Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ЖЕСТКОМ ВОЗНИКНОВЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Исследован переход от ламинарного стационарного движения к турбулентному в системах, описываемых уравнениями гидродинамического типа. Изложен способ нахождения периодических стационарных движений малой амплитуды; последняя выражена в явном виде через параметры системы вблизи границы, разделяющей области мягкого и жесткого возбуждений.

1. Известно, что при переходе от ламинарного состояния к турбулентному в ряде систем при малой надкритичности устанавливается движение с определенной частотой и волновым вектором (примером может служить конвекция между параллельными плоскостями [1], течение жидкости между вращающимися цилиндрами [2-4], страты в газовом разряде [5,6], винтовая неустойчивость в газовом разряде и полупроводниках [7-10]; периодическое во времени движение возникает также при обтекании потоком жидкости твердых тел [11]). Частоту и волновое число, а также форму колебаний можно приближенно определить из линейной теории; для нахождения же амплитуды Q необходимо учитывать нелинейные эффекты.

Ниже показано, что уравнение для квадрата модуля амплитуды $q = QQ^*$ стационарного периодического движения имеет вид (при малых q)

$$\frac{dq}{dt} = 2q(\gamma_0 + aq + bq^2 + \ldots) \equiv 2q\gamma \tag{1.1}$$

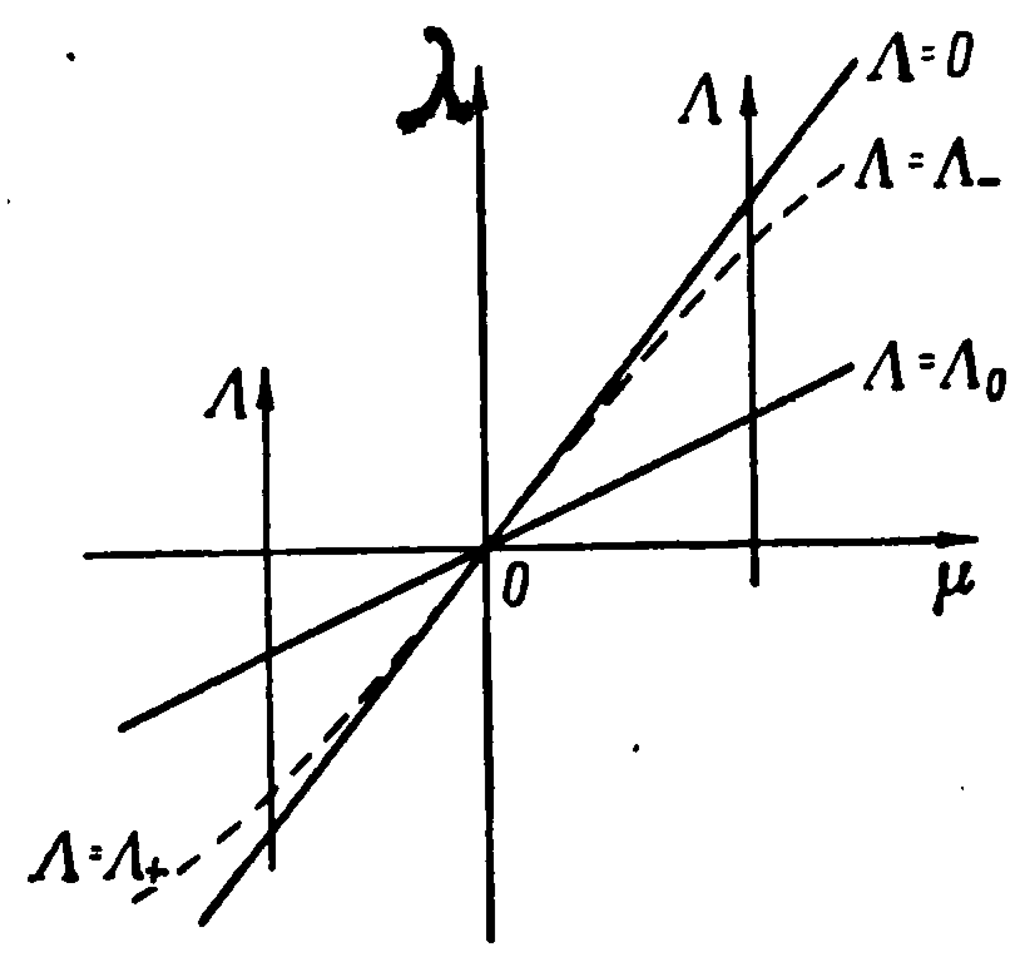
Фаза амплитуды Q (а следовательно, и фаза стационарного решения) произвольна. Коэффициенты γ_0, a, b,... — функции параметров системы λ (температуры, геометрических размеров, внешнего магнитного поля и т. п.); γ_0 — инкремент линейной теории, а второй и третий члены в γ связаны с учетом нелинейных эффектов.

Критические параметры λ_* определяются равенством $\gamma_0(\lambda_*) = 0$; равновесное состояние $q = 0$ неустойчиво при $\gamma_0(\lambda) > 0$.

Пусть система такова, что $a(\lambda_*) \neq 0$ ни при каких значениях λ_*. Если $a(\lambda_*) < 0$, то при увеличении надкритичности $\Lambda = \lambda - \lambda_*$ амплитуда стационарного движения непрерывно растет от нуля («мягкий» режим); в этом случае из уравнения $\gamma = 0$ получается $q \approx -(a^{-1}d\gamma_0 / d\lambda)_* \Lambda$. Если $a(\lambda_*) > 0$, то при переходе λ через критическое значение λ_* амплитуда меняется от нуля до некоторой конечной величины скачком [4,6,9,10] («жесткий» режим); в этом случае амплитуда, вообще говоря, не мала при малой надкритичности, а само движение может иметь характер нерегулярного, развитого турбулентного движения.

2. Рассмотрим системы, для которых при некоторых значениях параметров λ_* выполняются равенства $\gamma_0 = a = 0$; в таких системах [2–10] возможно в зависимости от значений λ_* и мягкое [3,6,8] и жесткое [4,6,9,10] возникновения стационарного движения.

Пусть при $\lambda = \lambda_*$ выполняются соотношения $\gamma_0 = a = 0$, $b \neq 0$. Тогда при достаточно малых Λ величины γ_0, a малы, а $b \neq 0$. Отношение величин γ_0, a произвольно, поскольку оно зависит от направления вектора Λ; поэтому при нахождении решений q уравнения $\gamma = 0$ нужно считать величины γ_0, a независимыми малыми параметрами. Легко найти решение q в частных случаях $a = 0$ или $\gamma_0 = 0$. В первом случае q имеет вид ряда по степеням $\sqrt{\gamma_0}$, во втором — по степеням a (кроме того, имеется решение $q = 0$). В общем случае решение ищется в виде ряда $q = q_1 + q_2 + \ldots$, в котором $q_n / q_{n-1} \to 0$ при $\Lambda \to 0$; ввиду неоднозначности выбора $q_n = q_n(\gamma_0, a)$ естественно потребовать, чтобы величины $q_n(\gamma_0, 0)$ и $q_n(0, a)$ совпадали с n-слагаемыми в разложениях q по степеням $\sqrt{\gamma_0}$ и a соответственно. В дальнейшем будет рассматриваться лишь величина



Фиг. 1

$$q \approx q_1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\gamma_0 b}}{2b} \qquad (2.1)$$

Выделим какие-нибудь два параметра λ и μ; остальные параметры зафиксируем так, чтобы кривые $a(\lambda, \mu) = 0$ и $\gamma_0(\lambda, \mu) = 0$ пересекались (фиг. 1). Будем отсчитывать λ, μ от точки пересечения и примем для определенности, что область $\gamma_0 > 0$ расположена над кривой $\gamma_0 = 0$, а область $a > 0$ — над кривой $a = 0$. При изменении параметра λ колебания возникают мягко, если $\mu < 0$, и жестко, если $\mu > 0$.

