

К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

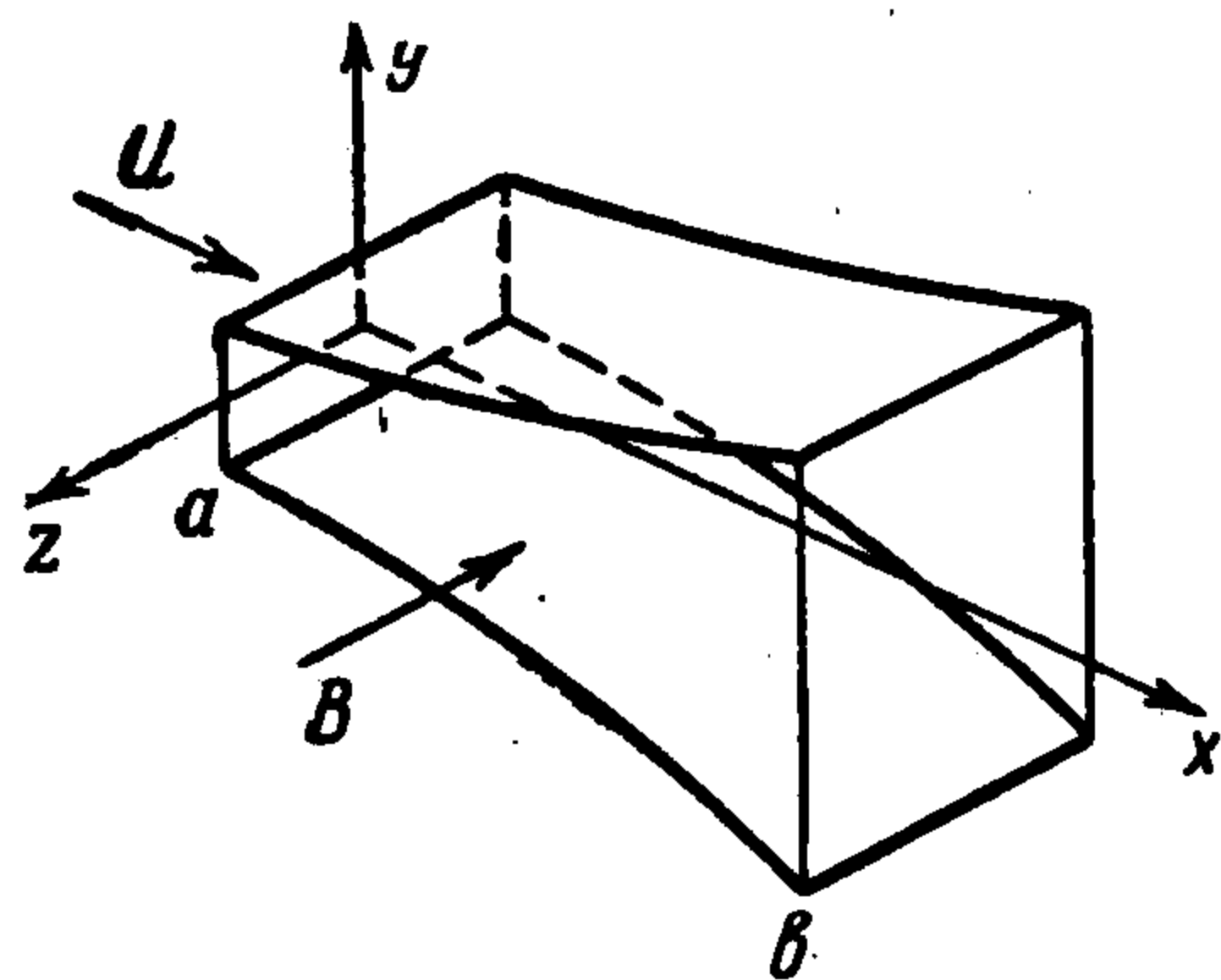
А. Н. Крайко, Ф. А. Слободкина

(Москва)

Для расчета одномерного течения проводящей среды при малых магнитных числах Рейнольдса необходимо знать форму канала и распределение напряженностей электрического и магнитного полей. К настоящему времени имеется большое число работ, посвященных рассмотрению различных частных примеров. Однако при исследовании течения в канале магнитогидродинамического генератора большой интерес представляют задачи, в которых форма канала и электромагнитное поле выбираются так, чтобы обеспечить экстремум определенных характеристик, например, максимум снимаемой мощности, минимум потерь и т. п. Настоящая работа посвящена решению этих задач с использованием методом вариационного исчисления. Решение иллюстрируется примерами.

Имеющиеся в литературе попытки решения рассматриваемой задачи или не привели к конструктивным результатам [1, 2], или имеют ограниченную ценность ввиду рассмотрения только некоторых узких классов течений, например, изотермических [3].

1. Рассмотрим стационарное течение невязкой и нетеплопроводной среды электропроводности σ° в плоском канале (фиг. 1) при внешнем магнитном поле $B^\circ = (0, 0, -B^\circ)$. Верхняя и нижняя стенки канала при $x^\circ \geq 0$ имеют потенциал φ° и $-\varphi^\circ$ соответственно. При $x^\circ < 0$ стенки канала являются изоляторами и $B^\circ \equiv 0$. Газ течет из ресивера, где он имеет плотность ρ_s° , энтальпию h_s° и электропроводность σ_s° . Будем считать, что при $x^\circ < 0$ течение осуществляется без потерь.



Фиг. 1

Предполагая, что течение одномерно, магнитные числа Рейнольдса малы, справедлива обычная форма закона Ома, и пренебрегая током, текущим параллельно оси канала, найдем, что течение описывается уравнениями движения, энергии и неразрывности [1,4]

$$L_1 \equiv \rho u u' + p' + \Delta \sigma B \left(u B - \frac{\Phi}{y} \right) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{B_m^{\circ 2} \sigma_s^\circ l^\circ}{\rho_s^\circ \sqrt{2 h_s^\circ}} \right) \quad (1.1)$$

$$L_2 \equiv \left[y u \left(\frac{x}{x-1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) \right]' + \Delta \sigma \Phi \left(u B - \frac{\Phi}{y} \right) = 0, \quad L_3 \equiv (y \rho u)' = 0$$

Здесь $2y$ — высота канала, u — скорость, p — давление, Δ — безразмерный параметр, штрихом обозначены производные по x , величины с индексом $^\circ$ — размерные, а без него — безразмерные. Связь размерных

и безразмерных переменных дается соотношениями

$$x = \frac{x^\circ}{l^\circ}, \quad y = \frac{y^\circ}{y_a^\circ}, \quad u = \frac{u^\circ}{\sqrt{2h_s^\circ}}, \quad \rho = \frac{\rho^\circ}{\rho_s^\circ}$$

$$p = \frac{p^\circ}{2\rho_s^\circ h_s^\circ}, \quad \sigma = \frac{\sigma^\circ}{\sigma_s^\circ}, \quad B = \frac{B^\circ}{B_m^\circ}, \quad \Phi = \frac{\Phi^\circ}{y_a^\circ B_m^\circ \sqrt{2h_s^\circ}}$$

Здесь l° и B_m° — константы с размерностями длины и напряженности магнитного поля, нижние индексы a, b, \dots приписываются параметрам в соответствующих точках (исключение — индексы m и s). При написании уравнения энергии полагалось, что среда является совершенным газом с показателем адиабаты κ .

Как видно из (1.1), для определения течения нужно задать управляющие параметры: длину канала x_b , его форму $y(x)$, магнитное поле $B(x)$, потенциал $\Phi(x)$ и давление p_∞ внешней среды, в которую происходит истечение. Каждому набору этих величин соответствует свое значение снимаемой с единицы ширины генератора мощности

$$N = \frac{N^\circ}{2\rho_s^\circ (2h_s^\circ)^{3/2} y_a^\circ} = \Delta \int_0^{x_b} \sigma \Phi \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) dx \quad (1.2)$$

Рассмотрим задачу об определении $y(x), B(x), \Phi(x), x_b$ и p_∞ , реализующих максимум функционала N .

Варьируемые функции должны удовлетворять условиям, связанным с постановкой задачи и с границами применимости уравнений (1.1).

Начальное сечение канала будем фиксировать

$$y_a = y(0) = 1, \quad x_a = 0 \quad (1.3)$$

Зададим также максимально допустимые размеры: высоту $2Yy_a^\circ$ и длину l° . Тогда

$$y(x) \leq Y, \quad 0 \leq x \leq x_b \leq 1 \quad (1.4)$$

Возможности устройств, создающих магнитное поле, лимитируют максимально допустимую напряженность. Приняв модуль этой величины за B_m° , получим

$$-1 \leq B(x) \leq 1 \quad (1.5)$$

Аналогичным образом

$$-\Phi_m \leq \Phi(x) \leq \Phi_m \quad (1.6)$$

Наконец, ρ_a и p_a в силу предположения об отсутствии потерь при $x \leq 0$ связаны с u_a соотношениями

$$\rho_a = (1 - u_a^2)^{1/(\kappa-1)}, \quad p_a = \frac{\kappa-1}{2\kappa} (1 - u_a^2)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (1.7)$$

Из условий, связанных с границами применимости уравнений (1.1) рассмотрим лишь одно

$$|y'(x)| \leq k < \infty \quad (1.8)$$

где k — заданная константа. Это условие отражает то обстоятельство, что для применимости одномерных уравнений угол раствора канала не должен быть слишком большим.

