

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ

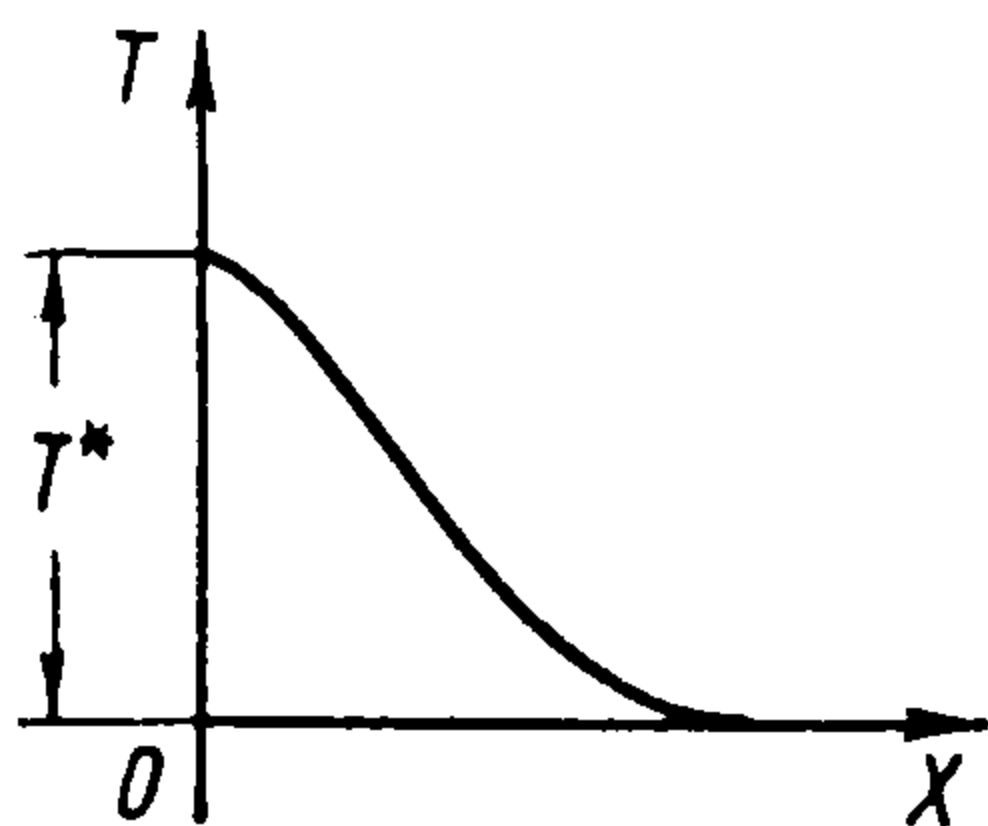
С. А. Каганов

(Саратов)

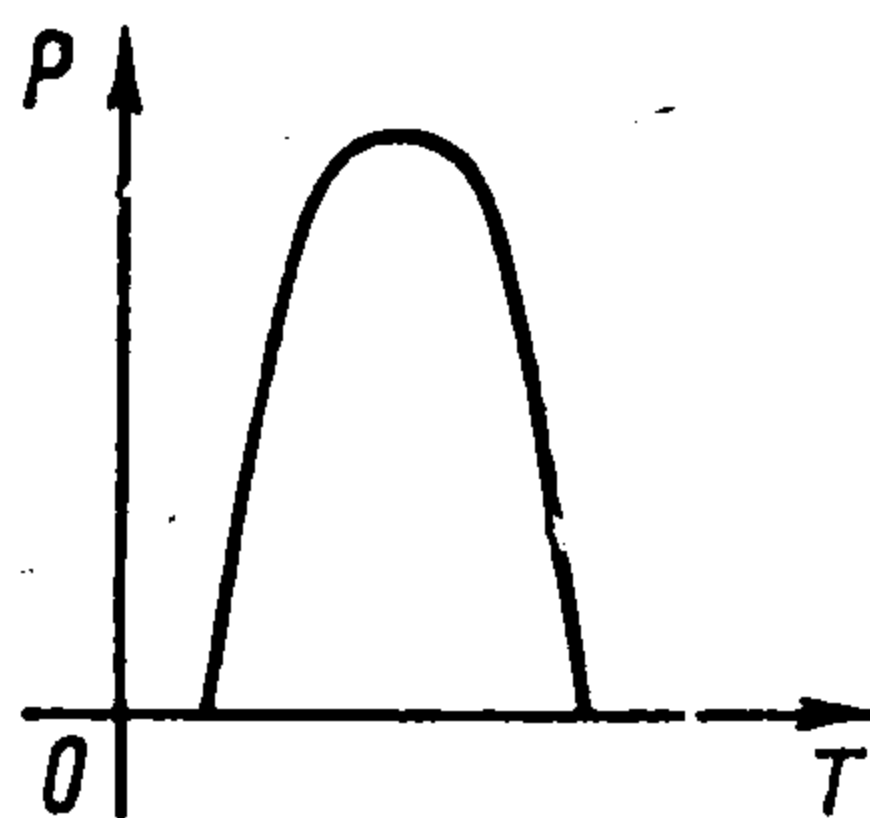
При изучении распространения пламени рассматривается следующая схема [1]. Имеется бесконечный стержень, в котором инициирован процесс горения. Распределение температуры в стержне описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(T)$$

