Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

СХОДЯЩАЯСЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

Е. И. Забабахин, В. А. Симоненко

(Москва)

Сходящаяся сферическая волна по мере приближения к центру неограниченно усиливается, что установили Гудерлей [1] и Л. Д. Ландау и К. П. Станюкович [2], указавшие автомодельное решение чисто газодинамической задачи о фокусировке волны. Однако в соответствующем физическом явлении можно ожидать значительного влияния теплопроводности, так как возникающая высокая температура благоприятствует лучистому теплообмену.

Представляет интерес рассмотреть фокусировку волны с его учетом и, в частности, выяснить остается ли кумуляция энергии неограниченной и в этом случае.

Сделаем это для простоты лишь для достаточно сильной волны, в которой излучение всюду находится в равновесии с веществом и ширина зоны прогрева велика по сравнению с пробегом излучения, в том числе в ранней стадии, когда эта ширина еще мала по сравнению с радиусом волны.

Теплопроводность размывает фронт волны: перед скачком уплотнения появляется зона прогрева и движения газа. Общие свойства этого явления описаны, например, в книге Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [3].

Вычислим ширину зоны прогрева сначала для плоской стационарной волны, для чего выпишем уравнения сохранения для волны, идущей по олодному газу:

$$\rho u = \rho_0 D, \qquad p + \rho u^2 = \rho_0 D^2$$

$$\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) + pu + Q = \frac{\rho_0 D^3}{2}$$

Здесь Q — поток тепла, остальные обозначения — обычные (в принятой системе координат волна покоится).

Рассмотрим случай, когда лучистая энергия играет роль только в теплообмене, но плотность ее $(4 / c)\, \sigma T^4$ еще мала по сравнению с $p / (\gamma - 1)$, т. е. будем пользоваться уравнением состояния идеального газа $p = (R / \mu)\, \rho T$, пренебрегая давлением излучения.

Для лучистой теплопроводности

$$Q = -\frac{lc}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{c}\,\sigma T^4\right)$$

где c — скорость света, l — пробег излучения.

Если он определяется комптоновским рассеянием, то

$$l \sim \rho^{-1} \qquad \text{или} \qquad l = L\,(\rho_0 / \rho) \qquad (L = \text{const})$$

Таким образом, имеем четыре уравнения, при помощи которых u, p, ρ и dT / dx можно выразить через T.

Опуская выкладки, приведем лишь результат для величин ρ и dT / dx:

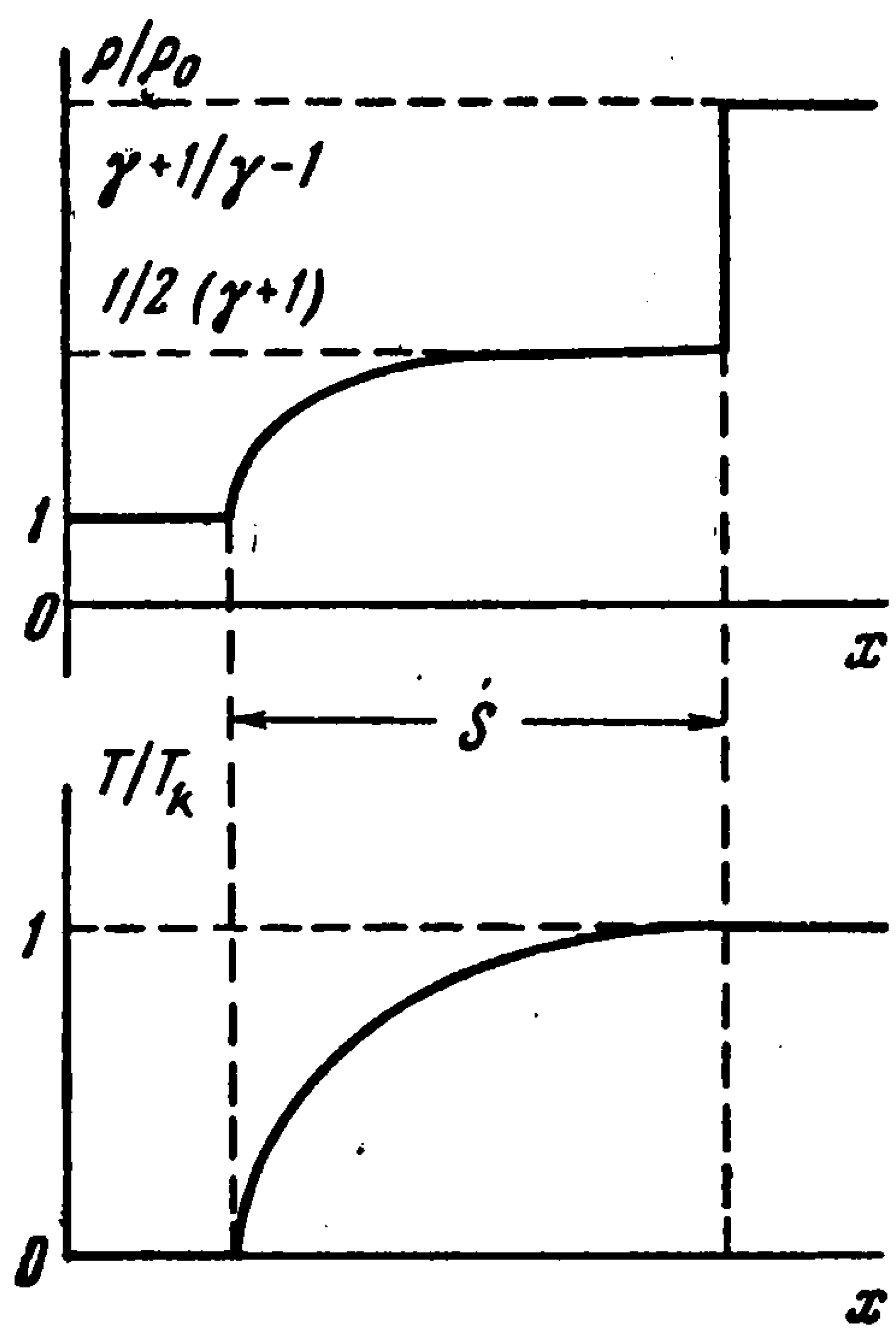
$$\frac{\rho}{\rho_0} = 2\left[1 + \left(1 - \frac{8(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}\tau\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\left(\tau = \frac{T}{T_k}, \quad T_k = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}\frac{\mu D^2}{R}\right) \qquad (1)$$