Сказанное позволяет определить класс допустимых функций. Функции $B(x)$ и $\varphi(x)$ могут иметь разрывы первого рода. Функция $y(x)$ непрерывна ввиду (1.8). Предполагая отсутствие ударных волн, получим из (1.1), что $u(x)$, $\rho(x)$ и $p(x)$ также непрерывны, хотя их производные и разрывны в точках разрыва y' , B и φ .

Может возникнуть необходимость в дополнительных ограничениях типа (1.8). Например, при сверхзвуковом течении для обеспечения непрерывности u , ρ и p нужно требовать отсутствия точек излома контура, т. е. наложить ограничение на $y''(x)$. Аналогично можно сформулировать условие малости магнитного числа Рейнольдса и т. п. Не делая этого, заметим, что наличие в решении участков, определяемых подобными неравенствами, указывает на необходимость применения уравнений, справедливых в более широкой области.

Сформулируем вариационную задачу. Среди допустимых функций

$$y = y(x), \quad u = u(x), \quad \rho = \rho(x), \quad p = p(x), \quad B = B(x), \quad \varphi = \varphi(x)$$

удовлетворяющих условиям (1.3) — (1.8) и дифференциальным связям (1.1) требуется, найти те, которые реализуют максимум функционала (1.2).

Прежде чем переходить к решению вариационной задачи, заметим, что при расчетах вместо системы (1.1) удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{\kappa r u}{y(\kappa p - \rho u^2)} y' - \frac{(\kappa - 1)\varphi - \kappa u B}{y(\kappa p - \rho u^2)} \Delta\sigma \left(uB - \frac{\varphi}{y} \right) \\ p' &= \frac{\kappa r \rho u^2}{y(\kappa p - \rho u^2)} y' + \frac{(\kappa - 1)\rho u(\varphi - y u B) - \kappa u r B}{y(\kappa p - \rho u^2)} \Delta\sigma \left(uB - \frac{\varphi}{y} \right) \\ \rho &= \frac{c}{y u} \quad (c = \rho_a u_a = y_b \rho_b u_b) \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Пусть электропроводность постоянна ($\sigma \equiv 1$). Для решения задачи оставим вспомогательный функционал

$$I = \int_0^{x_b} \left[\Delta\varphi \left(uB - \frac{\varphi}{y} \right) + \mu_1(x) L_1 + \mu_2(x) L_2 + \mu_3(x) L_3 \right] dx$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — переменные множители Лагранжа. Очевидно, что при допустимом варьировании вариации функционалов I и N совпадают в силу выполнения уравнений (1.1).

Найдем первую вариацию I .

Так как допустимые функции или их производные могут терпеть разрывы, разобьем интервал интегрирования на участки непрерывности y' , B и φ . Для получения всех необходимых соотношений достаточно рассмотреть одну точку разрыва d . Параметрам левее (правее) d будем приписывать индекс минус (плюс). При варьировании положение d может меняться. Можно показать, что, если δx_d — изменение абсциссы точки d , то для любой переменной z имеем $\delta z_{d+} = \delta z_{d-} \mp (z'_- - z'_+)_d \delta x_d$. Далее, пользуясь произволом в определении множителей Лагранжа, положим

$$\mu_{1d+} = \mu_{1d-}, \quad \mu_{2d+} = \mu_{2d-}, \quad \mu_{3d+} = \mu_{3d-} \quad (2.1)$$

Учитывая сказанное, а также то, что $\delta x_a = \delta y_a = 0$ в силу (1.3), а δu_a , $\delta \rho_a$ и δp_a связаны соотношениями (1.7), получим

$$\begin{aligned} \delta N = \delta I = & \int_0^{x_b} (W_1 \delta y + W_2 \delta B + W_3 \delta \varphi + W_4 \delta u + W_5 \delta \rho + W_6 \delta p) dx + \\ & + (U_- - U_+) \delta x_d + V_b \delta x_b - (1 - u_a^2)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left(1 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} u_a^2\right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \mu_3\right) \delta u_a + \\ & + \left[\mu_2 u \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} p + \frac{\rho u^2}{2}\right) + \mu_3 \rho u\right]_b \delta y_b + \left[\mu_1 \rho u + \mu_2 y \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} p + \frac{3}{2} \rho u^2\right) + \right. \\ & \left. + \mu_3 \rho y\right]_b \delta u_b + \left(\mu_2 \frac{y u^3}{2} + \mu_3 y u\right)_b \delta \rho_b + \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\kappa}{\kappa-1} y u\right)_b \delta p_b \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$U = \Delta (\mu_1 B + \mu_2 \varphi - \varphi) \left(\frac{\varphi}{y} - uB\right), \quad V = \Delta \varphi \left(uB - \frac{\varphi}{y}\right)$$

Здесь W_i — известные функции $y, u, \rho, p, B, \varphi$ и множителей Лагранжа. Вариации, входящие в (2.2), не независимы. Множители Лагранжа выберем такими, чтобы в выражении для δI остались лишь вариации управляющих параметров, т. е. $y, B, \varphi, x_d, x_b, y_b$ и p_∞ . Покажем, что это можно сделать для любого течения. Определим μ_1, μ_2 и μ_3 так, чтобы на частках непрерывности y', B и φ было

$$W_4 = W_5 = W_6 = 0$$

Отсюда с учетом выражений для W_i и простых преобразований с использованием (1.9) получим

$$\mu_i' = M_i (y, u, \rho, p, B, \varphi, \mu_1, \mu_2, y') \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} M_1 = & \frac{\kappa u}{\rho u^2 - \kappa p} \left[\frac{\mu_1 \rho u}{y} y' + \Delta B (\mu_1 B + \mu_2 \varphi + \varphi) \right], \quad M_2 = \frac{1-\kappa}{\kappa y} u M_1 \\ M_3 = & \frac{\kappa-1}{2y(\rho u^2 - \kappa p)} \left\{ \frac{\mu_1 u}{y} \left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} p + \rho u^2\right) y' + \right. \\ & \left. + \Delta \left[(\mu_1 B + \mu_2 \varphi + \varphi) u^2 B - 2\mu_1 \left(uB - \frac{\varphi}{y}\right) \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} uB - \frac{\varphi}{y}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Для интегрирования системы (2.3) в дополнение к условиям (2.1) в точках разрыва необходимо иметь еще три условия. Их вид зависит от режима течения.

При дозвуковом истечении $p_b = p_\infty$ и $\delta p_b = \delta p_\infty$. Если скорость на выходе равна скорости звука ($\kappa p_b = p_b u_b^2$), то

$$\delta p_b = \frac{u_b^2}{\kappa} \delta \rho_b + \frac{2\rho_b u_b}{\kappa} \delta u_b \quad (2.4)$$

Наконец, при полностью сверхзвуковом течении u_a является управляющим параметром, так как может меняться за счет изменения формы канала при $x < 0$. Малые же изменения остальных управляющих параметров на u_a в этом случае не влияют. Отметим, что при дозвуковом течении u_a не зависит от формы канала при $x < 0$, а полностью определяется течением при $x > 0$.

В соответствии с этим в первых двух случаях, приравнявая нулю коэффициент перед δu_a , получим

$$2\mu_{3a} = -\mu_{2a} \quad (2.5)$$

Кроме того, при дозвуковом истечении приравняем нулю коэффициенты перед δu_b и δp_b . В результате получим

$$\mu_{1b} = -y_b \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho u} + u \right)_b \mu_{2b}, \quad \mu_{3b} = -\frac{u_b^2}{2} \mu_{2b} \quad (2.6)$$

При звуковом режиме, исключая δp_b при помощи (2.4), таким же путем найдем условия

$$\mu_{1b} = -\frac{\kappa y_b u_b}{\kappa-1} \mu_{2b}, \quad \mu_{3b} = -\frac{u_b^2}{2} \mu_{2b} \quad (2.7)$$

При сверхзвуковом течении, приравнявая нулю коэффициенты перед δu_b , δp_b и δr_b , получим

$$\mu_{1b} = \mu_{2b} = \mu_{3b} = 0 \quad (2.8)$$

Итак, множители Лагранжа всегда можно выбрать так, что в выражении для δI останутся вариации только независимо варьируемых величин. Для этого достаточно выполнения условий, полученных выше. При любых заданных x_b , $y(x)$, $B(x)$, $\varphi(x)$ и p_∞ течение определяется уравнениями (1.1) или (1.9) и условиями: $p_b = p_\infty$ — при дозвуковом истечении

$$\kappa p_b = \rho_b u_b^2 \quad (2.9)$$

— при звуковом истечении (последнее возможно лишь при $p_\infty \leq p_b$), заданным u_a — при сверхзвуковом течении и (1.7) — во всех случаях. Наконец, μ_1 , μ_2 и μ_3 определяется по (2.3) при условиях: (2.5) и (2.6), или (2.5) и (2.7), или (2.8) — соответственно при дозвуковом, звуковом и сверхзвуковом режимах. Отметим, что условия непрерывности 2.1) можно не использовать, если (2.3) применять на всем интервале интегрирования. Непрерывность μ_i при этом обеспечивается автоматически.

3. В соответствии с выбором множителей Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta N = \delta I = & \int_0^{x_b} (W_1 \delta y + W_2 \delta B + W_3 \delta \varphi) dx + (U_- - U_+)_a \delta x_a + \\ & + V_b \delta x_b + \left[\mu_2 u \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) + \mu_3 \rho u \right]_b \delta y_b + \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\kappa}{\kappa-1} y u \right)_b \delta p_\infty - \\ & - (1 - u_a^2)^{\frac{2-\kappa}{\kappa-1}} \left(1 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} u_a^2 \right) \left(\frac{\mu_2}{2} + \mu_3 \right)_a \delta u_a \end{aligned} \quad (3.1)$$

Слагаемое с δp_∞ есть в (3.1) лишь при дозвуковом течении, а с δu_a — лишь при сверхзвуковом течении.