с начальным распределением температуры вида, изображенного на фиг. 1. Функция $F(T)$, характеризующая выделение тепла в процессе горения, имеет вид, указанный на фиг. 2. Ищется решение вида $T(x - \omega t)$, т. е. решение в виде волны, бегущей со скоростью ω . Доказывается, что существует, и притом единственное, решение указан-



Фиг. 1



Фиг. 2

ного вида, соответствующее значению ω , которое характеризует скорость распространения пламени. В работе [2] рассмотрена задача аналогичного типа, при этом предполагается, что

$$F(0) = F(T^*) = 0, \quad F'(0) = \beta, \quad F'(T) \leq \beta, \quad T \geq 0$$

Показано, что значение ω может быть вычислено по формуле

$$\omega = 2a \sqrt{\beta}$$

Известно, однако, что многие экзотермические процессы характеризуются функциями $F(T)$, для которых условие $F'(0) \geq F'(T)$ не выполняется. В частности, взрывные процессы характеризуются функциями $F(T)$, растущими медленно для небольших T и очень быстро возрастающими при больших температурах [3].

Для этих процессов характерно медленное развитие в начальном периоде (периоде индукции) и очень быстрое развитие после достижения определенной температуры (период взрыва). Известно также [3], что диаметр сосуда существенно влияет на скорость процесса. Естественно предположить, что в процессах распространения пламени действие указанных факторов должно быть аналогичным, и попытаться на этом пути найти объяснение процессу быстрого роста скорости пламени перехода горения в детонацию, а также влиянию диаметра сосуда на скорость распространения. Однако непосредственное рассмотрение нелинейной задачи затруднительно (особенно в двумерной модели). Поэтому в настоящей статье рассматривается сначала линейная одномерная модель распространения пламени без учета выгорания вещества.

Оказывается, что пренебрежение выгоранием не влияет на предельную скорость пламени. Полученный результат используется для рассмотрения нелинейных эффектов.

Одномерная теория не может, однако, объяснить влияние диаметра сосуда на скорость распространения. Во второй части рассматривается теория, учитывающая радиальное изменение температуры, что позволяет ввести понятие критического диаметра сосуда и получить зависимость скорости распространения от коэффициента температуропроводности.

1. Рассмотрим полуограниченную трубку, в которой находится горючее вещество при температуре $T = 0$. В некоторый момент времени к концу $x = 0$ приложена температура $T = T_0$. Тогда, считая температуру в каждом сечении постоянной (одномерная теория), имеем (полагая $F(T) = \beta T$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta T, \quad T|_{t=0} = 0, \quad T|_{x=0} = T_0. \quad (1.1)$$

В дальнейшем удобно рассматривать случай, когда $T|_{x=0} = T_0$ при $0 < t < t_0$, $T|_{x=0} = 0$ ($t > t_0$). Очевидно, этот случай более близок к реальному процессу иницирования горения.