Для небольших значений $|\mu|$ и $|\Lambda|$ (здесь $\Lambda = \lambda - \lambda_*$ — скаляр) можно считать $\gamma_0 = \gamma'\Lambda$, $a = a'(\Lambda - \Lambda_0)$, $\Lambda_0 = c\mu$, где c, b и производные γ', a' взяты при $\Lambda = \mu = 0$. В случае, представленном на фиг. 1, имеем $\gamma' > 0$, $a' > 0$, $c < 0$. Выражение (2.1) принимает вид

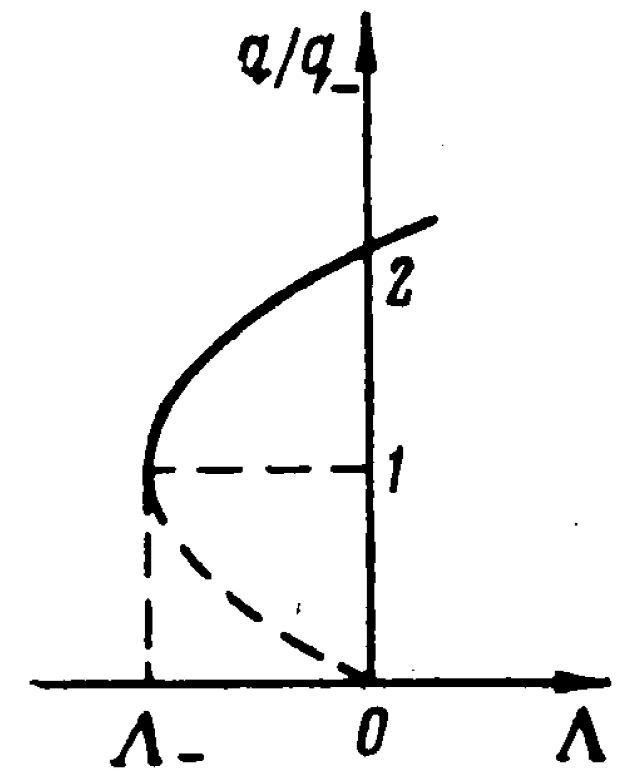
$$q = A(\Lambda - \Lambda_0) \pm (A^2(\Lambda - \Lambda_0)^2 + B\Lambda)^{1/2} \qquad \left(A = \frac{-a'}{2b},\ B = \frac{-\gamma'}{b}\right) \qquad (2.2)$$

3. Пусть $b < 0$ в равенстве (2.2); тогда A и B положительны (этот случай рассмотрен в [13]). Если Λ меняется вдоль прямой $\mu = \text{const} > 0$ (при этом $\Lambda_0 = c\mu < 0$), то при $\Lambda = +0$ амплитуда скачком меняется от нуля до значения $q_0 = -2A\Lambda_0 \sim \mu$. Если теперь уменьшать Λ, то при некотором значении $\Lambda = \Lambda_-$, определяемом равенством $A^2(\Lambda_- - \Lambda_0)^2 + B\Lambda_- = 0$, происходит срыв амплитуды от значения $q_- = A(\Lambda_- - \Lambda_0)$ до нуля (фиг. 2). Так как $|\Lambda_0| \sim \mu$ — величина малая, то $\Lambda_- \approx -(A\Lambda_0)^2 / B = -(Ac\mu)^2 / B \sim \mu^2$; так как $|\Lambda_-| \ll |\Lambda_0|$ при малых μ, то для небольших $|\Lambda|$ равенство (2.2) можно представить в виде

$$q = q_-(1 \pm \sqrt{1 - \Lambda / \Lambda_-}), \qquad q_- \approx -A\Lambda_0 \sim \mu, \ \Lambda_- \sim \mu^2 \qquad (3.1)$$
$$(|\Lambda| \ll |\Lambda_-|, \quad q_- > 0, \quad \Lambda_- < 0)$$

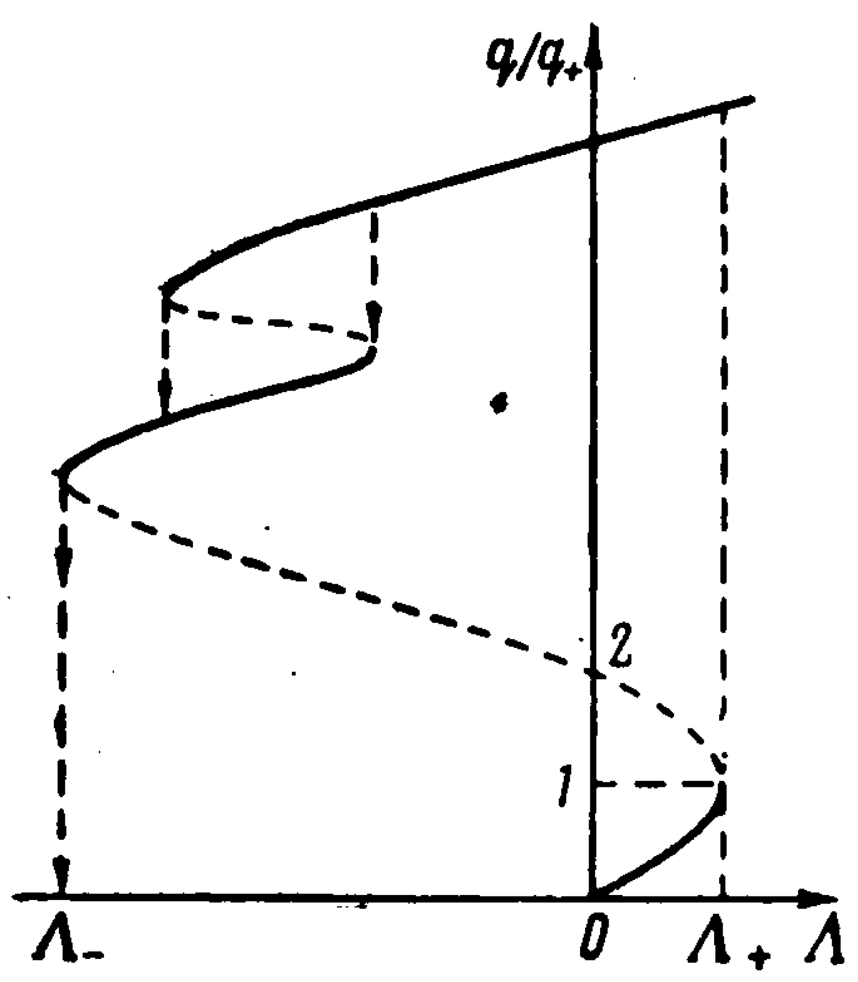
В области $\Lambda_- < \Lambda < 0$ существуют два стационарных решения (3.1) и $q = 0$; при помощи уравнения (1.1) можно убедиться, что устойчивым (наблюдаемым на опыте) движениям соответствует решение (3.1), в котором корень берется со знаком плюс.

При периодическом движении среды любая величина X (скорость жидкости, температура, плотность зарядов и т. п.) изменяется периодически; при этом, как показано ниже, для гармоник X_ν периодической величины X выполняется соотношение $|X_\nu| \sim |Q|^{|\nu|}$. Отсюда следует, что в стационарном движении с малой амплитудой Q форма колебаний близка к синусоидальной [3,6,15–17]. Таким образом, в случае мягкого возбуждения и в рассмотренном выше случае жесткого возбуждения ($a = \gamma_0 = 0$, $b < 0$ при $\lambda = \lambda_*$) величины X меняются по синусоидальному закону при малой надкритичности.