Вариации, входящие в (3.1), независимы. Это позволяет получать условия экстремума как по всем управляющим параметрам, так и по каждому из них в отдельности. Кроме того, рассматривая вариацию некоторой величины в произвольной точке (например, y), остальные вариации можно считать отсутствующими.

Прежде всего найдем оптимальное p_∞ при дозвуковом течении. Для этого приравняем нулю коэффициент перед δp_∞ . Вспомогая (2.6), найдем, что это приводит к условию (2.9), т. е. среди дозвуковых режимов оптимальным является режим звукового истечения.

Аналогично в сверхзвуковом случае экстремум реализуется при выполнении одного из условий

$$u_a = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}, \quad u_a = 1, \quad (\mu_2 + 2\mu_3)_a = 0 \quad (3.2)$$

В первом случае u_a равна звуковой скорости, а во втором — максимальной. Напомним, что в силу постановки задачи эти условия соответствуют экстремуму при фиксированном y_a . Можно показать, что первое значение u_a реализует экстремум и тогда, когда фиксирован расход газа, а не y_a . Характер экстремума определяется сравнением величины N при всех корнях (3.2).

Чтобы найти оптимальную длину канала, нужно приравнять нулю множитель при δx_b . Однако, если $x_b = 1$, то допустимые $\delta x_b < 0$, и для обеспечения максимума N достаточно, чтобы этот множитель был неотрицательным. Итак,

$$V_b \equiv \Delta\Phi_b \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right)_b \geq 0 \quad (x_b \leq 1) \quad (3.3)$$

где знак неравенства может иметь место только при $x_b = 1$. Отсюда следует естественный вывод: длина канала должна быть выбрана так, чтобы на конечном участке осуществлялся генераторный режим.

Таким же путем находим необходимое условие максимума по y_b

$$\left[\mu_2 u \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) + \mu_3 \rho u \right]_b \geq 0$$

Здесь неравенство может иметь место лишь при $y_b = Y$. При сверхзвуковом течении это условие выполняется в силу (2.8) всегда, а при дозвуковом и звуковом режимах в силу (2.6) или (2.7) принимает вид

$$\mu_{2b} \geq 0 \quad (3.4)$$

и при $y_b < Y$ определяет оптимальное y_b .

Наконец, приравнивая нулю коэффициент перед δx_d , получим необходимое условие экстремума в точках разрыва

$$(U_- - U_+)_d = 0 \quad (3.5)$$

Подчеркнем, что в точках излома контура никаких дополнительных условий не появилось.

Рассмотрение внеинтегральных членов в (3.1) дало условия для определения оптимальных p_∞ , u_a , x_b и x_d при произвольных $y(x)$, $B(x)$ и $\Phi(x)$. Исключение составляет условие (3.4). В действительности вариация y_b не независима, так как в силу (1.8) влечет за собой изменение y при $x < x_b$. При малых изменениях y_b вклад, вносимый за счет этого, более высокого порядка малости, так как y можно проварьировать лишь на отрезке по x того же порядка, что и δy_b . Это и позволяет считать δy_b независимой при получении (3.4). Поэтому при произвольной форме канала (3.4) служит лишь для проверки, а не для получения оптимального y_b .

При построении экстремальных $y(x)$, $B(x)$ и $\Phi(x)$, как и при получении (3.3) и (3.4), будем помнить, что искомые кривые могут состоять из

участков двустороннего и краевого экстремума. Так как на первых вариации произвольны, то здесь должны обращаться в нуль W_1 , W_2 или W_3 .

В результате получаем уравнения

$$W_1 \equiv \frac{\Delta}{y(\rho u^2 - \kappa p)} \left\{ \mu_1 \rho u (\kappa - 1) \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \right. \\ \left. + (\mu_1 B + \mu_2 \Phi + \Phi) \left[\kappa p \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \rho u^2 \frac{\Phi}{y} \right] \right\} = 0 \quad (3.6)$$

$$W_2 \equiv \Delta \left[u (\mu_1 B + \mu_2 \Phi + \Phi) + \mu_1 \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \right] = 0 \quad (3.7)$$

$$W_3 \equiv \Delta \left[(1 + \mu_2) \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) - (\mu_1 B + \mu_2 \Phi + \Phi) y^{-1} \right] = 0 \quad (3.8)$$

соответственно, для определения формы канала, напряженности магнитного поля и потенциала. При получении выражения для W_1 производные u' , p' , μ_1' , μ_2' и μ_3' исключены при помощи (1.9) и (2.3). Отсутствие в W_1 производной y' указывает на двукратную вырожденность задачи. Отметим, что это же обстоятельство вытекает и из результата заметки [2]. Каждое из этих уравнений применяется лишь там, где определяемые из них y , B и Φ удовлетворяют условиям (1.4) — (1.6) и (1.8). В противном случае имеет место крайовой экстремум. Здесь соответствующая функция равна граничному значению, вытекающему из (1.4), (1.5), (1.6) или (1.8). Так как на этих участках допустимые вариации знакопостоянны, то здесь необходимые условия максимума N формулируются в виде неравенств

$$W_1 \geq 0 \quad \text{при } y = Y \quad (3.9)$$

$$W_2 \operatorname{sign} B \geq 0 \quad \text{при } B = \pm 1 \quad (3.10)$$

$$W_3 \operatorname{sign} \Phi \geq 0 \quad \text{при } \Phi = \pm \Phi_m \quad (3.11)$$

Для получения аналогичного условия на участке ef с уравнением $y' = k$ проварьируем y' лишь при $x_e \leq x_l \leq x \leq x_n \leq x_f$, и пусть $\max |\delta y'|$ и $|x_n - x_l|$ — величины одного порядка. С точностью до величин более высокого порядка

$$\delta N = \delta I = \left(\int_{x_l}^{x_n} \delta y' dx \right) \int_{x_l}^{x_f} W_1 dx$$

В силу (1.8) при допустимых $\delta y'$

$$\int_{x_l}^{x_n} \delta y' dx \leq 0 \quad \text{при } y' = k$$

Поэтому необходимое условие максимума N имеет вид

$$\int_x^{x_f} W_1 dx \geq 0 \quad (y' = k, x_e \leq x \leq x_f)$$

По той же причине

$$\int_{x_e}^x W_1 dx \geq 0 \quad (y' = -k, x_e \leq x \leq x_f)$$

Для выполнения этих неравенств достаточно (но не необходимо) выполнения (3.9).

Иногда класс допустимых функций может быть сужен. Так, если стенки — идеальные проводники, то $\varphi(x) = \text{const}$. При этом $\delta\varphi$ также не зависит от x и экстремальное φ удовлетворяет условию

$$\left(\int_0^{x_b} W_3 dx \right) \text{sign } \varphi \geq 0 \quad (3.12)$$

где неравенство имеет место лишь при $|\varphi| = \varphi_m$.

Анализ полученных условий показывает следующее. При оптимальных B и φ единственным возможным разрывом является одновременное изменение их знаков при неизменной абсолютной величине. Это решение, однако, можно отбросить, так как оно дает то же значение N , что и непрерывное. Если φ задано и непрерывно, то оптимальное B также непрерывно.

В ряде случаев φ может быть задано разрывным. При этом или с обеих сторон разрыва $|B| = 1$ или $B(x)$ разрывно в силу (3.7). Если $\varphi(x)$ ищется в классе кусочно-постоянных функций с заданными точками разрывов (секционированные электроды), то φ на всех участках определяются из условий (3.12) при интегрировании лишь по участкам постоянства φ . Оптимальные размеры этих участков находятся из (3.5). При этом в точках разрыва φ оптимальное $B(x)$ также или разрывно или $|B| = 1$ с обеих сторон разрыва. Сказанное переносится и на тот случай, когда B и φ меняются местами.

В общем случае экстремальный контур может состоять из участков четырех типов: $y' = Y$, $y' = k$, $y' = -k$ и участка двустороннего экстремума (3.6). Экстремальное магнитное поле может содержать участки трех типов: $B = 1$, $B = -1$ и участок двустороннего экстремума (3.7). То же можно сказать и об экстремальном распределении потенциала.

Как следует из (3.7) и (2.8), при сверхзвуковом течении концевой участок кривой $B(x)$ всегда является участком краевого экстремума. Функции y , B и φ непрерывны во всех точках стыковки.

На участках канала, являющихся одновременно участками двустороннего экстремума по y и по B , в соответствии с (3.6) и (3.7), $p = \rho u^2$, т. е. $M = \kappa^{-1/2}$. Следовательно, такой случай при сверхзвуковом течении невозможен. Кроме того, при сверхзвуковом течении не нужно определять μ_3 , так как в этом случае оно не влияет на решение.

Ясно, что найденные условия дают решение и более частных задач, например, задачи об определении экстремального $B(x)$ при заданных форме канала и потенциале. Здесь из условий (3.6) — (3.12) используются лишь (3.7) и (3.10).

В каждом конкретном случае следует рассматривать все возможные режимы течения (дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой) и при наличии нескольких максимумов производить выбор по величине N . Отметим, что не рассмотренный в работе случай смешанного течения представляет несомненный интерес и требует дополнительного исследования.

