19}$$

При этом уравнение (18) примет вид (20)

$$\frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 c_i^{(1)}}{\partial \psi^2} = \frac{2A_i}{\sqrt{\pi\tau}\,(1-\eta^2)} e^{-\psi^2/4\tau} \left\{ 1 + \frac{3}{4}\frac{\psi^2}{\tau} k_i - \frac{\psi^2(6k_i - h_i)}{4\,(1+\eta^2)} \left[\frac{3\eta^2}{\tau} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\eta}{1+\eta^2} + \frac{(1-\eta^2)^2}{2\tau}\left(\frac{1}{1+\eta^2} + \frac{2\eta}{\tau}\right)\right] + \frac{\eta(6k_i - h_i)}{1+\eta^2}\left[\eta + \frac{(1-\eta^2)^2}{2\tau}\right]\right\} \quad (i=1,\ 2)$$

где зависимость $\eta(\tau)$ определяется зависимостью (17).

Для получения решения уравнения (20) к граничным условиям (16) необходимо добавить еще одно условие. Для этого можно потребовать [1], чтобы концентрация вещества в точке набегания потока ($\tau = 0$) равнялась значению концентрации вдали от капли, т. е. $c_{2\infty}$. Таким образом, уравнение (20) следует решать при краевых условиях

$$\begin{gathered} c_1^{(1)}(-\infty, \tau) = c_2^{(1)}(\infty, \tau) = 0, \qquad c_1^{(1)}(\psi, 0) = c_2^{(1)}(\psi, 0) = 0 \\ c_1^{(1)}(0, \tau) = \alpha\sqrt{\beta}\, c_2^{(1)}(0, \tau), \qquad \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \psi}(0, \tau) = \beta\,\frac{\partial c_2^{(1)}}{\partial \psi}(0, \tau) \end{gathered} \tag{21}$$

Решение будем искать в виде суммы

$$c_i^{(1)} = Y_i^{(1)} + Y_i^{(2)} \qquad (i = 1,\ 2) \tag{22}$$

Потребуем, чтобы функции $Y_i^{(1)}(\psi, \tau)$ удовлетворяли уравнению (20) с нулевыми начальными и граничными условиями. Тогда, как известно,

$$\begin{gathered} Y_1^{(1)}(\psi, \tau) = -\int_0^\tau\!\!\int_0^\infty \frac{F_1(x, y)}{\sqrt{4\pi(\tau - y)}}\left\{\exp\left[-\frac{(\psi - x)^2}{4(\tau - y)}\right] - \exp\left[-\frac{(\psi + x)^2}{4(\tau - y)}\right]\right\} dx\,dy \\ Y_2^{(1)}(\psi, \tau) = \int_0^\tau\!\!\int_0^\infty \frac{F_2(x, y)}{\sqrt{4\pi(\tau - y)}}\left\{\exp\left[-\frac{(\psi - x)^2}{4(\tau - y)}\right] - \exp\left[-\frac{(\psi + x)^2}{4(\tau - y)}\right]\right\} dx\,dy \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь каждая из функций $F_i(\varphi, \tau)$ представляет собой соответствующую правую часть уравнения (20).

Функции $Y_i^{(2)}(\psi, \tau)$ должны удовлетворять однородному уравнению теплопроводности и краевым условиям

$$Y_1^{(2)}(-\infty, \tau) = 0, \quad Y_2^{(2)}(\infty, \tau) = 0, \quad Y_1^{(2)}(\psi, 0) = 0, \quad Y_2^{(2)}(\psi, 0) = 0 \tag{24}$$

$$Y_1^{(2)}(0, \tau) = \alpha\sqrt{\beta}\, Y_2^{(2)}(0, \tau) \tag{25}$$

$$\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial \psi}(0, \tau) - \beta\,\frac{\partial Y_2^{(2)}}{\partial \psi}(0, \tau) = \int_0^\tau\!\!\int_0^\infty \frac{F_1(x, y) + \beta F_2'(x, y)}{\sqrt{4\pi(\tau - y)^3}}\, x \exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau - y)}\right] dx\,dy \tag{26}$$

При помощи интегралов Дюгамеля выражения для функций $Y_i^{(2)}(0,\tau)$ с учетом граничных условий (24) могут быть представлены в виде

$$Y_1^{(2)}(0,\tau)=\int_0^\tau\left[\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\substack{\psi=0\\ \tau=y}}\frac{dy}{\sqrt{\pi(\tau-y)}}$$

$$Y_2^{(2)}(0,\tau)=-\int_0^\tau\left[\frac{\partial Y_2^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\substack{\psi=0\\ \tau=y}}\frac{dy}{\sqrt{\pi(\tau-y)}} \tag{27}$$

Используя граничное условие (25), получаем

$$\int_0^\tau(\tau-y)^{-1/2}\left(\left[\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\substack{\psi=0\\ \tau=y}}+\alpha\sqrt{\beta}\left[\frac{\partial Y_2^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\substack{\psi=0\\ \tau=y}}\right)dy=0 \tag{28}$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0}+\alpha\sqrt{\beta}\left[\frac{\partial Y_2^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0}=0 \tag{29}$$