Фиг. 2

4. Рассмотрим случай $b > 0$; тогда A, $B < 0$. Если Λ меняется вдоль прямой $\mu = \mathrm{const} > 0$, то при $\Lambda = +0$ амплитуда скачком меняется от нуля до некоторой большой величины; при этом движение может сразу приобрести характер нерегулярного, развитого турбулентного движения. Если же устанавливается периодическое движение, то колебания имеют форму релаксационных, близких к разрывным, а не к синусоидальным, колебаний. Количественно случай $\mu > 0$ рассмотреть не удается.



Фиг. 3

Пусть Λ меняется вдоль прямой $\mu < 0$ (при этом $\Lambda_0 = c\mu > 0$, см. фиг. 1). Тогда при изменении Λ от 0 до $\Lambda_+ \sim \mu^2$ амплитуда q изменяется от 0 до $q_+ \approx -A\Lambda_0 \sim \mu$ (фиг. 3). При переходе через значение Λ_+ амплитуда скачком меняется от значения q_+ до некоторой большой величины, а стационарное движение, близкое к синусоидальному при $q = q_+$, может приобрести характер нерегулярного, турбулентного движения. Если теперь уменьшать Λ, то при некотором $\Lambda = \Lambda_-$ произойдет срыв амплитуды от некоторого (вообще говоря, большого) значения q_- до нуля. Возможный вид зависимости $q = q(\Lambda)$ представлен на фиг. 3 (для случая, когда движение с большой амплитудой остается периодическим; это имеет место, например, в случае страт [6]). В отличие от случая $b < 0$, при $\mu \to 0$ величины Λ_-, q_- не исчезают.

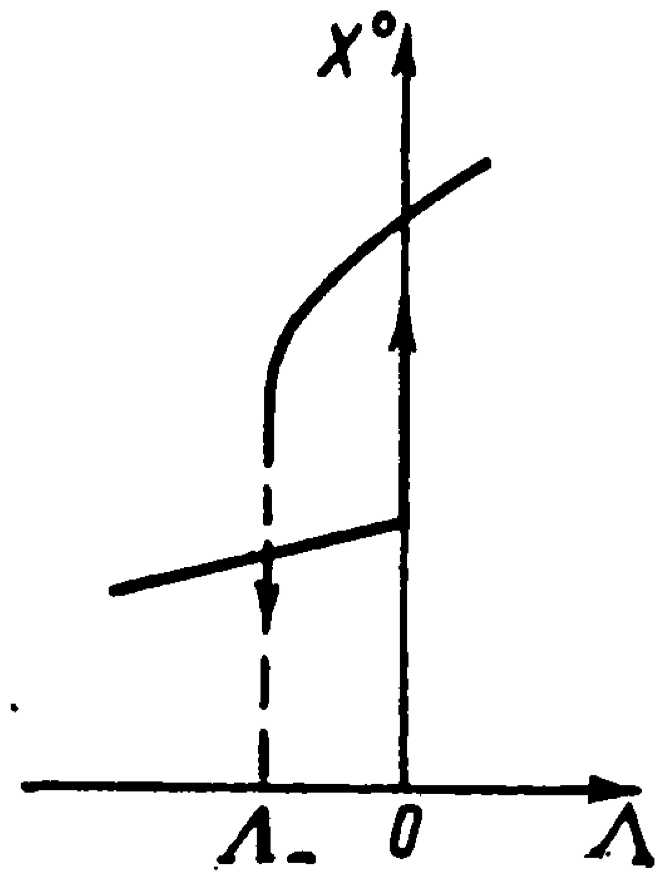
Для небольших Λ, μ выражение (2.2) можно представить в виде

$$q = q_+ \left(1 \pm \sqrt{1 - \Lambda / \Lambda_+}\right), \qquad q_+ \sim \mu, \qquad \Lambda_+ \sim \mu^2 \tag{4.1}$$
$$(|\Lambda| \leqslant |\Lambda_+|, \quad q_+ > 0, \quad \Lambda_+ > 0)$$

Решение (4.1), в котором корень берется со знаком (+), неустойчиво.

Отметим, что при увеличении надкритичности амплитуда устойчивых решений (сплошные линии на фиг. 2, 3) увеличивается, а амплитуда неустойчивых решений (пунктирные линии на фиг. 2, 3) уменьшается.

5. Обозначим через q_* неустойчивые решения (3.1, 4.1). Пусть при некотором значении Λ система находилась в стационарном состоянии $q < q_*$. Если наложить на систему внешнее возмущение (переменная э.д.с. во внешней электрической цепи, импульс магнитного поля и т. п.), то при амплитуде возмущения X', превосходящей значение



Фиг. 4

$$X_*' \sim \sqrt{q_*} \tag{5.1}$$

система переходит в стационарное состояние $q > q_*$ и остается в нем после снятия внешнего возмущения (этот эффект исследован качественно в экспериментах [4,6]). Если же $X' < X_*'$, то после снятия возмущения система снова приходит в стационарное состояние $q < q_*$. Соотношение (5.1), в котором q_* взято из (3.1), переходит при малых Λ в соотношение

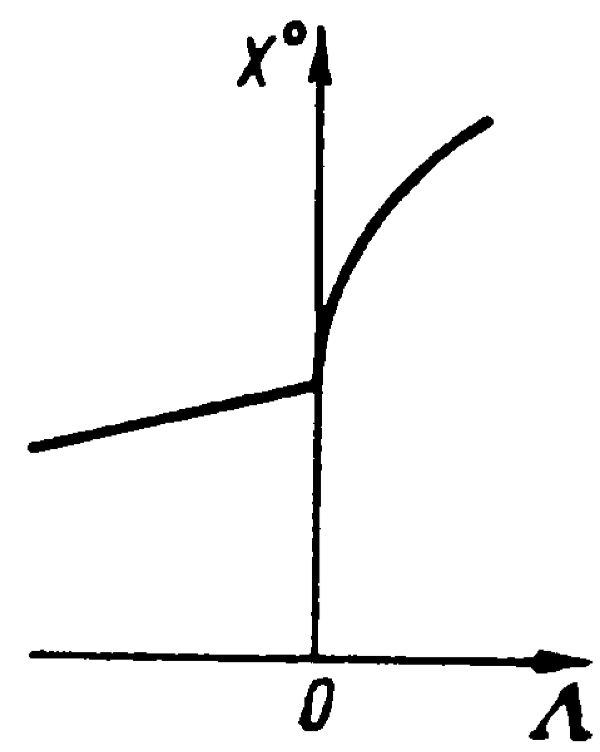
$$X_*' \sim \sqrt{-\Lambda}, \qquad \Lambda \to -0$$

которое имеет место и в общем случае жесткого возбуждения, когда $a\ (\lambda_*)$ положительно и не мало [15].