4. В качестве первого примера рассмотрим задачу об определении, оптимальных: $B(x)$, $\varphi = \text{const}$, p_∞ и x_b для различных значений параметра Δ в случае канала постоянного сечения. При $x < 0$ форма канала такова, что $M_a \leq 1$. Ограничения на φ отсутствуют.

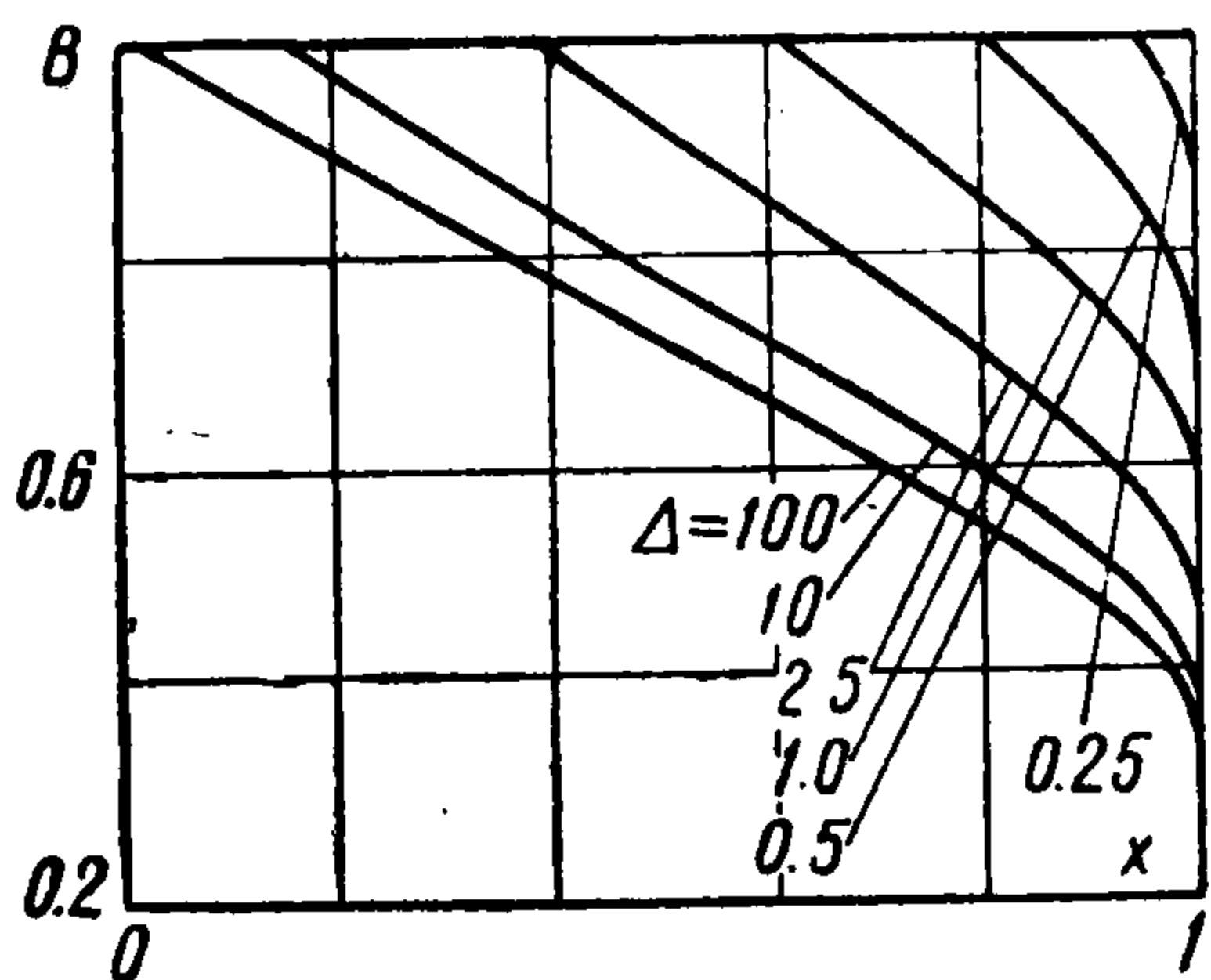
Итак, необходимо решить краевую задачу для пяти дифференциальных уравнений первого порядка (1.9) и (2.3), где $\sigma \equiv y \equiv 1$ и $y' \equiv 0$, при шести граничных условиях: (1.7) и (2.5) при $x = 0$ и (2.7) и (2.9) при $x = x_b$. Дополнительный произвол дает выбор ρ_b или c в конечном уравнении системы (1.9). Величина x_b определяется по (3.3), а $B(x)$, в соответствии с (3.7), — уравнением

$$B = \varphi \frac{\mu_1 - (1 + \mu_2) u}{2u\mu_1}$$

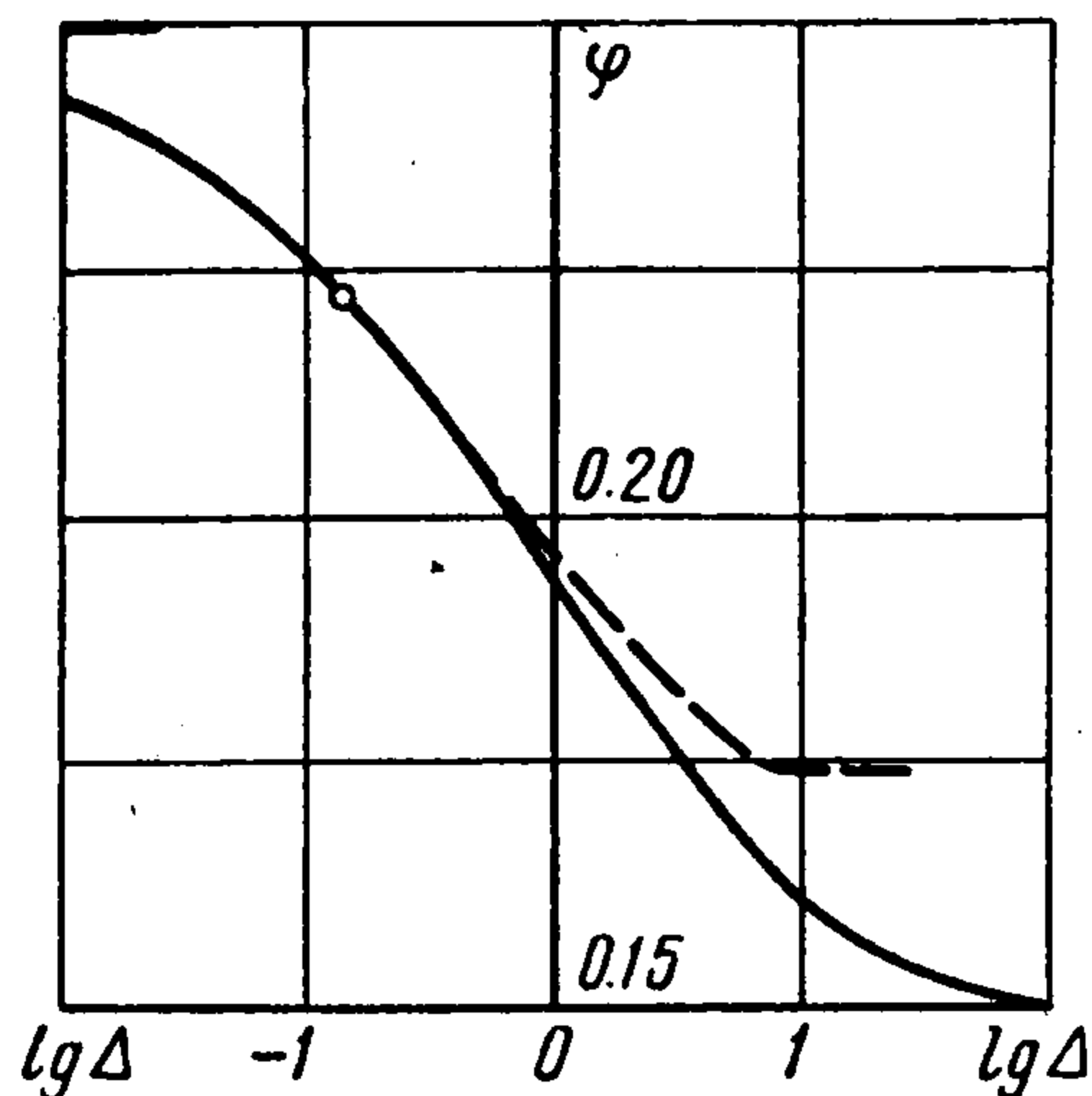
если $|\varphi [\mu_1 - (1 + \mu_2) u]| \leq |2\mu_1|$, и равно $+1$ или -1 в противном случае. Оптимальное φ определяется условием (3.12)

$$\int_0^{x_b} W_3 dx = 0$$

или эквивалентным дифференциальным уравнением $\chi' = W_3$ при граничных условиях $\chi_a = \chi_b = 0$. Одно из этих условий удовлетворяется за счет выбора φ .