Решая совместно уравнения (29) и (26), находим выражения для производных (30)

$$\left[\frac{\partial Y_1^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0}=\frac{\alpha}{\alpha+\sqrt{\beta}}\int_0^\tau\int_0^\infty\frac{F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)}{\sqrt{4\pi(\tau-y)^3}}x\exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau-y)}\right]dx\,dy$$

$$\left[\frac{\partial Y_2^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0}=-\frac{1}{\beta+\alpha\sqrt{\beta}}\int_0^\tau\int_0^\infty\frac{F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)}{\sqrt{4\pi(\tau-y)^3}}x\exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau-y)}\right]dx\,dy$$

Поток вещества в данной точке поверхности капли определяется выражением

$$j(\nu)=-\frac{D_i}{R}\frac{\partial c_i}{\partial r}(1,\nu)=-\frac{D_i}{Rf_i}(1-\nu^2)\left[\frac{\partial c_i^{(0)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0}-$$

$$-\frac{D_i}{R}(1-\nu^2)\left[\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial\psi}+\frac{\partial Y_i^{(2)}}{\partial\psi}\right]_{\psi=0} \tag{31}$$

Здесь производные $[\partial c_i^{(0)}/\partial\psi]_{\psi=0}$, $[\partial Y_i^{(1)}/\partial\psi]_{\psi=0}$, $[\partial Y_i^{(2)}/\partial\psi]_{\psi=0}$ будут известными функциями переменной $\tau=\tau(\eta)$. Согласно (19), функция $g_i(\psi,\eta)$, определяющая закон преобразования углов, на поверхности капли, т. е. при $\psi=0$, обращается в нуль, поэтому для обратного перехода в формуле (31) от переменной $\tau(\eta)$ к переменной ν достаточно во всех функциях произвести замену η на ν. Полный поток вещества через поверхность капли равен (32)

$$I=2\pi R^2\int_{-1}^{1}j(\nu)\,d\nu=\frac{2RD_2(c_{10}-\alpha c_{2\infty})}{\alpha+\sqrt{\beta}}\left\{\left(\frac{8\pi P_2}{3(1+\mu)}\right)^{1/2}-\frac{1}{\alpha+\sqrt{\beta}}I_1\right\}$$

Здесь (33)

$$I_1=\frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}}\int_{-1}^{1}(1-\nu^2)\,d\nu\int_0^{\tau(\nu)}\int_0^\infty\frac{\alpha\sqrt{\beta}F_2(x,y)-F_1(x,y)}{(\tau-y)^{3/2}}x\exp\left[-\frac{x^2}{4(\tau-y)}\right]dxdy$$

Зависимость $\tau(\nu)$ определяется (17). В результате некоторых вычислений формула (32) принимает вид

$$I = \frac{2RD_2\,(c_{10} - \alpha c_{2\infty})}{\alpha + \sqrt{\beta}} \left\{ \left(\frac{8\pi P_2}{3\,(1+\mu)} \right)^{1/2} - \frac{5.5 - \alpha\,(3.8 + 1.7\mu)}{\alpha + \sqrt{\beta}} \right\} \tag{34}$$

Исходные предположения относительно малости величин f_1 и f_2, а также относительно равенства порядков их величин не позволяют использовать формулу (34) в широкой области изменения входящих в нее параметров. Заметим, однако, что в предельном случае $D_1 \to \infty$ ($\beta \to 0$), когда скорость массопередачи должна лимитироваться внешней средой, можно, рассматривая промежутки времени, малые по сравнению с временем обеднения капли, считать концентрацию вещества на поверхности капли заданной величиной (c_{10}). В этом случае задача сведется к решению одного второго уравнения (1), не содержащего параметра β, и выражение для потока примет вид

$$I = 2RD_2\,(c_{10} - c_{2\infty}) \left\{ \left(\frac{8\pi P_2}{3\,(1+\mu)} \right)^{1/2} - 1.7\,(1+\mu) \right\} \tag{35}$$

Таким образом, выражение (35) представляет собой формулу Левича [1] с учетом следующего неисчезающего члена в разложении концентрации c_2 по степеням параметра f_2. Следует, однако, подчеркнуть, что основное преимущество формулы (34) перед формулой Левича заключается не только в том, что она применима в более широком интервале значений числа Пекле, но главным образом в том, что она учитывает в явном виде (через α) зависимость потока I от физических свойств контактирующих фаз, причем на абсолютную величину входящего в эту формулу коэффициента α не наложено никаких ограничений.