Положим $T = ue^{\beta t}$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = T_0 e^{-\beta t}$$

Решение этой задачи записывается в виде [4]

$$u(x, t) = \frac{xT_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{\beta t}}{V(t-\tau)^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)} d\tau$$

и поэтому

$$T(x, t) = \frac{xT_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{\beta(t-\tau)}}{V(t-\tau)^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)} d\tau \quad (1.2)$$

В предположении, что $T|_{x=0} = T_0$ ($0 < t < t_0$), $T|_{x=0} = 0$ ($t > t_0$), имеем из (1.2) для $t > t_0$

$$T(x, t) = \frac{xT_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{e^{\beta(t-\tau)}}{V(t-\tau)^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2(t-\tau)} d\tau$$

Считая t большим и t_0 малым, можно положить $t - \tau = t$ и

$$T(x, t) \approx \frac{xT_0 t_0}{2a\sqrt{\pi}} \frac{e^{\beta t}}{V t^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2 t} \quad (1.3)$$

Будем истолковывать распространение пламени как продвижение некоторой постоянной температуры. Тогда получим соотношение, связывающее x и t

$$\frac{x t_0 T_0}{2a\sqrt{\pi}} \frac{e^{\beta t}}{V t^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2 t} = \text{const}$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое решение вида

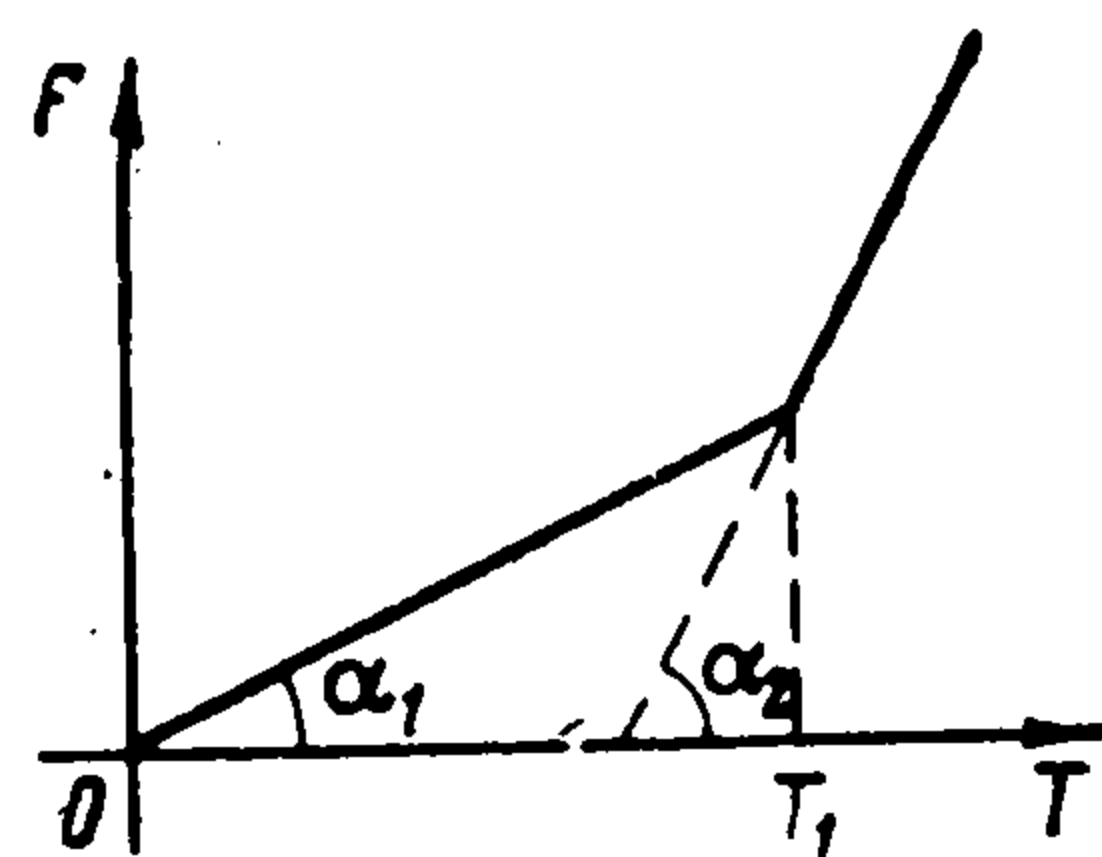
$$x = 2a\sqrt{\beta t} - A \ln t + B \quad (A, B = \text{const})$$