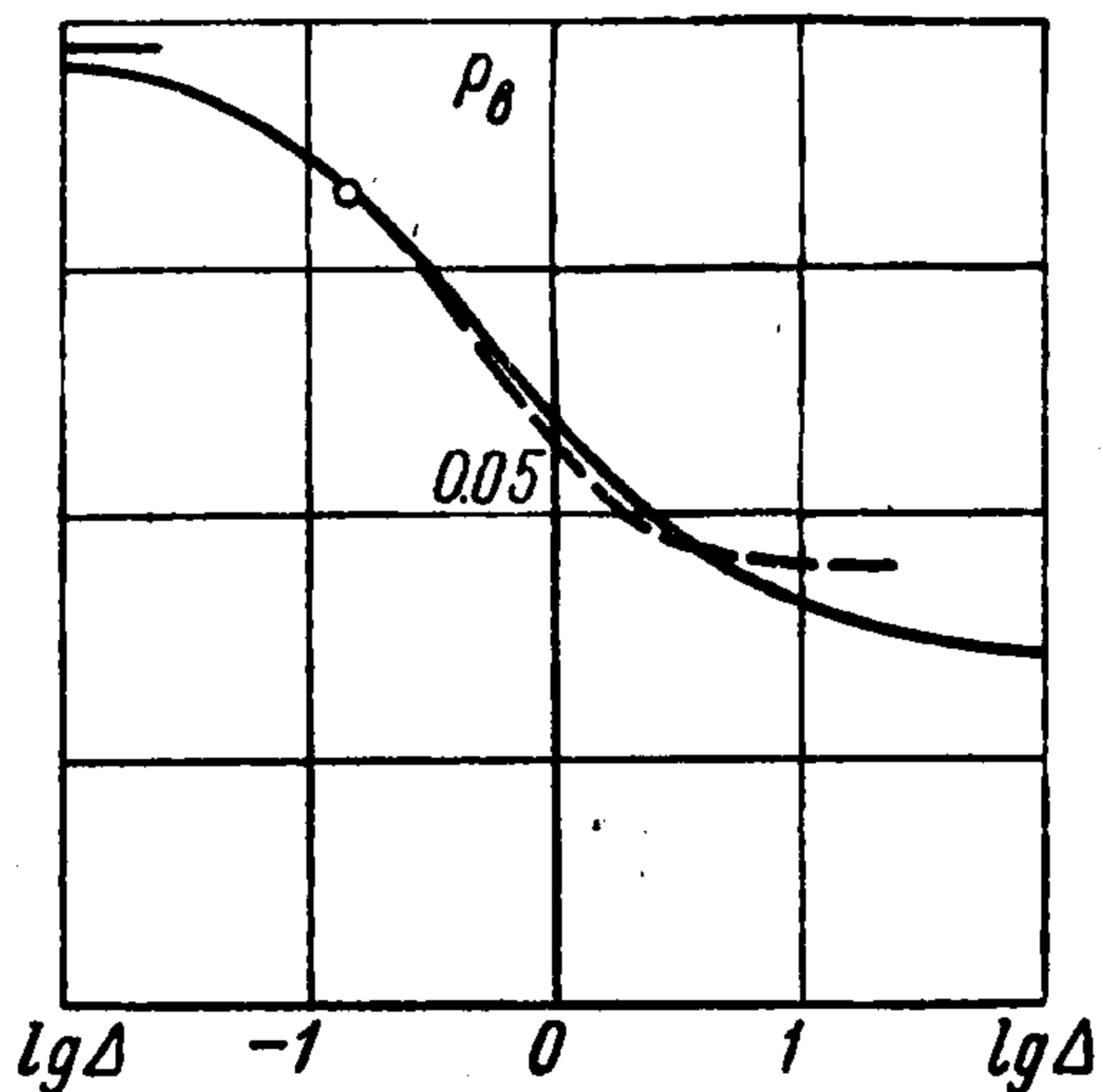


Фиг. 2

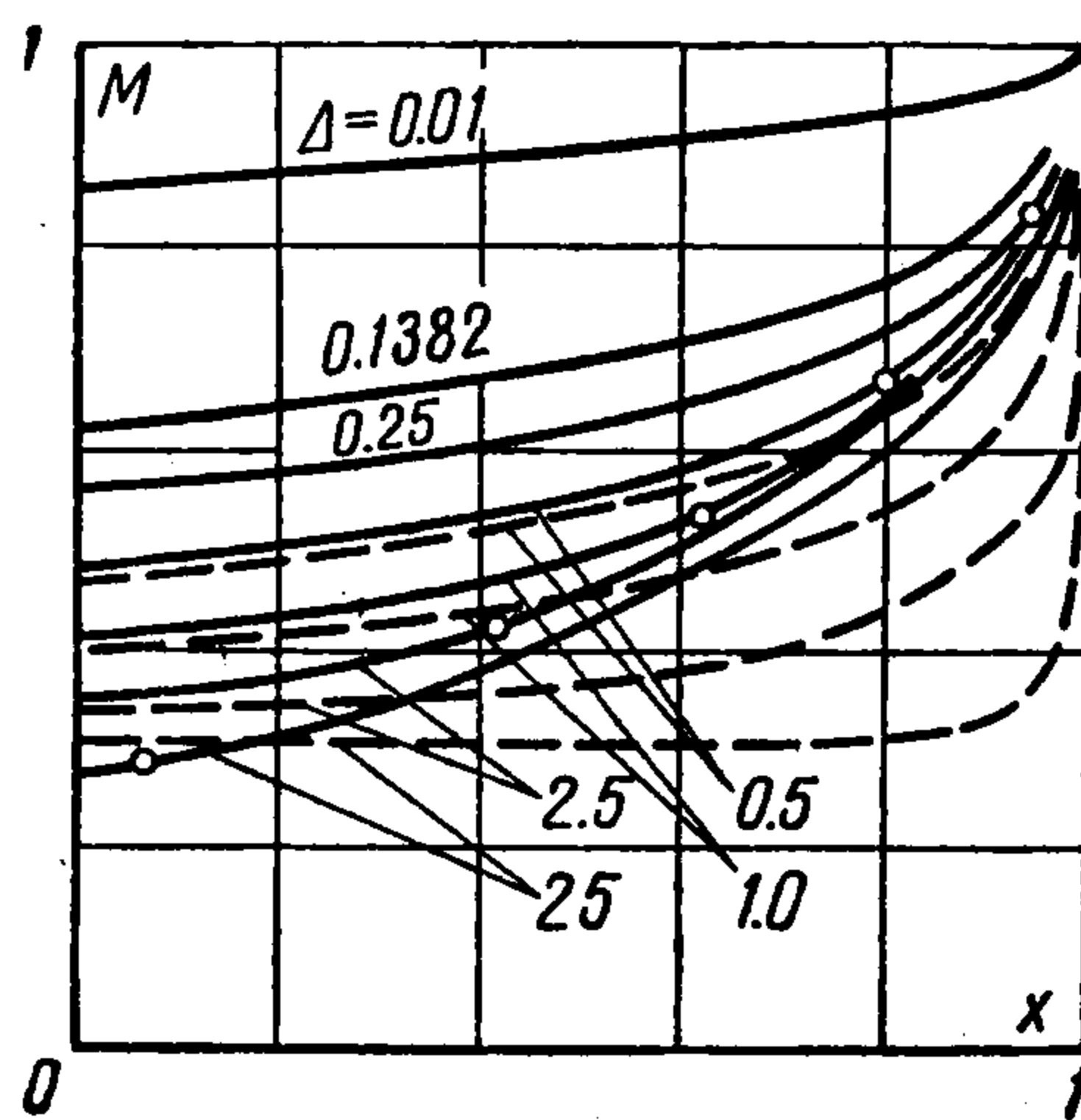


Фиг. 3

Уравнения интегрировались методом Рунге — Кутты от $x = x_b$ до $x = 0$. Недостающие начальные условия при $x = x_b$ выбирались путем пристрелки по четырем параметрам с использованием метода Ньютона. Так как при приближении к x_b все производные стремятся к бесконечности, то x бралось за независимую переменную лишь при $u' < 1$. При $u' \geq 1$ за независимую переменную бралось u .