При изменении амплитуды стационарного движения меняются частота ω и среднее значение X° (нулевая гармоника) любой наблюдаемой величины (средней температуры, магнитной индукции, постоянной составляющей тока и т. п.); соответствующие зависимости, как показано ниже, имеют вид

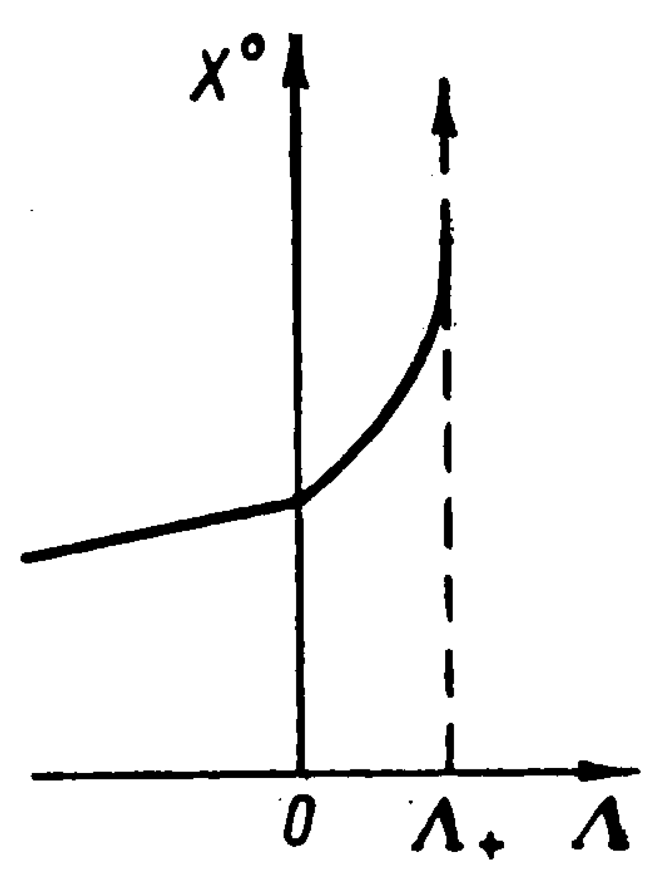
$$X^\circ = \chi + X_1 q + \ldots$$

$$\omega = \Omega_0 + \Omega_1 q + \ldots \tag{5.2}$$



Фиг. 5

если стационарное движение является периодическим в пространстве, то для волнового числа имеет место аналогичное соотношение $k = k_0 + k_1 q + \ldots$. Коэффициенты при степенях q в (5.2) есть аналитические функции Λ; величина χ соответствует равновесному состоянию $q = 0$; значения Ω_0, k_0 определяются из линейной теории.



Фиг. 6

Из (5.2) следует, что изломам (при мягком возбуждении) и скачкам (при жестком возбуждении) величины $q\,(\Lambda)$ соответствуют изломы и скачки величин X°, ω, k (такие изломы [8] и скачки [6,9,10] наблюдались экспериментально). Вид зависимостей $X^\circ\,(\Lambda)$ при $X_1\,(\lambda_*) > 0$ показан на фиг. 4 ($b < 0$, $\mu > 0$), фиг. 5 ($b < 0$, $\mu = 0$), фиг. 6 ($b > 0$, $\mu < 0$). Если в случае, соответствующем фиг. 4, обозначить через $X_\sim$ переменную часть любой величины $X_\sim$, а через ΔX°—разность между значением X° при наличии колебаний и при их отсутствии для фиксированного Λ, то нетрудно получить [13] из (3.1), (5.2), что при достаточно малых μ

$$(X_\sim^2)_0 \,/\, (X_\sim^2)_- = (\Delta X^\circ)_0 \,/\, (\Delta X^\circ)_- = q_0 \,/\, q_- = 2 \qquad (5.3)$$

Приведенные выше результаты относятся к стационарным движениям малой амплитуды, периодическим во времени и (или) в пространстве; такие движения возникают в результате развития нарастающих возмущений, периодических во времени и (или) в пространстве. Если же нарастающее при малой надкритичности возмущение не является периодическим ни во времени, ни в пространстве, то этими же свойствами обладает стационарное движение малой амплитуды (такая ситуация возможна, например, в случае течения жидкости в ограниченном объеме, вызываемого движением границ [12]). Такое движение определено полностью, в отличие от периодических стационарных движений, определенных с точностью до произвольной фазы. Выражения для амплитуды такого движения получаются, если заменить в нелинейном инкременте γ и в равенствах (3.1), (4.1), (5.1), (5.3) величину $q = QQ^*$ на положительную амплитуду Q. Представляет интерес экспериментальное нахождение в системах [2–10] точек, отделяющих области мягкого и жесткого возбуждений, и проверка вблизи таких точек соотношений (3.1), (5.1) — (5.3) в случае $b < 0$ и соотношений (4.1), (5.1) в случае $b > 0$.

6. Ниже показано, как можно получить выражения (1.1), (5.2) для γ, ω, k, X°. Уравнения гидродинамики имеют вид

$$F^i\,(X^j,\ \partial \,/\, \partial t,\ \nabla,\ r,\ \lambda) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, N) \qquad (6.1)$$

Здесь X — неизвестные величины, λ — параметры системы, r — пространственные координаты, ∇ — пространственные дифференциальные операторы; время не входит в уравнения (6.1) явно. Функции F — однозначные аналитические относительно своих аргументов; относительно дифференциальных операторов они являются полиномами.

Кроме уравнений (6.1), величины X должны удовлетворять, вообще говоря, неоднородным, граничным условиям

$$U_j^i X^j = A^i \qquad (6.2)$$

если вектор r принадлежит поверхности $S\,(r) = 0$ (здесь и в дальнейшем по двум одинаковым индексам, один из которых стоит внизу, а другой вверху, производится суммирование от 1 до N). Величины A зависят от r и λ, а величины U — от тех же аргументов, что и функции F. Можно, однако, считать, что U не зависит от X, т. е. что условия (6.2) линейны относительно X; если это не так, то следует все нелинейные по X члены в (6.2) обозначить через X^j $(j > N)$ и рассматривать их как дополнительные неизвестные. Кроме того, можно считать, что U не зависит от $\partial \,/\, \partial t$; если это не так, то следует все производные по t обозначить через X^j $(j > N)$ и рассматривать их как дополнительные неизвестные.

В дальнейшем индексы i, j у величин X, U и других будут опускаться; при этом X можно считать вектором, а U — матричным оператором, действующим на X.

Равновесное решение $X = \chi$ не зависит от времени и удовлетворяет уравнению

$$F_0 = 0, \qquad U\chi = A \qquad (6.3)$$

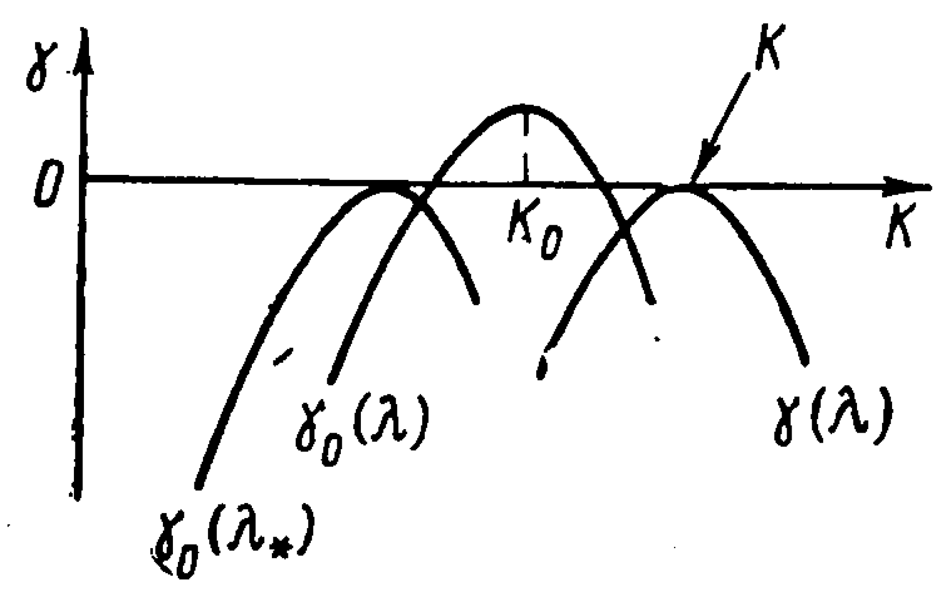
Здесь F_0 получается из F, если положить $\partial \,/\, \partial t = 0$.