Отсюда при

$$dx/dt = 2a\sqrt{\beta} \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

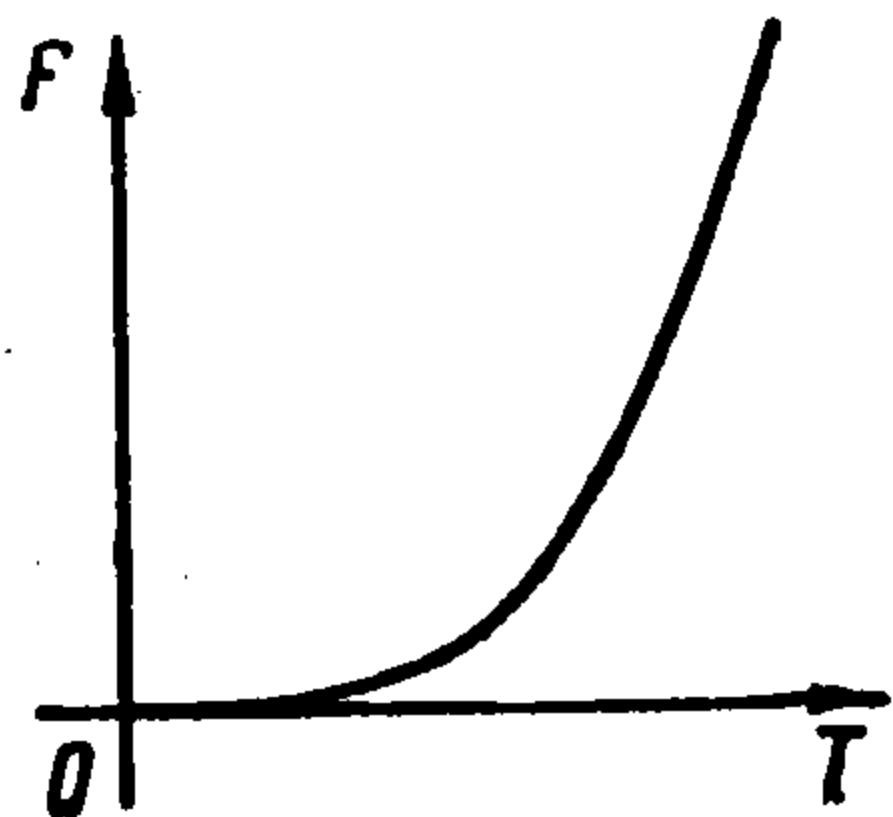
т. е. для предельной скорости распространения пламени получено то же значение, что и в [2]. Следовательно, учет выгорания не влияет на предельную скорость распространения пламени. Этот факт легко объяснить физически: тепло от далеко расположенных точек не влияет на скорость распространения, основное значение имеют коэффициент β и передача тепла близлежащим точкам.

Пусть теперь функция $F(T)$ имеет вид представленный на фиг. 3 ($\operatorname{tg} \alpha_1 = \beta_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \beta_2$, $\beta_2 > \beta_1$). Тогда скорость продвижения постоянной температуры $T < T_1$ следует вычислить согласно $\omega_1 = 2a \sqrt{\beta_1}$, а скорость продвижения постоянной температуры $T > T_1$ будет равна $\omega_2 = 2a \sqrt{\beta_2}$. Так как при увеличении t температура в каждой точке возрастает и большие температуры продвигаются быстрее малых, то большие температуры будут нагонять малые. Имеем ситуацию, аналогичную ситуации образования ударной волны с резко выраженным фронтом. Поэтому следует считать, что если функция $F(T)$ растет медленно, то фронт пламени будет сильно растянут, а в случае, когда $F(T)$ для малых T растет медленно, а для больших T — быстро, пламя характеризуется резко выраженным фронтом. Далее, если точка излома на кривой фиг. 3 расположена далеко справа и T_0 значительно меньше T_1 , то в коротких трубках скорость распространения не успевает достигнуть значения ω_2 . Период достижения в пламени температуры T_1 можно назвать периодом индукции. Если T_1 мало или T_0 близко к T_1 , период индукции мал. Очевидно, что эти рассуждения можно распространить на случай функции $F(T)$, имеющей более одного излома.