Фиг. 4

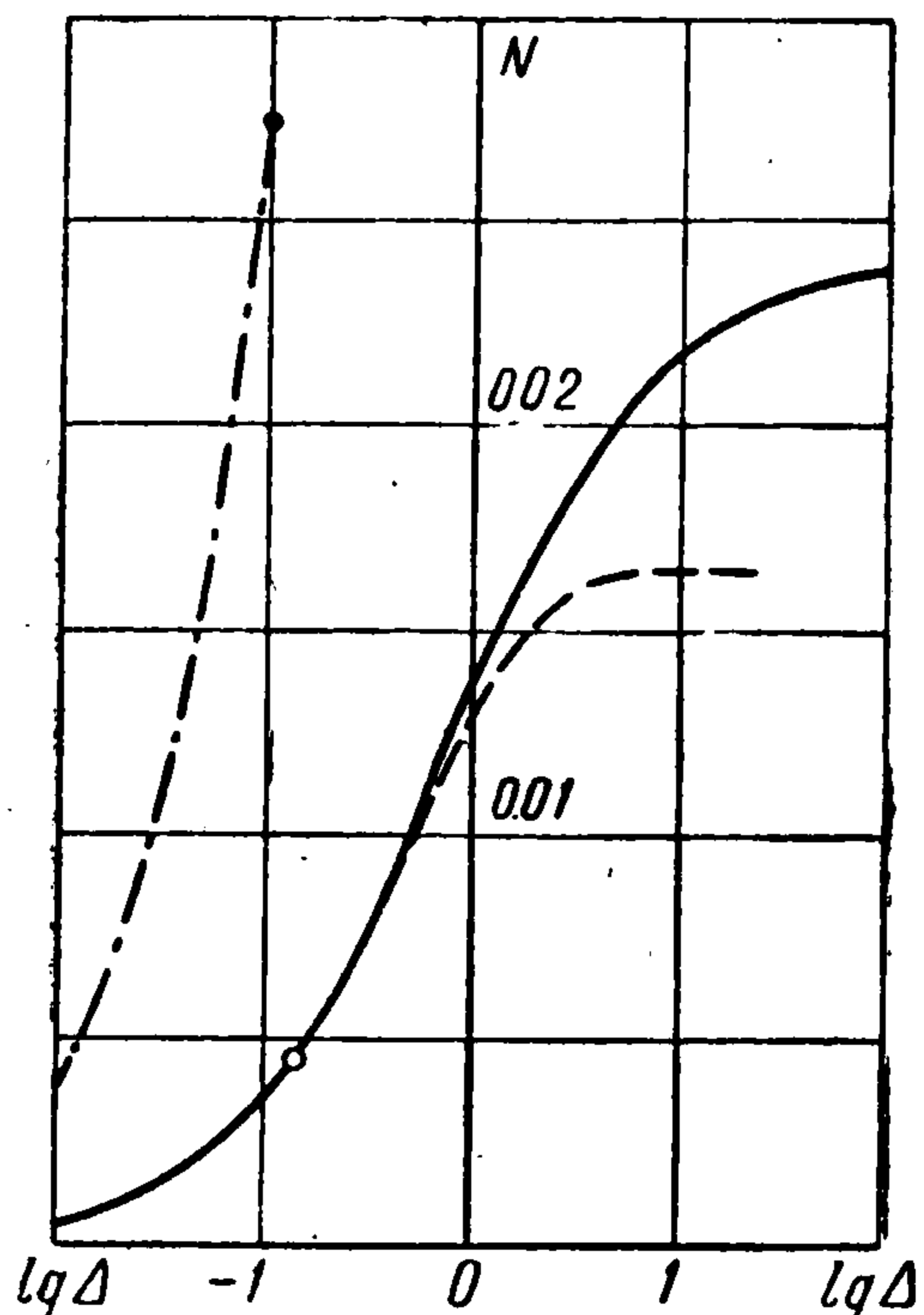


Фиг. 5

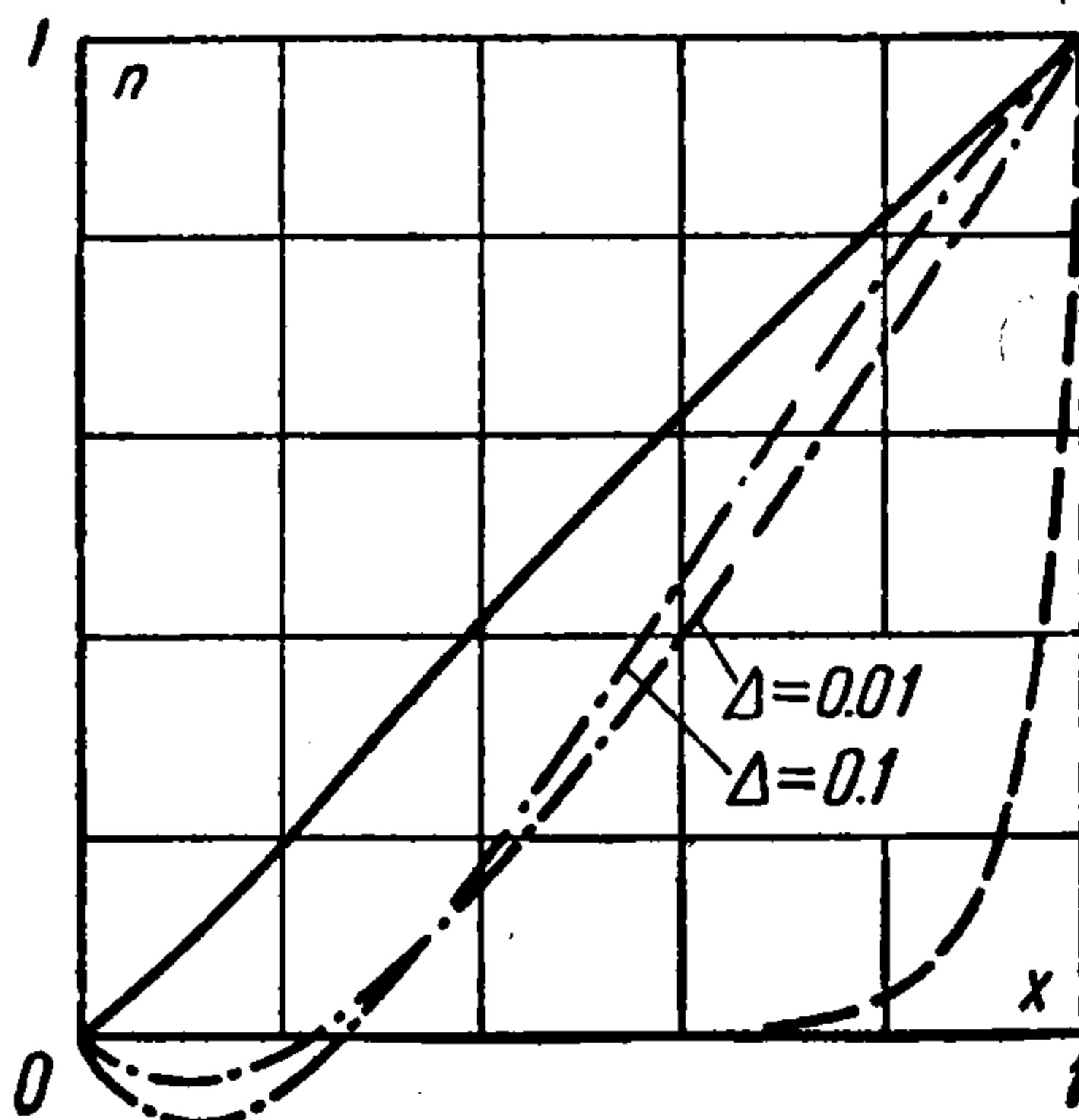
Расчеты были выполнены на электронно-вычислительной машине для $\kappa = 5/3$ и $0.01 \leq \Delta \leq 100$. Результаты приведены на фиг. 2—7 сплошными линиями. На фиг. 2 показано оптимальное $B(x)$ для ряда значений Δ (для всех рассмотренных Δ оптимальное $x_b = 1$). Кривые $B(x)$ при $\Delta > 0.1382$ состоят из участка $B \equiv 1$ и участка двустороннего экстремума. При меньших Δ второй участок отсутствует. С ростом Δ протяженность участка двустороннего экстремума растет, однако при любом конечном Δ вблизи левого конца $B = 1$. На фиг. 3 дана кривая оптимального φ , а на фиг. 4 — кривая p_b в зависимости от Δ . Оптимальный (звуковой) режим осуществляется при $p_\infty \leq p_b$. С ростом Δ срабатываемый перепад давления $\sim p_b^{-1}$ возрастает, а φ падает, правда, медленнее, чем $\Delta^{-1/2}$. Поэтому размерный потенциал возрастает. На фиг. 5 для ряда значений Δ показано изменение вдоль канала числа Маха (кружки — точки соединения участков краевого и двустороннего экстремумов).

Фиг. 6 дает снимаемую мощность в зависимости от Δ . На фиг. 3—7 штриховыми линиями даны соответствующие кривые для генератора с $B(x) \equiv 1$, причем остальные

параметры: φ , p_∞ и x_b были оптимальными. При $\Delta \leq 0.1382$ (кружки на фиг. 3, 4, 6) характеристики обоих генераторов совпадают. При больших Δ оптимальное профилирование $B(x)$ ведет к увеличению снимаемой мощности (на 3.8, 7.1, 22, 31, 37% соответственно при $\Delta = 1.0, 1.5, 5.0, 10, 20$) и уменьшению φ . В связи с этим заметим, что при наличии ограничения на φ выигрыш