При рассмотрении неограниченных в пространстве систем следует различать два случая. В случае систем первого типа равновесное решение зависит от всех декартовых координат (x, y, z) (обтекание тел потоком жидкости). Возмущения равновесия X_1 имеют вид

$$X_1 = QX_{11}e^{i\theta}, \qquad \theta = \omega t \tag{6.4}$$

Здесь Q — константа пропорциональности, а функции $X_{11}(r)$ исчезают [11] при $r \to \infty$. Частоты $\omega = \Omega - i\gamma$ образуют дискретный спектр; при слабой надкритичности нарастает только одно собственное возмущение, при большой надкритичности могут нарастать и другие возмущения. При слабой надкритичности стационарное движение малой амплитуды всегда является периодическим во времени [11].

В случае систем второго типа равновесное решение не зависит от одной [2–10] или нескольких [1] декартовых координат. В этом случае функции X_{11} в (6.4) зависят от тех же координат, что и равновесное решение χ; зависимость возмущений от остальных координат включается в экспоненциальный множитель (например, в случае неограниченных систем [2–10] с цилиндрической геометрией $\chi = \chi(r)$ и $\theta = \omega t - m\varphi - kz$, где m — целое и r, φ, z — цилиндрические координаты). В этом случае даже при малой надкритичности существует бесконечное множество нарастающих возмущений с различными волновыми числами (фиг. 7). Не очевидно, что взаимодействие этих возмущений всегда приводит к установлению периодического движения, как это имеет место в системах [1–10]; по-видимому, возможны случаи, когда стационарное движение малой амплитуды, переходящее при $\Lambda \to +0$ в равновесное, состоит из непрерывного спектра волн, т. е. является турбулентным.



Фиг. 7

Сначала рассмотрим системы второго типа; для определенности будем иметь в виду системы [2–10] с цилиндрической геометрией. В этом случае стационарное периодическое решение задачи (6.1), (6.2) имеет вид

$$X = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_\nu e^{i\nu\theta}, \qquad \theta = \omega t - m\varphi - kz; \qquad X_\nu = X_\nu(r), \qquad X_{-\nu} = X_\nu^* \tag{6.5}$$

Здесь r, φ, z — переменные цилиндрической системы координат.

Количественно удается рассмотреть лишь решения (6.5), для которых $X_0 \to \chi$, $X_\nu \to 0$ при $\Lambda \to 0$ (здесь Λ — вектор). Считая Λ малым, перепишем (6.2) в виде $X = X_0 + X_\sim$ и разложим F в ряд по малым величинам $X_\sim$; затем результат разложим в ряд по гармоникам X_ν $(\nu \neq 0)$; при этом получится

$$F \equiv F_0(X_0) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\nu} (L_1^s X_{\nu_1} e^{i\nu_1\theta}) \ldots (L_s^s X_{\nu_s} e^{i\nu_s\theta}) = 0 \tag{6.6}$$

Здесь вторая сумма берется по всем не равным нулю целым числам $\nu_1, \ldots, \nu_s$; матричные операторы $L = L(X_0, \partial/\partial t, \partial/\partial\varphi, \partial/\partial z, \partial/\partial r, r, \lambda)$ действуют на стоящие после них векторы.

Теперь составим фурье-компоненты равенств (6.6), (6.2)

$$\Phi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F e^{-i\nu\theta}\, d\theta = 0, \qquad V_\nu \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (UX - A)\, e^{-i\nu\theta} d\theta = 0 \tag{6.7}$$

Они имеют вид

$$\Phi_\nu \equiv \delta_{0\nu} F_0(X_0) + (1-\delta_{0\nu}) L_\nu X_\nu + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\nu} (L_{1\nu_1}{}^s X_{\nu_1}) \ldots (L_{s\nu_s}{}^s X_{\nu_s}) = 0$$

$$V_\nu \equiv UX_\nu - A\delta_{0\nu} = 0, \qquad \delta_{0\nu} = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu \neq 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Здесь $L_\nu \equiv L_{1\nu}{}^1$; каждый оператор L_ν получается из соответствующего оператора L заменой $\partial / \partial t$ на $i\omega\nu$, $\partial / \partial\varphi$ на $-im\nu$ и $\partial / \partial z$ на $-ik\nu$; вторая сумма берется по всем не равным нулю числам ν, удовлетворяющим условиям $\nu_1 + \ldots + \nu_s = \nu$. В дальнейшем рассматриваются уравнения (6.8) для $\nu \geqslant 0$. Решение задачи (6.8) ищем в виде [1]

$$\omega = \omega_0 + \omega_2 q + \omega_4 q^2 + \ldots, \qquad q = QQ^*$$

$$X_\nu = Q^\nu (X_{\nu,\nu} + X_{\nu,\nu+2} q + X_{\nu,\nu+4} q^2 + \ldots), \quad X_{-\nu} = X_\nu^*, \quad \nu \geqslant 0 \tag{6.9}$$

Выбор разложений ω, X_ν в виде (6.9) можно пояснить следующим образом. Стационарная амплитуда Q определена с точностью до произвольной фазы θ_0. С другой стороны, в решение (6.5) фаза θ_0 должна входить в виде суммы $\theta + \theta_0$, откуда следует, что гармоника X_ν равна произведению Q^ν на некоторую функцию амплитуды, не зависящую от фазы θ_0. Частота ω, очевидно, также не должна зависеть от произвольной фазы θ_0; этому требованию удовлетворяют ряды по степеням q. Теперь заметим, что если $\nu_1 + \ldots + \nu_s = \nu \geqslant 0$, то $|\nu_1| + \ldots + |\nu_s| = \nu + 2n$, где $n \geqslant 0$. Отсюда и из (6.9) для любого члена в (6.8) получается оценка

$$|(L_{1\nu_1}{}^s X_{\nu_1}) \ldots (L_{s\nu_s}{}^s X_{\nu_s})| \sim |Q|^{|\nu_1| + \ldots + |\nu_s|} = |Q|^\nu q^n$$

показывающая, что разложение (6.9) не противоречит уравнениям (6.8).

Подставив (6.9) в (6.8) и собрав члены при одинаковых степенях q, получим

$$\Phi_\nu \equiv Q^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\nu,\nu+2n} q^n = 0, \qquad V_\nu \equiv Q^\nu \sum_{n=0}^{\infty} V_{\nu,\nu+2n} q^n = 0$$

Отсюда следует

$$\Phi_{\nu,\nu+2n} = 0, \qquad V_{\nu,\nu+2n} = 0 \qquad (\nu, n \geqslant 0) \tag{6.10}$$

Величины ω_{2n}, $X_{\nu,\nu+2n}$ определяются раз за разом из уравнений (6.10). Для определения X_{00} получается задача

$$\Phi_{00} \equiv F_0(X_{00}) = 0, \qquad V_{00} \equiv UX_{00} - A = 0 \tag{6.11}$$

Сравнение задач (6.3), (6.11) показывает, что $X_{00} = \chi(r, \lambda)$.

Величины X_{11} определяются задачей

$$\Phi_{11} \equiv L_1{}^\circ X_{11} = 0, \qquad V_{11} \equiv UX_{11} = 0 \tag{6.12}$$

Здесь и в дальнейшем индекс° показывает, что данная величина берется при $\omega = \omega_0$, $X_0 = X_{00}$. Задача (6.12) есть задача теории устойчивости равновесного состояния; она может иметь бесконечное множество собственных значений $\omega_0 = \omega_0(k, m, \lambda)$. При малой надкритичности имеется лишь одно собственное значение, характеризующее нарастающие воз-

[1] По-видимому, разложение для частоты и гармоник вида (6.9) впервые установлено в [16,17] для некоторого конкретного уравнения, содержащего квадратичную нелинейность.