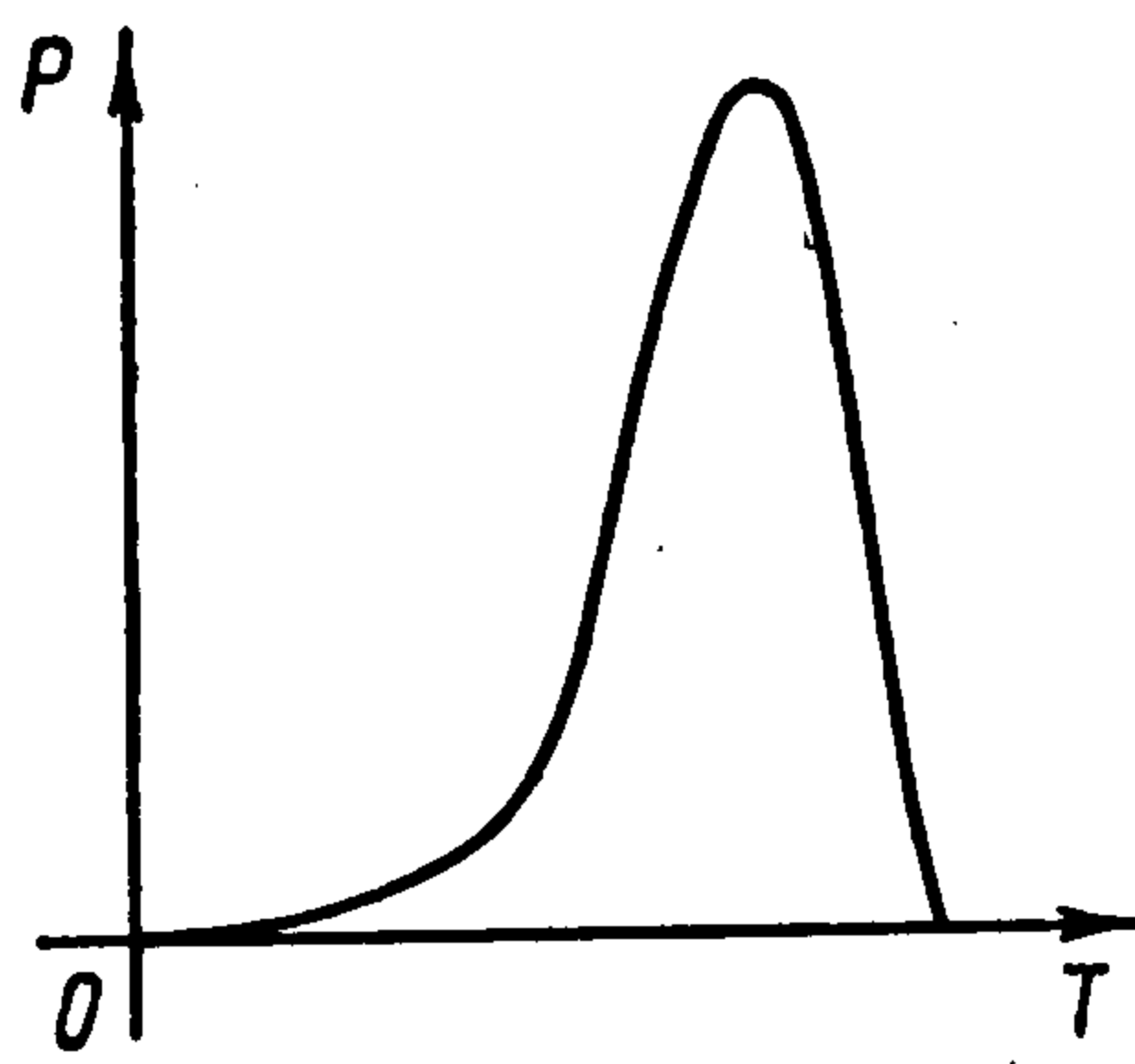


Фиг. 3

Если теперь $F(T)$ — гладкая кривая типа, указанного на фиг. 4, то при помощи кусочно-линейной аппроксимации можно предыдущие



Фиг. 4



Фиг. 5

выводы распространить и на этот случай и считать, что скорость распространения можно вычислять по формуле

$$\omega = 2a \sqrt{\beta}, \quad \beta = \max F'(T) \quad (1.4)$$

Если $F'(T)$ неограниченно возрастает, то существенным становится учет выгорания. Но участок кривой, соответствующий значениям T , для которых существенно выгорание, можно заменить касательной.