Фиг. 6



Фиг. 7

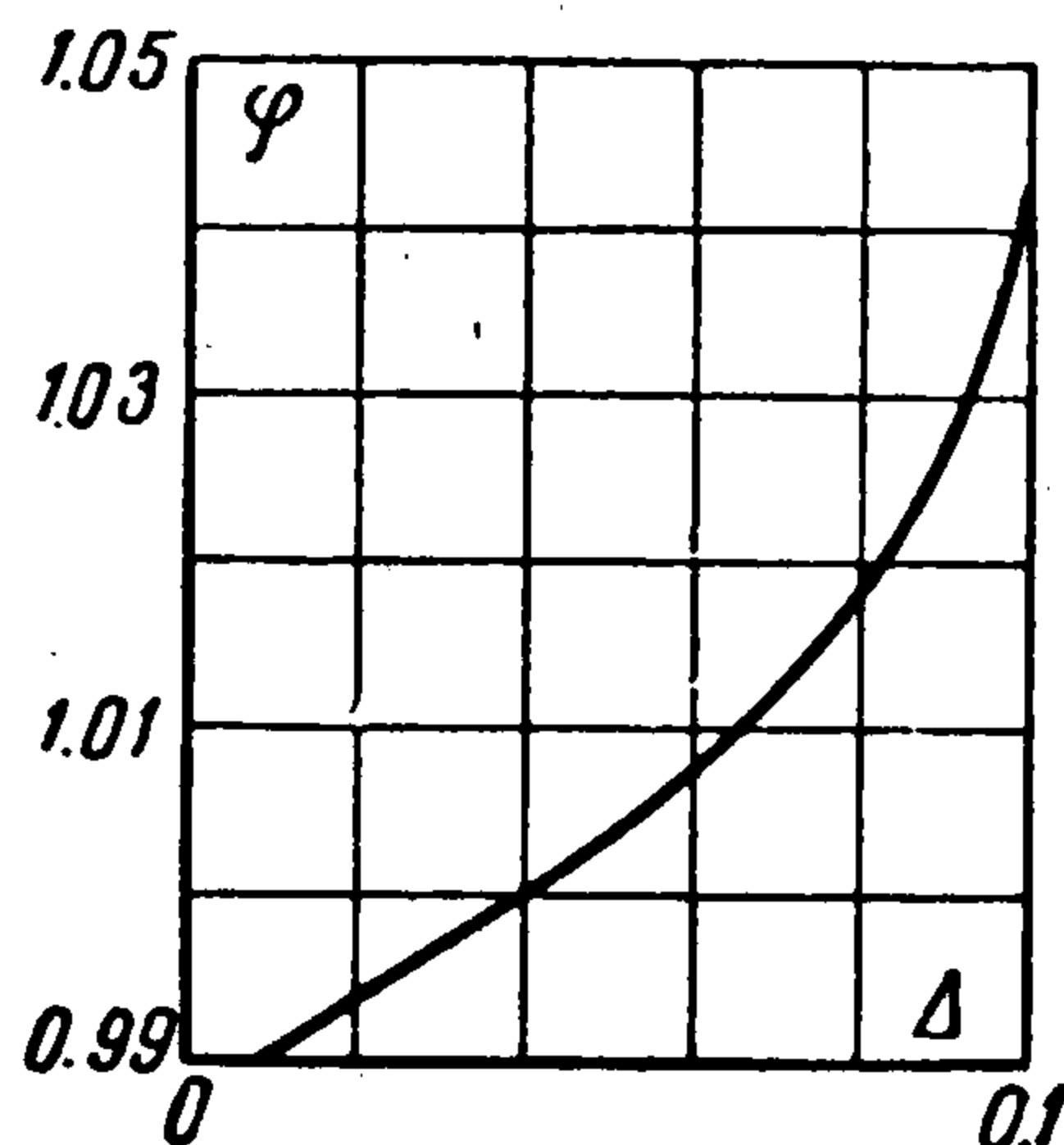
был бы еще значительней. На фиг. 3 и 4 горизонтальными отрезками слева показаны оптимальные φ и p_b при $\Delta = 0$. Для определения $\varphi_{\Delta=0}$ применялся результат Ньюрингера [1, 4]: $\varphi = u_a / 2$, а u_a и p_a определялись по формулам газовой динамики. В соответствии с (1.2), $N_{\Delta=0} = 0$. Проверка необходимых условий экстремума по y_b и $y(x)$ показала, что в исследованных случаях канал рассмотренной формулы не оптимален, хотя $y_b = 1$ и оптимально.

Интересно, что при $B \equiv 1$ область изменения всех параметров с ростом Δ стягивается к $x = 1$, что видно как по распределению числа M , так и по распределению снимаемой мощности (фиг. 7, n — отношение мощности, снимаемой с участка канала левее данного x , к полной). Такой результат является естественным, так как в этом случае при производных в (1.9) появляется малый параметр Δ^{-1} . При оптимальном $B(x)$ съем мощности осуществляется почти равномерно, что подтверждает качественные соображения работы [5].

В качестве второго примера решалась задача об определении оптимальных $y(x)$, $B(x)$, $\varphi = \text{const}$ и x_b при $l^\circ / y_a^\circ = 10$ и $M_a = 1$, для ряда значений Δ и Y при сверхзвуковом режиме течения. Ограничения на φ отсутствуют и $\kappa = 5/3$.

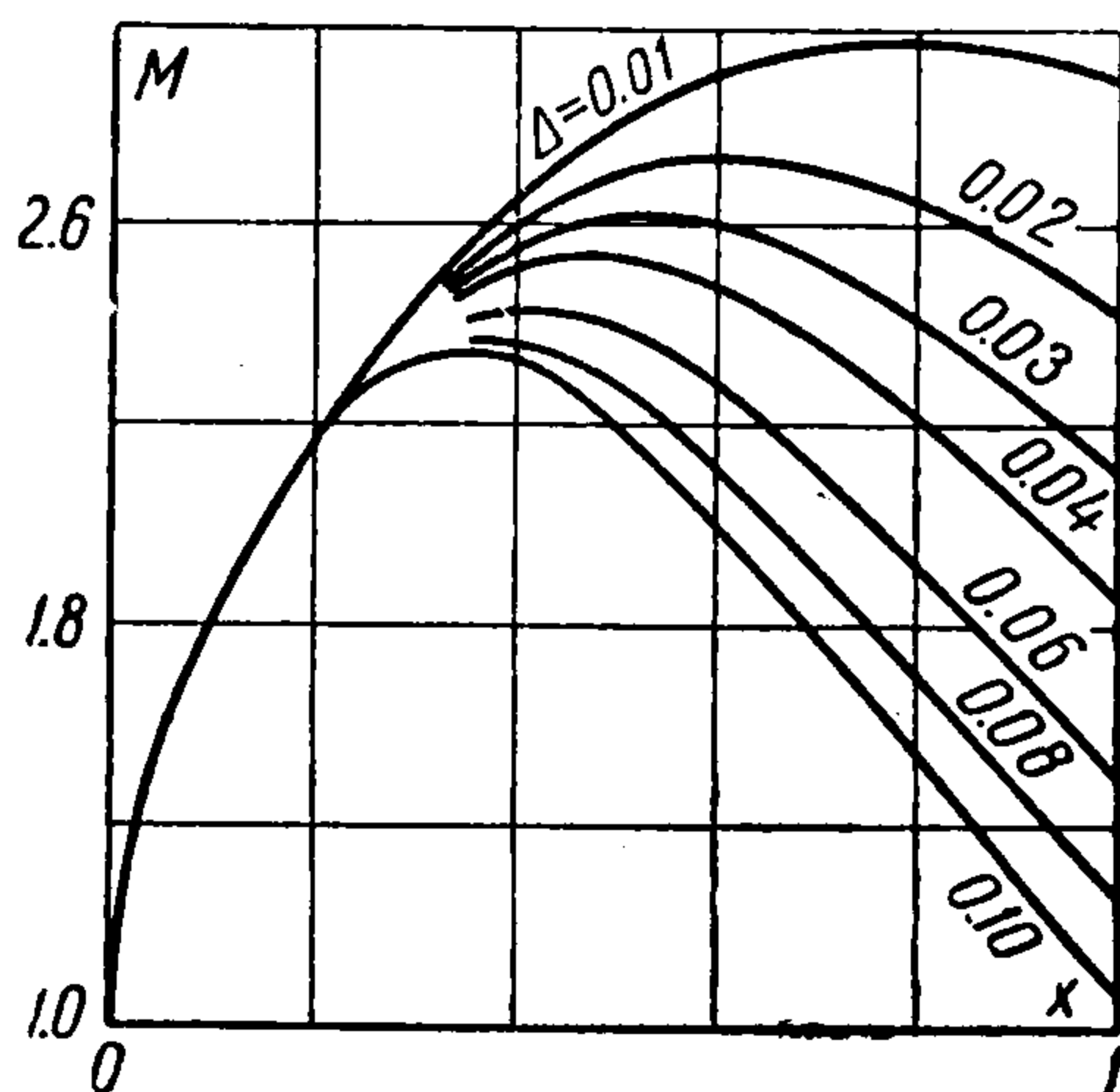
При определении оптимальной формы нужно знать константу k или максимально допустимый угол ϑ_m между стенкой и осью канала, при котором еще применима одномерная теория. Так как выяснение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы, то было взято $\vartheta_m = 20^\circ$, что дает $k = (l^\circ / y) \text{tg } \vartheta_m = 3.64$ и максимальное $Y = 4.64$.

Исследование показало, что в рассмотренном диапазоне Δ и Y оптимальное $x_b = 1$, оптимальное магнитное поле однородно: $B(x) = 1$, и оптимальный контур канала состоит из двух прямолинейных отрезков $y' = k$ и $y = Y$. Для $Y = 4.64$ мощность оптимального генератора в зависимости от Δ дана на фиг. 6 (штрих-пунктир), а оптимальное φ на фиг. 8. Максимальное Δ , при котором течение еще всюду сверхзвуковое, в этом случае равно 0.103 (черный кружок на фиг. 6). Изменение характера течения с ростом Δ видно из фиг. 9. Интересно, что увеличение Δ почти не влияет на начальный участок течения. Как следует из фиг. 7, где штрих-пунктиром показано распределение снимае-