мущения; его и следует взять в качестве ω_0 в разложении (6.9); это собственное значение (предполагаемое простым) характеризуется определенным значением m (в случае [5,6] значение $m = 0$, в случае [7–10] значение $m = \pm 1$, в случае [2,4] наиболее полно исследовано [2–4] движение с $m = 0$, однако наблюдаются [4] стационарные периодические движения и с $m \neq 0$). Собственному значению ω_0 соответствует собственная функция $C_0 X_{11}$, где C_0 — произвольная константа, а X_{11} — каким-либо образом нормированная функция. Константа C_0 остается произвольной; можно считать $C_0 = 1$, поскольку выбор значения $C_0 \neq 1$ эквивалентен изменению нормировки X_{11} и связанному с ним изменению амплитуды Q.

В общем случае задача (6.10) для определения $X_{\nu,\,\nu+2n}$ имеет вид [1]

$$\Phi_{\nu,\,\nu+2n} \equiv L_\nu{}^\circ X_{\nu,\,\nu+2n} + \Psi_{\nu,\,\nu+2n} = 0, \qquad V_{\nu,\,\nu+2n} \equiv U X_{\nu,\,\nu+2n} = 0 \qquad (\nu + 2n > 1) \tag{6.13}$$

Здесь функции Ψ не зависят от $X_{\nu,\,\nu+2n}$ и содержат ранее найденные величины.

В приложении показано, что при достаточно малой надкритичности однородная задача (6.13) при $\nu \neq 1$ не имеет решений, кроме тривиального $X_{\nu,\nu+2n} = 0$; поэтому решение неоднородной задачи (6.13) есть [14]

$$X_{\nu,\,\nu+2n} = -\int_{r_1}^{r_2} G_\nu{}^\circ\,(r,\,\rho)\,\Psi_{\nu,\,\nu+2n}\,(\rho)\,d\rho \qquad (G_\nu{}^\circ = G\,(\nu\omega_0)) \tag{6.14}$$

Здесь r_2, r_1 — граничные значения радиусов, так что $r_2 \geqslant r \geqslant r_1$ (в случае систем [5–10] значение $r_1 = 0$); а матричный оператор $G\,(\omega)$ есть функция Грина задачи (6.12), в которой вместо $L_1{}^\circ = L_1\,(\omega_0)$ стоит оператор $L = L_1\,(\omega)$ (остальные аргументы операторов $L_1{}^\circ$ и L совпадают).

Функцию Грина $G\,(\omega)$ можно представить в виде [14]

$$G = -\frac{X_{11}\,(r)\,Z^*\,(\rho)}{(i\omega - i\omega_0)\,J} + G_- \qquad \left(J = \int_{r_1}^{r_2} X_{11}{}^i Z_i{}^*\,d\rho\right) \tag{6.15}$$

Здесь ω_0 — собственное значение задачи (6.12), характеризующее нарастающие возмущения, X_{11} — соответствующая собственная функция; $Z = \{Z_1, \ldots, Z_N\}$ — собственная функция сопряженной задачи (6.12), соответствующая собственному значению $\omega_0{}^*$; функция G_- регулярна при $\omega = \omega_0$. Из (6.15), (6.14) следует, что решение задачи (6.13) при $\nu = 1$ существует лишь при условии

$$\int_{r_1}^{r_2} Z_i{}^* \Psi_{1,1+2n}{}^i\,d\rho = 0 \tag{6.16}$$

и имеет вид

$$X_{1,1+2n} = -\int_{r_1}^{r_2} G_-{}^\circ\,(r,\,\rho)\,\Psi_{1,1+2n}\,(\rho)\,d\rho + C_n X_{11} \tag{6.17}$$

Условие (6.16) определяет величину ω_{2n}. Величины Ψ в (6.16) равны

$$\Psi_{1,1+2n} = \omega_{2n}\,(\partial L_1 / \partial\omega)^\circ\, X_{11} + T_{1,1+2n} \tag{6.18}$$

[1] Выражения $L_0(X_0)$ и $F_0(X_0)$ связаны соотношением $L_0 = \partial F_0/\partial X_0$.

Здесь $T_{1,1+2n}$ содержит ранее найденные величины. После подстановки (6.18) в (6.16) получается

$$\omega_{2n} = -\frac{1}{J_0}\int_{r_1}^{r_2} Z_i^* \, T_{1,1+2n}^{\;i} \, d\rho \qquad \left(J_0 = \int_{r_1}^{r_2} Z_i^* \left[\frac{\partial \, (L_1)_j^{\;i}}{\partial \omega}\right]^\circ X_{11}{}^j d\rho\right) \tag{6.19}$$

Величина J_0 отлична от нуля; в частности, для исходных уравнений вида

$$\partial X \,/\, \partial t + F = 0 \tag{6.20}$$

где F не зависит от $\partial \,/\, \partial t$ (уравнения (6.1) обычно можно привести к такому виду введением дополнительных неизвестных), J_0 отличается от $J \neq 0$ в (6.15) лишь численным множителем. Константа C_n в (6.17) остается произвольной; можно принять $C_n = 0$, поскольку выбор значения $C_n \neq 0$ эквивалентен изменению нормировки X_{11} (см. приложение).

Представляет интерес выяснить, какие величины нужно предварительно вычислить для определения $X_{\nu,\,\nu+2n}$. Составим из величин $X_{\nu,\,\nu+2n}$, ω_{2n} таблицу 1. Можно показать, что в уравнение (6.13) входят все элементы таблицы, стоящие слева от диагонолей, проведенных через элемент $X_{\nu,\,\nu+2n+2}$. Отсюда следует, что для нахождения ω_{2n} необходимо предварительно найти $X_{n+1,\,n+1}$, т. е. нужно учитывать $(n+1)$-гармоники периодического движения.

ν \ $\nu+2n$	0	1	2	3	4	5
0	X_{00}		X_{02}		X_{04}	
1		X_{11}, ω_0		X_{13}, ω_2		X_{15}, ω_4
2			X_{22}		X_{24}	
3				X_{33}		X_{35}

Частоты $\omega_{2n} = \Omega_{2n} - i\gamma_{2n}$ комплексны. Поскольку частота ω в (6.5), (6.9) должна быть действительной, то необходимо

$$\omega = \Omega_0 + \Omega_2 q + \Omega_4 q^2 + \ldots \equiv \Omega \tag{6.21}$$

$$\gamma \equiv \gamma_0 + \gamma_2 q + \gamma_4 q^2 + \ldots = 0 \tag{6.22}$$

Здесь коэффициенты при степенях q есть известные функции k, λ.

7. Для определения волнового числа и амплитуды стационарного периодического движения пока имеется лишь одно уравнение (6.22); второе следует из следующего предположения [15]: в системе устанавливается движение такой амплитуды, что максимум нелинейного инкремента γ как функции волнового числа $\mathbf{k}$ обращается в нуль (фиг. 7): значение k, при котором максимальный инкремент γ равен нулю, и будет волновым числом стационарного движения. Это предположение связано с тем, что значение q, при котором максимальный инкремент обращается в нуль, является единственным качественно выделенным среди других значений q.

Согласно сделанному предположению, величины k, q удовлетворяют уравнению

$$\partial\gamma \,/\, \partial k \equiv \gamma_0' + \gamma_2' q + \gamma_4' q^2 + \ldots = 0 \tag{7.1}$$

Это уравнение показывает, что сделанное выше предположение эквивалентно следующему: в системе устанавливается движение с таким волновым числом, при котором величина q, определяемая равенством (6.22) и рассматриваемая как функция k, максимальна.

Решение уравнения (7.1) ищется в виде

$$k = k_0 + k_1 q + k_2 q^2 + \ldots \tag{7.2}$$

Подставив (7.2) в (7.1), выполнив разложение по q и приравняв нулю коэффициенты при степенях q, получим

$$\gamma_0' = 0, \qquad \gamma_0''k_1 + \gamma_2' = 0, \ldots \tag{7.3}$$

Здесь величины γ берутся при $k = k_0$.