Здесь T_k — конечная температура за волной;

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{B\tau^3} \times \left[\frac{2\tau / (\gamma + 1) - 1}{1 + \sqrt{1 - 8\tau(\gamma - 1) / (\gamma + 1)^2}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$B = \frac{256}{3}\frac{(\gamma - 1)^4}{(\gamma + 1)^8}\frac{L\mu^4\sigma D^5}{\rho_0 R^4} \qquad (2)$$



Фиг. 1

В зоне прогрева τ изменяется от 0 до 1, при этом ρ / ρ_0 увеличивается от 1 до значения $^1/_2\,(\gamma + 1)$ (что видно из (1)) и далее скачком достигает конечного значения $(\gamma + 1) / (\gamma - 1)$ $(\gamma \leqslant 3)$. Проинтегрировав (2) по τ от 0 до 1, найдем полную ширину S зоны прогрева перед скачком уплотнения

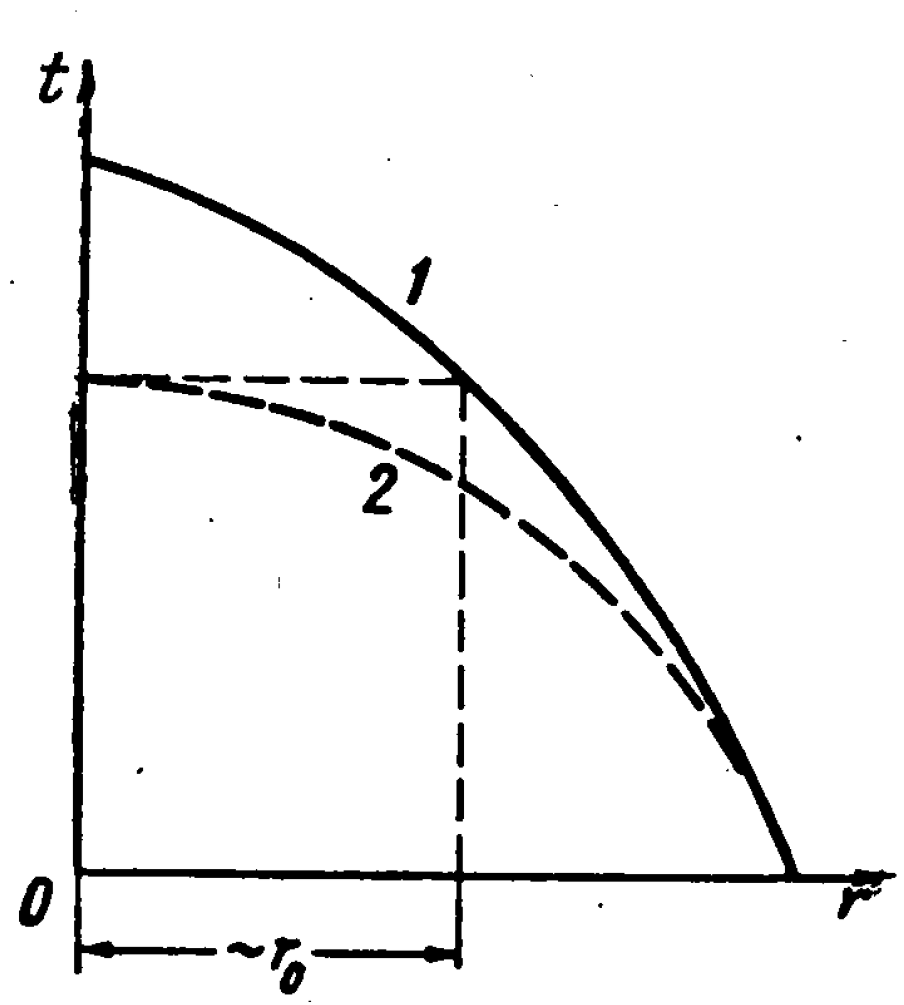
$$S = BJ, \quad J = \int_0^1 \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 8\tau(\gamma - 1) / (\gamma + 1)^2}\right)\tau^3 d\tau}{2\tau / (\gamma + 1) - 1 + {}^1/_2\left(1 + \sqrt{1 - 8\tau(\gamma - 1) / (\gamma + 1)^2}\right)}$$

