

## АСИММЕТРИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский

(Ленинград)

Так называемая асимметрическая механика сплошных сред представляет собой обобщение обычной континуальной механики сплошных сред на случай, когда тензор напряжений становится асимметрическим ( $\sigma_{ik} \neq \sigma_{ki}$ ).

Выражение  $\sigma_{ik} e_{ikl} = 1/2 (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) e_{ikl}$  определяет равнодействующую моментов сил, действующих на элемент среды, поэтому эта равнодействующая может быть уравновешена только моментами пар. В ряде работ [1-2] предполагается наличие объемно-распределенных пар  $m_i$ , обусловленных внешним воздействием, однако наибольший интерес [3-5] представляет случай, когда между частицами среды действуют пары. Тогда действие одной соприлегающей части среды на другую характеризуется не только поверхностными силами (напряжениями), но и поверхностными моментами (микромоментами). Эта идея нашла свое отражение в ряде работ [5-8].

Первоначально асимметрическая механика сплошных сред развивалась как теория упругости, но в последнее время появились исследования [9-11], в которых разрабатывается асимметрическая гидромеханика. Необходимость этих исследований объясняется желанием уточнить рамки применимости классической гидромеханики вязких сред. Можно думать, что асимметрическая гидромеханика сможет объяснить ряд отклонений экспериментальных данных от предсказаний теории. Она отличается от обычной гидромеханики уточнением напряженного состояния, которое характеризуется асимметрическим тензором напряжения  $\sigma_{ik}$  ( $\sigma_{ik} \neq \sigma_{ki}$ ) и тензором поверхностных микромоментов  $\mu_{ik}$ .

Деформированное состояние описывается тензором скоростей деформаций  $\epsilon_{ik}$  и тензором скоростей микроручений и микроизгибов  $r_{ik}$ . Устанавливаются реологические законы, т. е. связь между  $\sigma_{ik}$  и  $\mu_{ik}$  с  $\epsilon_{ik}$  и  $r_{ik}$ . В этих соотношениях фигурируют добавочные коэффициенты, которые можно назвать коэффициентами вращательной вязкости.

Строятся уравнения движения жидкости в компонентах скорости и их общее решение. Сформулированы граничные условия, достаточные для решения уравнений движения. Рассматриваются истечение жидкости из капилляра, движение сферы в жидкости и вязкость суспензий.

**1. Напряженное состояние.** Напряженное состояние сплошной среды (безразлично — жидкой или твердой) было рассмотрено с точки зрения асимметрической теории в ряде работ [5-8]. Оно характеризуется асимметрическим тензором напряжений  $\sigma_{ik}$  и тензором<sup>1</sup> микромоментов  $\mu_{ik}$ ,

<sup>1</sup> Под микромоментами понимают плотность пар, которые, наряду с плотностью сил (напряжениями), действуют в сечении, мысленно проведенном в среде, находящейся в напряженном состоянии. Смысл  $\mu_{ik}$  виден из соотношения  $\mu_{ik} v_k = M_i$ , где  $M_i$  — плотность поверхностных моментов на элементарной площадке внутри тела с нормалью  $v_k$ . Диагональные компоненты  $\mu_{ik}$  характеризуют скручивающие моменты, недиагональные — изгибающие.

подчиняющимся уравнениям поступательного и вращательного движений элемента среды <sup>1</sup>

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{nm} \epsilon_{imn} + \rho m_i = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $f_i$  и  $m_i$  — плотность объемно-распределенных сил и моментов,  $v_i$  — скорость поступательного движения элемента среды,  $d/dt$  — субстанциональная производная,  $\epsilon_{imn}$  — единичный аксиальный асимметрический тензор (тензор Леви — Чивита).

Легко видеть, что  $\sigma_{nm} \epsilon_{imn} \equiv \sigma_{nm}^- \epsilon_{imn}$ , где  $\sigma_{nm}^-$  — антисимметрическая часть тензора напряжений. Из (1.1) следует, что несимметричность тензора напряжений обусловлена микромоментами  $\mu_{ik}$  и объемно-распределенными моментами  $m_i$ . В классической гидромеханике  $\mu_{ik} = 0$ ,  $m_i = 0$ , поэтому тензор напряжений симметричен.

2. Диссипативная функция. Для получения обобщенных реологических законов обратимся к рассмотрению процесса деформирования жидкости в изотермических условиях.

В асимметрической теории необходимо <sup>[5]</sup> учитывать «собственные» угловые характеристики  $\Omega$  частиц среды, отличные от скорости поворота участка среды как целого (т. е.  $|\frac{1}{2} \text{rot} + v|$ ). Иными словами, состояние текущей жидкости определяется не только полем поступательных  $v$ , но и угловых  $\Omega$  скоростей <sup>2</sup>.