Из (7.3) определяются раз за разом величины k_n. Первое уравнение определяет $k_0 = k_0(\lambda)$ и показывает, что при $k = k_0$ линейный инкремент γ_0 максимален (фиг. 7). Из второго уравнения получается $k_1 = -\gamma_2' / \gamma_0''$; непосредственно из фиг. 7 видно, что при малой надкритичности $\gamma_0'' \neq 0$. Аналогично находятся и другие величины $k_n = k_n(\lambda)$.

Подставив (7.2) в (6.21), (6.22) и собрав члены при одинаковых степенях q, получим

$$\omega = \Omega_0 + \Omega_1 q + \ldots \qquad (\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_0' k_1, \ldots) \tag{7.4}$$

$$\gamma \equiv \gamma_0 + aq + bq^2 + \ldots = 0, \qquad (a = \gamma_2) \qquad b = \gamma_4 + \gamma_2' k_1 + {}^1/_2 \gamma_0'' k_1^2 \tag{7.5}$$

Здесь величины γ_{2n} берутся при $k = k_0$; коэффициенты при степенях q в (7.4), (7.5) есть известные функции параметров λ.

Решения уравнения (7.5) найдены в п. п. 1—5.

Отметим, что в системах второго типа случай апериодических нарастающих возмущений (при этом [2] функция $\Omega_0(k) \equiv 0$) ничем не выделен с точки зрения применимости вычислений; можно, однако, показать (см. приложение), что в этом случае стационарное периодическое решение малой амплитуды не зависит от времени.

8. Рассмотрим системы первого типа (равновесное состояние зависит от всех декартовых координат, а возмущения и стационарное движение не являются периодическими ни по одной из декартовых координат).

Пусть нарастающее возмущение имеет осциллирующий характер [11]; тогда вычисления п. 6 не изменяются, если только величины r, ρ понимать как векторы (при этом интегрирование по ρ производится по всему объему V, в котором движется жидкость), кроме того, в данном случае $\theta = \omega t$.

Выражения (6.5), (6.9) показывают, что Q входит в стационарное решение в виде комбинации $Qe^{i\omega t} = Q(t)$.

Амплитуда $Q(t)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$dQ / dt = i\omega Q \tag{8.1}$$

которое сохраняет смысл и для $\gamma \neq 0$; в частности, (8.1) переходит в уравнение линейной теории, если пренебречь в ω всеми степенями q. Если в (8.1) положить $Q = |Q| e^{i\theta}$ и отделить вещественные и мнимые части, то получится (1.1) и уравнение $d\theta / dt = \Omega$.

В случае систем первого типа устойчивым решениям уравнения (1.1) (в котором γ берется в виде (6.22)) всегда соответствуют наблюдаемые стационарные периодические движения.

В случае систем второго типа стационарное движение устанавливается в результате взаимодействия непрерывного спектра нарастающих волн. При исследовании устойчивости стационарных решений уравнения (1.1) для отклонения δq от стационарного значения q получается

$$d\delta q / dt = \delta q \, (\gamma + q\partial\gamma / \partial q + q \, (\partial\gamma / \partial k) dk / dq) \tag{8.2}$$

Здесь $\gamma = \gamma(k, q)$ определено в (6.22), а $k = k(q)$ — в (7.1), (7.2).

В силу (6.22), (7.1), в (8.2) остается лишь второе слагаемое, в котором k равно волновому числу стационарного решения (7.2); отсюда следует, что стационарное решение с волновым числом (7.2) исследуется на устойчивость лишь относительно возмущений δq с тем же самым волновым числом. Таким образом, исследование устойчивости на основе уравнения (1.1) не является в данном случае полным (в отличие от случая систем первого типа), и устойчивым стационарным решениям (1.1) соответствуют наблюдаемые стационарные движения лишь тогда, когда последние действительно являются периодическими.

Теперь рассмотрим системы первого типа, которые при малой надкритичности неустойчивы относительно апериодического возмущения. Следует ожидать, что стационарное решение в этом случае не зависит от времени и определено полностью (не содержит произвольной фазы). Можно считать, что $\chi = A = 0$ для задачи (6.1), (6.2) (это всегда достигается введением новой неизвестной $X_* = X - \chi$). Ищем решение в виде

$$X = QX_1 + Q^2X_2 + \ldots, \partial / \partial t = \gamma \equiv \gamma_0 + Q\gamma_1 + Q^2\gamma_2 + \ldots \quad (8.3)$$

Здесь Q — вещественная амплитуда; удобно считать $Q > 0$.

Подставив (8.3) в (6.1), (6.2) и приравняв нулю коэффициенты при степенях Q, получим задачи для определения γ_{n-1}, X_n.

При $n = 1$ получается линейная задача теории устойчивости

$$L^\circ X_1 = 0, \qquad UX_1 = 0 \qquad (L = L(\gamma, \nabla, r, \lambda)) \quad (8.4)$$

Здесь и в дальнейшем градус показывает, что соответствующая величина берется при $\gamma = \gamma_0$. В качестве γ_0 и X_1 в (8.3) следует взять собственное значение (предполагаемое простым) и собственную функцию задачи (8.4), которые характеризуют нарастающее возмущение; по условию $\gamma_0 > 0$ и поэтому X_1 можно выбрать вещественной. При $n > 1$ имеем задачу

$$L^\circ X_n + \gamma_{n-1} (\partial L / \partial\gamma)^\circ X_1 + T_n = 0, \qquad UX_n = 0 \quad (8.5)$$

Здесь T_n зависит от ранее найденных величин. Пусть $G(\gamma)$ есть функция Грина для задачи (8.4); она получается из (6.15) заменой X_{11} на X_1 и $i\omega$ на γ. Из (8.4) и (6.15) следует, что решение задачи (8.5) существует при условии

$$\gamma_{n-1} = -\frac{1}{J_0}\int_V ZT_n d\rho \qquad \left(J_0 = \int_V Z\,\frac{\partial L}{\partial\gamma}\,X_1 d\rho\right) \quad (8.6)$$

и имеет вид (8.7)

$$X_n = -\int_V G_-^\circ(r, \rho)\,\Psi_n(\rho)\,d\rho + C_{n-1}X_1, \qquad \Psi_n = T_n + \gamma_{n-1}\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma}\right)^\circ X_1$$

Здесь Z — вещественная собственная функция сопряженной задачи (8.8), соответствующая значению $\gamma_0 > 0$. Константы C_n произвольны; можно положить $C_n = 0$ (при этом нормировка функций X_1 не меняется).

Наблюдаемым движениям соответствуют устойчивые стационарные решения $Q > 0$ уравнения $dQ / dt = \gamma Q$, где γ определено в (8.4); можно показать (см. приложение), что γ вещественно при достаточно малых Q.

Следует отметить, что нелинейный инкремент γ можно вычислять способом, отличающимся от изложенных в п. п. 6, 8 (см. приложение).

Все вышесказанное о жестком возбуждении применимо к системам с конечным числом степеней свободы (описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями (6.1)). В этом случае уравнения (6.10) являются алгебраическими, и задача нахождения величин ω_{2n}, $X_{\nu,\nu+2n}$ упрощается настолько, что становится возможным рассмотрение конкретных примеров [18] (без применения вычислительных машин).