При $\gamma = 1.4$

$$J = 0.871, \qquad S = 1.73 \cdot 10^{-3}\,\frac{L\sigma\mu^4 D^5}{\rho_0 R^4} \qquad (3)$$

Схемы пространственного распределения ρ и T в зоне прогрева показаны на фиг. 1.

Вернемся к сходящейся волне. Как видно из (3), ширина зоны прогрева быстро растет с увеличением D, т. е. по мере приближения волны к центру. Приход в центр фронта тепловой волны будет характерным моментом прекращения степенного роста температуры, а достигнутая к этому моменту температура будет порядка максимальной температуры всего процесса.



Фиг. 2

В сходящейся волне $D = A / r^\alpha$ ($\alpha = 0.395$ для $\gamma = 1.4$), где A характеризует силу волны (скорость ее на единичном радиусе).

Характерный размер волны r_0 определим, считая, что S порядка r_0. Подставляя выражение для D в (3) и полагая $S \sim r_0$, получаем соотношение для r_0, откуда находим

$$r_0 \sim \left(\frac{L\mu^4\sigma A^5}{\rho_0 R^4}\right)^{\frac{1}{1+5\alpha}}$$

Определим максимальную температуру процесса. В ударной волне $T \sim D^2 / R$, т. е. в сходящейся волне

$$T \sim \mu A^2 / R r^{2\alpha}$$

Подставляя вместо r величину r_0, получим выражение для максимальной температуры

$$T_{\max} = \text{const}\,(\rho_0^{2\alpha} R^{3\alpha-1} A^2 \mu^{1-3\alpha} L^{-2\alpha}\,\sigma^{-2\alpha})^{\frac{1}{1+5\alpha}}$$

В частности, для $\gamma = 1.4$ $(\alpha = 0.395)$

$$T_{\max} = \text{const}\,\rho_0^{0.265} R^{0.060} \mu^{-0.060} A^{0.672} (L\sigma)^{-0.265}$$

Здесь const — безразмерный коэффициент порядка единицы; он может быть найден только путем полного решения задачи о фокусировке волны с теплопроводностью, что в принципе может быть сделано численно.

Таким образом, при наличии теплопроводности достигаемая температура конечна, но за счет усиления волны (увеличения A) она может быть сделана сколько угодно большой. В этом смысле ограничение температуры теплопроводностью непринципиально.

Схема явления фокусировки волны в нашем случае показана на фигуре. В центр последовательно приходят тепловая и ударная волны. Каждая из них вблизи центра описывается своим автомодельным решением (их не рассматриваем), а общего автомодельного решения для всего процесса нет.

Рассмотрим качественно поведение ударной волны у центра.

В стадии ее фокусировки температура постоянна, вблизи центра она не зависит ни от r, ни от t, т. е. волна оказывается изотермической. Амплитуда ее может стремиться к нулю, конечному пределу или бесконечности (осцилляции исключаем). Покажем, что реализуется третья возможность.

Стремление к нулю исключено, так как известно, что всякая слабая ударная волна перед центром не ослабевает, а усиливается по закону

$$\Delta p \sim r^{-1}$$

Если бы амплитуда стремилась к конечному пределу, то такая волна вблизи центра описывалась бы автомодельным решением с постоянной амплитудой. Подстановкой такого решения в уравнения движения можно убедиться, что оно им не удовлетворяет. Остается лишь третья возможность, т. е. неограниченный рост (каков закон этого роста — не установлено). Таким образом, теплопроводность лишь видоизменила неограниченную кумуляцию, но не устранила ее: вместо конечной плотности и бесконечной температуры возникла конечная температура и бесконечная плотность.

Авторы благодарны Ю. П. Райзеру за ценные замечания.

Поступила 19 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Uerdichtungsstösse in der Nähe des Kygelmittelpunktes bzw der Zylinderachse Luftfahrforchung, 1942, v. 19, № 9.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.