Объединяя все вышесказанное, можно сделать следующее заключение: если $F(T)$ имеет вид, указанный на фиг. 5, то скорость распространения пламени можно вычислять по формуле (1.4).

Для сильно взрывчатых веществ значение $\max F'(T)$ велико, и поэтому конечная скорость распространения процесса взрыва велика. В течение периода индукции скорость может остаться малой.

2. Изложенная одномерная теория не объясняет известного из опыта существенного влияния величины диаметра сосуда на скорость распространения пламени [5] и др. Для объяснения этого влияния рассмотрим линеаризованную теорию распространения пламени в полуограниченном цилиндре с учетом радиального распределения температуры. Важность учета радиального распространения тепла при изучении распространения пламени отмечена в книге [6] (стр. 554).

Имеем задачу

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \beta T$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad T|_{r=R} = 0, \quad T|_{x=0} = T_0 \quad (2.1)$$

где R — радиус трубы.

Можно также рассмотреть граничное условие вида $(T_r' + \alpha T)_R = 0$. Вновь полагая $T = ue^{\beta t}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=R} = 0, \quad u|_{x=0} = T_0 e^{-\beta t}$$

Пусть $u = X(x, t) \rho(r)$, тогда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \lambda^2 \rho = 0, \quad \rho|_{r=R} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - a^2 \lambda^2 X, \quad X|_{t=0} = 0, \quad X|_{x=0} = T_0 e^{-\beta t} \quad (2.3)$$

Решениями (2.2) являются функции $I_0(\lambda_n r)$, где $I_0(x)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, λ_n — корни уравнения $I_0(\lambda R) = 0$. Решениями задачи (2.3) будут

$$X_n(x, t) = \frac{x T_0}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp[-a^2 \lambda_n^2 (t - \tau)]}{V(t - \tau)^3} \exp \frac{-x^2}{4a^2 (t - \tau)} d\tau$$

Тогда

$$T(x, r, t) = e^{\beta t} u(x, r, t) =$$

$$= \sum_n A_n I_0(\lambda_n r) \frac{x T_0}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp[(\beta - a^2 \lambda_n^2)(t - \tau)]}{V(t - \tau)^3} \exp \frac{-x^2}{4a^2 (t - \tau)} d\tau$$

где A_n вычисляются из соотношения

$$\sum_n A_n I_0(\lambda_n r) = 1$$

Очевидно, основное значение при больших r имеет слагаемое, соответствующее $n = 1$. Поэтому

$$T(x, r, t) \approx A_1 I_0(\lambda_1 r) \frac{x T_0}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp[(\beta - a^2 \lambda_1^2)(t - \tau)]}{\sqrt{(t - \tau)^3}} \exp \frac{-x^2}{4a^2(t - \tau)} d\tau$$

($\lambda_1 = b/R$)

Здесь b — первый корень уравнения $I_0(x) = 0$. Будем, как и в п. 1, считать, что

$$T|_{x=0} = T_0 \quad (0 < t \leq t_0), \quad T|_{x=0} = 0 \quad (t > t_0)$$

Тогда

$$T(x, r, t) \approx A_1 I_0(\lambda_1 r) \frac{x t_0 T_0}{2a \sqrt{\pi}} \frac{\exp[(\beta - a^2 \lambda_1^2)t]}{t^{3/2}} \exp \frac{-x^2}{4a^2 t} \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что если $\beta - a^2 \lambda_1^2 \leq 0$, то $T \rightarrow 0$ при увеличении t , т. е. в этом случае процесс не будет распространяться. Если же $\beta - a^2 \lambda_1^2 > 0$, то, как следует из п. 1, процесс горения будет распространяться со скоростью

$$\omega = 2a \sqrt{\beta - a^2 \lambda_1^2} \quad (2.5)$$

Так как $\lambda_1 = b/R$, то это означает, что при $R \leq ab / \sqrt{\beta}$ процесс будет затухающим, а при $R > ab / \sqrt{\beta}$ инициируется процесс горения, распространяющийся со скоростью $\omega > 0$.