Приложение. Покажем, что однородная задача (6.13) при $\nu \neq 1$ не имеет нетривиальных решений. Достаточно доказать утверждение для $\Lambda = 0$; тогда оно останется верным и для достаточно малых Λ, поскольку $q \to 0$ при $\Lambda \to 0$ (здесь Λ — вектор). По определению критических параметров λ_*, линейный инкремент $\gamma_0 = \gamma_0(k, \lambda_*)$ исчезает при $k = k_0(\lambda_*) = k_*$ и отрицателен при $k \neq k_*$ (фиг. 7); при этом частота $\omega_0 = \omega_0(k, \lambda_*)$ действительна при $k = k_*$ (и равна ω_*) и комплексна при $k \neq k_*$. Таким образом, задача (6.13) с оператором $L_* = L_1^\circ(\lambda_*)$ имеет вещественное собственное значение $\omega_0 = \omega_*$ лишь при $k = k_*$; при $k = \nu k_*$ ($\nu \neq 1$) собственные значения ω_0 комплексны, следовательно, вещественное значение $\omega_0 = \nu\omega_*$ не будет собственным.

Покажем, что выбор постоянных $C_n \neq 0$ в (6.17), (8.9) эквивалентен изменению нормировки X_{11}, X_1. Пусть q есть амплитуда стационарного решения, соответствующая выбору $C_0 = 1$, $C_1 = C_2 = \ldots = 0$. Введем «новую» амплитуду $Q^\wedge$ равенством

$$Q = C(Q / C) \doteq C(Q^\wedge) \qquad \text{(A.1)}$$

Если взять C в виде

$$C = C_0^\wedge + C_1^\wedge q^\wedge + C_2^\wedge (q^\wedge)^2 + \ldots, \quad q^\wedge = Q^\wedge Q^{\wedge *}$$

подставить (А.1) в решение (6.5), (6.9) и собрать члены при одинаковых степенях $Q^\wedge$, то получатся выражения, зависящие от констант $C_0^\wedge$, $C_1^\wedge, \ldots$; их можно подобрать так, чтобы получить решение (6.9) с произвольными значениями констант $C_0, C_1, \ldots$ Аналогичное преобразование решения (6.9) получается, если вместо (А.1) принять $X_{11} = C(X_{11} / C) = CX_{11}^\wedge$ в выражениях $X_{\nu,\,\nu+2n}$ через X_{11}.

Покажем, что если в (6.9) величина $\Omega_0 \equiv 0$, то и $\Omega_{2n} = 0$, т. е. стационарное периодическое решение не зависит от времени. Ищем решение X в виде вещественного ряда Фурье по пространственным координатам, в котором n-гармоника пропорциональна $\exp n\gamma t$. Коэффициенты ряда и инкремент γ ищем в виде разложений типа (6.9) по вещественной амплитуде Q; при этом для определения γ_{2n} и величин типа $X_{\nu,\,\nu+2n}$ получатся вещественные уравнения (поскольку исходная задача (6.1), (6.2) вещественна). По условию, γ_0 вещественно, поэтому функции типа X_{11} можно взять вещественными; $G(\gamma)$ также вещественна при действительном γ, и поэтому γ_{2n} и величины типа $X_{\nu,\,\nu+2n}$ получатся действительными. В случае задачи (8.3) — (8.7) величины γ_n также действительны.

Стационарные решения можно находить способом [17], в котором зависимость от времени полностью включается в амплитуду Q; в случае периодических решений для Q постулируется уравнение (8.1), (6.9), а решение X ищется в виде

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \qquad (|X_n| \sim |Q|^n) \qquad \text{(A.2)}$$

Следует принять $X_0 = \chi$ и

$$X_1 = QX_{11} + (QX_{11})^* \qquad \text{(A.3)}$$

Тогда для вещественных величин X_n получится

$$X_n = \sum_{\nu=0}^{n} Q^{n-\nu} (Q^*)^\nu X_{n-2\nu,\,n}, \qquad X_{-\nu,\,n} = X_{\nu,\,n}^* \qquad \text{(A.4)}$$

Для простоты предположим, что исходные уравнения имеют вид (6.20); тогда при подстановке (А.4), (А.2) в (6.20) при помощи (8.1) получится

$$d(Q^\nu q^n) / dt = Q^\nu q^n (i\nu\omega + 2n\gamma) \qquad (\omega = \Omega - i\gamma) \qquad \text{(A.5)}$$

Здесь γ, ω — нелинейные инкремент и частота. Если в разложении (6.20), (6.2) по степеням Q приравнять нулю коэффициенты при $Q^{\nu}q^{n}$, то получится задача для определения $X_{\nu,\ \nu+2n}$. При $\nu = 1$, $n = 0$ имеем задачу теории устойчивости (6.12). При $\nu + 2n > 1$ получается задача (6.13), в которой $L_{\nu}{}^{\circ} = L_1 (i\nu\omega_0 + 2n\gamma_0)$; если $\gamma_0 \neq 0$, то для любых ν решение имеет вид (6.14). Нетрудно видеть, что $X_{1,\ 1+2n} \to \infty$ при $\Lambda \to 0$, так как знаменатель первого слагаемого в выражении (6.15) для G пропорционален $2n\gamma_0$. Для ограниченности [17] величин $X_{1,\ 1+2n}$ при $\Lambda = 0$ необходимо выполнение условия (6.16), из которого находится ω_{2n} в (6.19); при этом для $X_{1,\ 1+2n}$ получается выражение (6.17), в котором $C_n = 0$.

В случае непериодического стационарного движения для Q следует постулировать $dQ / dt = \gamma Q$; где γ, X берутся согласно (8.3), (8.4). В этом случае

$$dQ^n / dt = Q^n (\gamma + (n - 1) \gamma) \tag{A.6}$$

Затем задача (6.20), (6.2) решается так же, как и в случае периодического стационарного движения.

Отметим, что при решении задачи (6.20), (6.2) способом, описанным в пп. 6, 8, учитываются лишь первые слагаемые в левых частях (А.5), (А.6). В обоих способах, однако, выражения для производных (А.5), (А.6) имеют один и тот же физический смысл при $\gamma = 0$; отсюда следует, что решения, получаемые двумя способами, физически тождественны и отличаются лишь нормировкой функций X_{11} или X_1.

В заключение приношу благодарность А. А. Веденову, М. А. Леонтовичу, М. А. Наймарку за обсуждение отдельных вопросов, затронутых в данной работе.

Поступила 10 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Benard M. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent. Ann. Chim. Phys., 1901, vol. 23, p. 62.
2. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. A, 1923, vol. 223, p. 289.
3. Donnelly R. J. Experimental confirmation of the Landau law in Couette flow. Phys. Rev. Lett., 1963, vol. 10, p. 282.
4. Lewis J. W. An experimental study of the motion of a viscous liquid contained between two coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 1928, vol. 117, 388.
5. Pupp W. Über laufende Schichten in der positiven säule von Edelgasen. Physik Z., 1932, v. 33, S. 844.
6. Зайцев А. А. Автоколебательные режимы и бегущие слои в разряде. Докл. АН СССР, 1952, т. 84, стр. 41.
7. Paulikas J. A., Pyle R. V. Macroscopic Instability of the Positive Coluum in a Magnetic Field. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, p. 348.
8. Hoh F. C., Lehnert B. Diffusion Processes in a Plasma Coluum in a Longitudinal Magnetic field. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, p. 600.
9. Johnson R. R. Proc. 6 Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Orsay, France, 1963.
10. Ancker-Johnson B. Hysteresis in the helical instability produced in electron-hole plasma. Appl. Phys. Lett., 1965, vol. 3, p. 104.
11. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44.
12. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, стр. 249.
13. Веденов А. А., Пономаренко Ю. Б. О возникновении турбулентности. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, стр. 2247.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат, 1954.
15. Пономаренко Ю. Б. Об одном виде стационарного движения в гидродинамике. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
16. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 9, p. 353.
17. Watson T. On the non-linear mechanics of disturbanes in stable and unstable parallel flows. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 3, p. 371.
18. Пономаренко Ю. Б. О «жестком» возникновении колебаний. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1964.