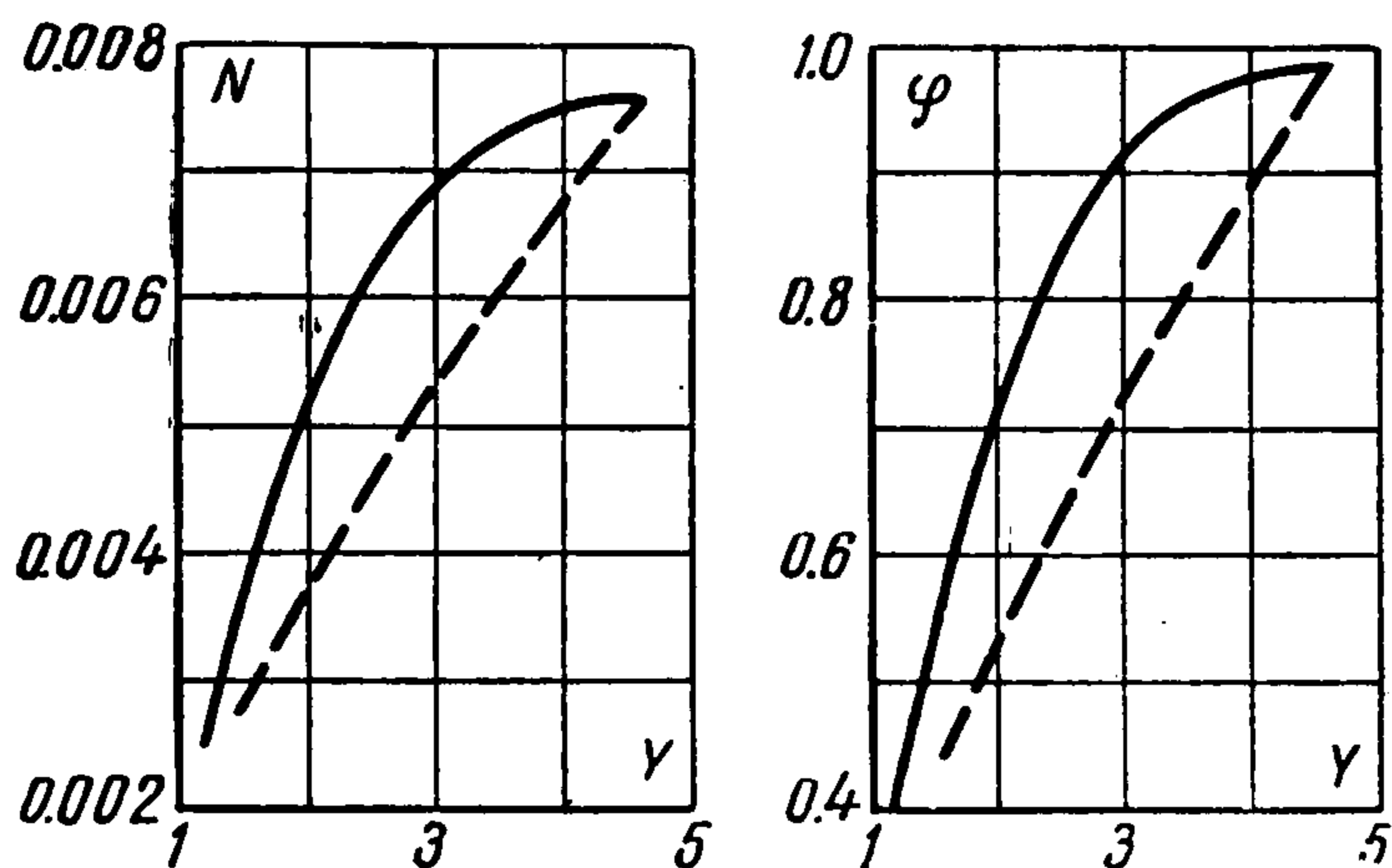


Фиг. 8

мой мощности для $\Delta = 0.01$ и 0.1 при $Y = 4.64$, этот участок генератора работает как ускоритель. На фиг. 10 сплошной кривой дана зависимость мощности оптимального генератора от Y , а штриховой — генератора, у которого x_b , $B(x)$ и φ — оптимальны, а стенки образованы прямолинейными отрезками, соединяющими точки $x_a = 0$,



Фиг. 9



Фиг. 10

$y_a = \pm 1$ и $x_b = 1$, $y_b = \pm Y$; в обоих случаях $\Delta = 0.02$. На этой же фигуре приведена зависимость $\varphi = \varphi(Y)$. Видно, что оптимальный выбор формы ведет к существенному увеличению N . Расчет показал, что взятое в этом примере $M_a = 1$ не является оптимальным.

5. Проведенное исследование можно перенести на более общий случай. Пусть $\sigma = \sigma(\rho, p, B)$. Кроме того, оптимизацию не всегда следует проводить по величине снимаемой мощности [6]. В связи с этим рассмотрим функционалы

$$K_j = \int_0^{x_b} \Phi_j(x, y, u, \rho, p, B, \varphi) dx \quad (j = 1, \dots, r-1)$$

$$K_j = \int_0^{x_b} \Phi_j(x, y, u, \rho, p, B, \varphi) dx \left[\int_0^{x_b} F_j(x, y, u, \rho, p, B, \varphi) dx \right]^{-1} \quad (j = r, \dots, n)$$

где Φ_j и F_j , как и σ , — известные функции своих аргументов.

Представляет интерес вариационная задача, в которой ищется максимум i -го функционала при изопериметрических условиях, получающихся при задании остальных $K_{j \neq i}$. Такова, например, задача о построении магнитогидродинамического генератора заданной мощности при минимальной джоулевой диссипации. Составим функцию

$$\Phi = \Phi(x, y, u, \rho, p, B, \varphi, \lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \Phi_j(x, y, u, \rho, p, B, \varphi) - \sum_{j=r}^n \lambda_j K_j F_j(x, y, u, \rho, p, B, \varphi)$$

где λ_j — постоянные множители Лагранжа, причем $\lambda_i = 1$, если $i < r$, и

$$\lambda_i = \left(\int_0^{x_b} F_i dx \right)^{-1}, \quad \text{если } i \geq r$$

Исследование, аналогичное проведенному выше, вновь приводит к прежним соотношениям, если заменить в них выражения для M_i , W_i , U

и V на следующие:

$$M_1 = \frac{\kappa}{\rho u^2 - \kappa p} \left\{ \frac{\mu_1 \rho u^2}{y} y' + \Delta (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left[u \sigma_B - \rho \sigma_\rho \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_p \left(p + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho u^2 \right) \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \right] + u \Phi_u - \rho \Phi_\rho - \left(p + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho u^2 \right) \Phi_p \right\}$$

$$M_2 = \frac{\kappa - 1}{yu (\kappa p - \rho u^2)} \left\{ \frac{\mu_1 \rho u^2}{y} y' + \Delta (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left[u \sigma_B - (\sigma_p \rho u^2 + \rho \sigma_\rho) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \right] + u \Phi_u - \Phi_p \rho u^2 - \rho \Phi_\rho \right\}$$

$$M_3 = \frac{\kappa - 1}{2y (\rho u^2 - \kappa p)} \left\{ \frac{\mu_1 u}{y} \left(\frac{2\kappa}{\kappa - 1} p + \rho u^2 \right) y' - 2\mu_1 \Delta \sigma \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \Delta u (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left[u \sigma_B - \rho u^2 \sigma_p \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho \sigma_\rho}{\kappa - 1} \left(\kappa - 3 + \frac{2\kappa p}{\rho u^2} \right) \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \right] + u \Phi_u - \Phi_p \rho u^2 - \frac{\rho \Phi_\rho}{\kappa - 1} \left(\kappa - 3 + \frac{2\kappa p}{\rho u^2} \right) \right\}$$

$$W_1 = \frac{1}{y (\rho u^2 - \kappa p)} \left\{ \mu_1 (\kappa - 1) \Delta \sigma \rho u \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \right. \\ \left. + \Delta (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left[(\sigma \kappa p - \sigma_p \kappa r \rho u^2 - \sigma_\rho \rho^2 u^2) \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho u^2 \frac{\sigma \Phi}{y} \right] + \kappa p (\Phi_u u + \Phi_p \rho u^2 - \Phi_y y) - \rho u^2 (\rho \Phi_\rho - y \Phi_y) \right\}$$

$$W_2 = \Delta (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left[u \sigma + \sigma_B \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) \right] + \mu_1 \Delta \sigma \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) + \Phi_B$$

$$W_3 = \mu_2 \Delta \sigma \left(uB - \frac{\Phi}{y} \right) - (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \frac{\Delta \sigma}{y} + \Phi_\Phi$$

$$U = \Delta \sigma (\mu_1 B + \mu_2 \Phi) \left(\frac{\Phi}{y} - uB \right) + \Phi, \quad V = \Phi$$

Здесь через $\Phi_y, \Phi_u, \Phi_\rho, \Phi_p, \Phi_B, \Phi_\Phi, \sigma_\rho, \sigma_p$ и σ_B обозначены частные производные. Решение по-прежнему содержит участки двустороннего и краевого экстремума, сохраняется и вывод об экстремальных r_∞ и u_a . Дополнительный произвол в выборе $(n - 1)$ множителя Лагранжа служит для удовлетворения такого же числа изопериметрических условий.

Поступила 26 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer J. L. Optimum power generation using a plasma as the working fluid. Plasma laboratory, Republic Aviation Corporation, Farmingdale, L. I., N. Y., 1959. Русск. пер. в сб. Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели, Атомиздат, 1961 стр. 312—329.
2. Шахнов И. И. Об ошибке Ньюрингера. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 12, стр. 1495—1496.
3. Соколов Ю. Ф. Установившееся течение электропроводного газа в канале мгд-генератора при постоянном напряжении вдоль электродов. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1962, № 5, стр. 45—48.
4. Neuringer J. L. Optimum power generation from moving plasma. Journal Fluid Mech., 1960, vol. 7, part 2, p. 287—301. Русск. пер. в сб. Движущаяся плазма, под ред. Е. В. Кудрявцева и В. П. Ионов. Изд.-во иностр. литературы, 1961, стр. 584—609.
5. Гордеев Г. В. О максимуме к. п. д. плазменного генератора тока. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 9, стр. 1031—1042.
6. Шейндлин А. Е., Губарев А. В., Ковбасюк В. И., Прокудин В. А. К вопросу оптимизации режимов мгд-генераторов. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1962, № 6, стр. 34—38.