Формула (34) определяет суммарный коэффициент массопередачи

$$K = \frac{I}{4\pi R^2\,(c_{10} - \alpha c_{2\infty})}$$

Частные коэффициенты массопередачи K_1 и K_2, соответствующие каждой из фаз, определяются соотношениями

$$K_1 = \frac{I}{4\pi R^2} \left[c_{10} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} c_1\,(1, \nu)\, d\nu \right]^{-1}$$

$$K_2 = \frac{I}{4\pi R^2} \left[\frac{1}{2\alpha} \int_{-1}^{1} c_1(1,\nu)d\nu - c_{2\infty} \right]^{-1} \tag{36}$$

где функция $c_1\,(1, \nu)$, представляющая собой значение концентрации c_1 на поверхности капли, имеет, согласно формулам (12), (13), (22), (23), (27), (30) для Y_1, следующий вид:

$$c_1\,(1, \nu) = \frac{\alpha\,(c_{10} + \sqrt{\beta}\,c_{2\infty})}{\alpha + \sqrt{\beta}} + \frac{\alpha f_1}{2\pi\,(\alpha + \sqrt{\beta})} \int_0^{\tau(\nu)} \frac{dy}{\sqrt{\tau - y}} \int_0^{y}\int_0^{\infty} \frac{F_1(x,\zeta) + \beta F_2(x,\zeta)}{(y - \zeta)^{3/2}} \times$$

$$\times\, x \exp\left[-\frac{x^2}{4\,(y - \zeta)} \right] dx\, d\zeta \tag{37}$$

Подставляя это выражение в формулы (36), получаем

$$K_1 = \frac{I\,(\alpha + \sqrt{\beta})}{4\pi R^2 \sqrt{\beta}\,(c_{10} - \alpha c_{2\infty})} \left[1 + \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\beta}} \left(\frac{1+\mu}{P_1}\right)^{1/2} I_2\right]^{-1} \qquad (38)$$

$$K_2 = \frac{I\,(\alpha + \sqrt{\beta})}{4\pi R^2 (c_{10} - \alpha c_{2\infty})} \left[1 - \frac{1}{\alpha + \sqrt{\beta}} \left(\frac{1+\mu}{P_2}\right)^{1/2} I_2\right]^{-1}$$

Здесь

$$I_2 = -\frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{4\pi \sqrt{\beta}\,(c_{10} - \alpha c_{2\infty})} \int_{-1}^{1} d\nu \int_{0}^{\tau(\nu)} \frac{dy}{\sqrt{\tau - y}} \int_{0}^{y} \frac{d\zeta}{(y-\zeta)^{3/2}} \int_{0}^{\infty} [F_1(x, \zeta) +$$

$$+ \beta F_2(x, \zeta)]\, x \exp\left[-\frac{x^2}{4(g-\zeta)}\right] dx \qquad (39)$$

Вычисления приводят к следующему результату:

$$I_2 = 4.9 + 2.4 \sqrt{\beta}\,(1 + \mu) \qquad (40)$$

Сравнивая формулы (38) с выражением для суммарного коэффициента K, легко убедиться, что в условиях рассмотренной задачи справедлив закон аддитивности фазовых сопротивлений

$$1/K = 1/K_1 + \alpha/K_2$$

Этот вывод есть прямое следствие линейного характера использованного выше условия межфазного равновесия (7). В случае же нелинейности этого условия соотношение между коэффициентами K_1, K_2 и K может быть получено только в результате корректного решения соответствующей задачи о распределении концентрации. Аналитические методы решения таких задач в настоящее время отсутствуют.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность А. М. Розену за весьма полезное обсуждение полученных результатов.

Поступила 9 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Теория диффузионной кинетики гетерогенных химических процессов. III. Реакции, протекающие на границе раздела жидкость — газ. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, стр. 721.
2. Bowman C. W., Ward D. M., Johnson A. I., Trass O. Mass transfer from fluid and solid spheres at low Reynolds numbers. Canad. J. Chem. Engng, 1961, vol. 39, No. 1, p. 9.
3. Ward D. M., Trass O., Johnson A. I. Mass transfer from fluid and solid spheres at low Reynolds numbers. Canad. J. Chem. Engng, 1962, vol. 40, No. 4, p. 164.
4. Hadamard J. Mechanique-Mouvement permanent lent d'une sphére liquide ed visqueuse dans un liquide visqueux. Compt. rend., 1911, vol. 152, p. 1735.
5. Rybczynski W. Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einemzähen Medium. Bull. Acad. sci. Cracovie A, 1911, vol. 40.
6. Kronig R., Brink J. C. On the theory of extraction from falling droplets. Appl. Scient Res. A, 1950, vol. 2, No. 2, p. 142.
7. Poincaré H. Les méthodes mouvelles de la mechanique céleste, t. I, ch. 3. Paris, 1892.
8. Lighthill M. J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag (7), 1949, vol. 40, 1179.
9. Kuo Y. H. On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynholds numbes. J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, p. 83.
10. Kuo Y. H. Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speed. J. Aeronaut. Sci., 1956. vol. 23, No. 2, p. 125.
11. Цянь Сюэ-сэнь. Метод Пуанкаре—Лайтхилла—Го. Сб. «Проблемы механики», т. II, под ред. Х. Драйдена и Т. Кармана, Изд. иностр. лит., 1959.