Максимальное значение ω при увеличении R равно $2a\sqrt{\beta}$.

Пусть $F(T)$ имеет вид, указанный на фиг. 3, тогда если $T_0 < T_1$, $R < ab / \sqrt{\beta_1}$, то пламя в трубе распространяться не будет. Если же $T_0 < T_1$, $R_1 > ab / \sqrt{\beta_1}$, то пламя вначале начнет распространяться с малой скоростью

$$\omega_1 = 2a \sqrt{\beta_1 - a^2 \lambda_1^2}$$

затем, когда температура достигнет значения T_1 , произойдет резкое увеличение скорости пламени до значения

$$\omega_2 = 2a \sqrt{\beta_2 - a^2 \lambda_1^2}$$

Таким образом, значение $R_* = ab / \sqrt{\beta_1}$ становится критическим: для $R \leq R_*$ пламя не распространяется, для $R > R_*$ пламя распространяется с большой скоростью. Как отмечалось, если период индукции велик, то в коротких трубах скорость пламени будет малой. Если $T_0 > T_1$, то сразу возникает режим распространения, соответствующий наклону β_2 . Поэтому может случиться, что если диаметр меньше критического (для значения β_1), т. е. $R < ab / \sqrt{\beta_1}$, но $R > ab / \sqrt{\beta_2}$, то при $T_0 < T_1$ не возникнет процесс горения, а при $T_0 > T_1$ процесс начнет распространяться с большой скоростью.

При помощи рассуждений, аналогичных проведенным в п. 1, рассматривается случай непрерывного изменения наклона касательной и учет выгорания. Вышеизложенные соображения могут быть применены для объяснения явления перехода горения в детонацию.

Далее, если $R > R_* = ab / \sqrt{\beta_1}$, то, как отмечалось выше, после достижения достаточной температуры пламя начнет распространяться со скоростью, соответствующей наклону β_2 . Как следует из формулы (2.5), при $R \rightarrow R_*$ скорость пламени стремится к величине $2a\sqrt{\beta_2 - \beta_1}$. Максимальная скорость распространения пламени равна $\omega_{\max} = 2a\sqrt{\beta_2}$, при $R \rightarrow R_*$ она становится равной

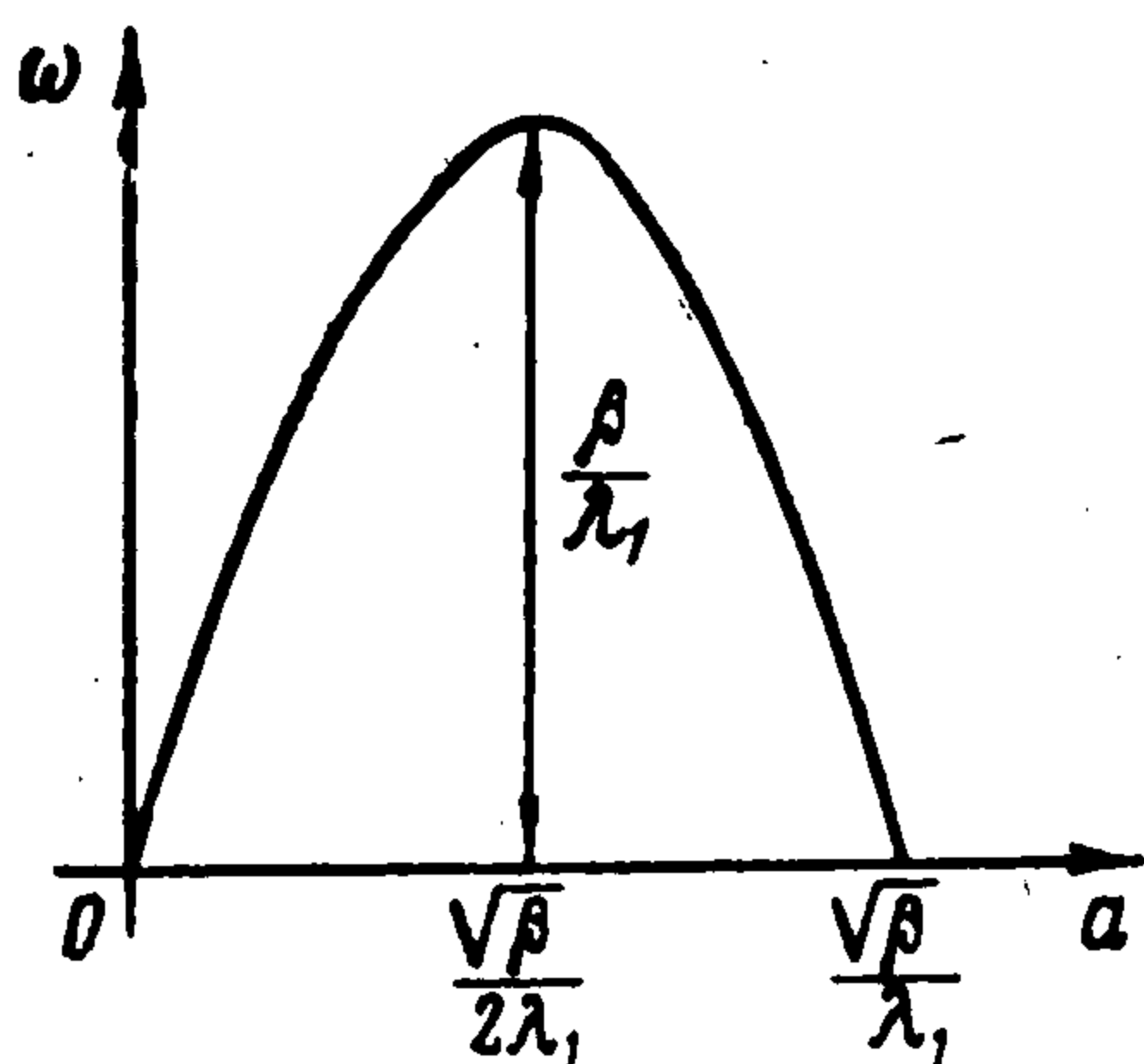
$$\omega_* = 2a\sqrt{\beta_2 - \beta_1} = 2a\sqrt{\beta_2}\sqrt{1 - \beta_1/\beta_2}$$

Таким образом,

$$\omega_* / \omega_{\max} = \sqrt{1 - \beta_1/\beta_2} \quad (2.6)$$

На фиг. 6 представлена зависимость скорости ω от коэффициента температуропроводности, построенная согласно (2.5).

Вначале при возрастании a скорость ω также возрастает до максимального значения β/λ_1 , затем убывает до нуля. Этот факт вполне физически объясним, так как при увеличении a увеличивается количество тепла, отдаваемого через стенки трубы. Двойственная роль теплопроводности отмечена в книге [7] (стр. 288). Может оказаться, что учет зависимости скорости распространения пламени от коэффициента температуропроводности позволит объяснить некоторые особенности распространения пламени. Коэффициент температуропроводности зависит от температуры, а также меняется по ходу реакции в связи с изменением концентрации реагирующих веществ.



Фиг. 6

Предположим, что коэффициент температуропроводности зависит от температуры, увеличиваясь с ростом последней. Тогда на участке, где температура велика, произойдет быстрое охлаждение через стенку, пламя на этом участке погаснет. Слой, лежащий впереди, за это время мало прогреется и начнет гореть только по истечении некоторого промежутка времени (период индукции) и т. д., возникнет пульсирующее горение [5,7].

Автор благодарит С. В. Фальковича за полезные обсуждения.

Поступила 2 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г е л ь ф а н д И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2.
2. К о л м о г о р о в А. Н., П е т р о в с к и й И. Т., П и с к у н о в П. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюл. МГУ, 1937, т. 1, № 6.
3. К а г а н о в С. А. К нестационарной теории теплового взрыва. ПМТФ, 1965, № 1.
4. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики, т. II. 1948.
5. Combustion processes. Ed. Lewis B., Pease R. N., Taylor H. S., 1956 (русск. перев.: Процессы горения. Физматгиз, 1961).
6. Fundamentals of gas dynamics. Ed. H. Emmons, 1958 (русск. перев.: Основы газовой динамики. Изд. иностр. лит., 1963).
7. А н д р е е в К. К. Термическое разложение и горение взрывчатых веществ. Госэнергоиздат, 1957.