В этом случае выражение для работы деформирования единицы объема среды (безразлично — жидкой или твердой) в единицу времени имеет вид <sup>3</sup>

$$\partial L / \partial t = \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik} + \mu_{ik} \dot{r}_{ik} \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по времени. Обобщенные скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{ik}$  и  $\dot{r}_{ik}$  связаны с полем скоростей  $v_i$  и угловых скоростей  $\Omega_i$  следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \Omega_l \epsilon_{lki}, \quad \dot{r}_{ik} = \frac{\partial \Omega_l}{\partial x_k} \quad (2.2)$$

В случае жидкости величина  $\partial L / \partial t$  может быть представлена в виде суммы двух членов: скорости нарастания свободной энергии  $d(\rho F) / dt$ , обусловленной упругими деформациями, и скорости выделения тепла  $\Psi$ , обусловленной процессами диссипации энергии, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} (\rho F) + \Psi \quad (2.3)$$

Если принять, что накопление упругой деформации обусловлено лишь всесторонним сжатием жидкости, тогда

$$\frac{d}{dt} (\rho F) = - p \dot{\epsilon}_{ii} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> В работах [9-11] в правой части второго уравнения (1.1) фигурирует динамический член. Однако его учет не влияет на основные соотношения, получаемые ниже.

<sup>2</sup> Эта терминология условна. Под угловой скоростью  $\Omega$  следует понимать величину, усредненную по физически малому объему, характеризующую некоторое внутреннее вращательное движение в нем, отличное от движения его как целого.

<sup>3</sup> См. выражение, следующее непосредственно за соотношением (8) в [5].

где  $p$  — термодинамическое давление. Подставляя (2.4) в (2.3) и учитывая (2.1), получаем

$$\Psi = (\sigma_{ik} + p\delta_{ik}) \dot{\varepsilon}_{ik} + \mu_{ik} \dot{r}_{ik} \quad (2.5)$$

Разлагая диссипативную функцию в ряд по степеням компонентов скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ik}$  и  $\dot{r}_{ik}$  и учитывая лишь члены не выше второго порядка, имеем

$$1/2 \Psi = A_{iklm} \dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{lm} + B_{iklm} \dot{\varepsilon}_{ik} \dot{r}_{lm} + C_{iklm} \dot{r}_{ik} \dot{\varepsilon}_{lm} + D_{iklm} \dot{r}_{ik} \dot{r}_{lm} \quad (2.6)$$

Матрицы коэффициентов  $A_{iklm}$ ,  $B_{iklm}$ ,  $C_{iklm}$  и  $D_{iklm}$  определяются свойствами жидкости. Ограничимся рассмотрением лишь изотропных жидкостей, свойства которых не меняются при зеркальном отражении, (т. е. жидкость негиротропна), тогда

$$1/2 \Psi = 1/2 \lambda \dot{\varepsilon}_{nn} \dot{\varepsilon}_{kk} + 1/2 (\mu + \gamma) \dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{ki} + 1/2 (\mu - \gamma) \dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{ik} + \quad (2.7) \\ + \eta \dot{r}_{nn} \dot{r}_{kk} + \tau \dot{r}_{ik} \dot{r}_{ki} + \theta \dot{r}_{ik} \dot{r}_{ik}$$

Коэффициенты этой квадратичной, существенно положительной формы, как показано в [12], подчиняются следующим неравенствам:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu - \gamma > 0, \quad \theta + \tau > 0, \quad \theta - \tau > 0, \quad \gamma < 0$$

3. Реологические законы. Чтобы найти реологические законы, применим к выражению (2.7) теорему Эйлера об однородных функциях

$$2\Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ik}} \right)_{\dot{r}_{ik}} \dot{\varepsilon}_{ik} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{r}_{ik}} \right)_{\dot{\varepsilon}_{ik}} \dot{r}_{ik} \quad (3.1)$$

Отождествляя это выражение с (2.5), получим соотношения

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ik}} \right)_{\dot{r}_{ik}}, \quad \mu_{ik} = 1/2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{r}_{ik}} \right)_{\dot{\varepsilon}_{ik}} \quad (3.2)$$

Подставляя в них выражение (2.7), для  $\Psi$  получим

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \lambda \dot{\varepsilon}_{ll} \delta_{ik} + (\mu + \gamma) \dot{\varepsilon}_{ki} + (\mu - \gamma) \dot{\varepsilon}_{ik} \quad (3.3)$$

$$\mu_{ik} = 2\eta \dot{r}_{nn} \delta_{ik} + 2\tau \dot{r}_{ki} + 2\theta \dot{r}_{ik} \quad (3.4)$$

Эти соотношения, как легко видеть, имеют вид обобщенной гипотезы Ньютона — Навье — Стокса. Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  представляют собой коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости. Коэффициенты  $\eta$ ,  $\tau$  и  $\theta$  можно назвать коэффициентами вращательной вязкости<sup>1</sup>.

4. Основные уравнения. Уравнения движения в компонентах скоростей могут быть получены путем замены в уравнениях движения в форме (1.1) напряжений  $\sigma_{ik}$  и микромоментов  $\mu_{ik}$ , согласно реологических законов (3.3) и (3.4), на скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ik}$  и  $\dot{r}_{ik}$ , последние, в свою очередь, заменяются на скорости  $v_i$  и угловые скорости  $\Omega_i$ , согласно (2.2).

<sup>1</sup> Они численно равны моменту, приходящемуся на единицу поверхности участка среды, когда последний вращается по отношению к соседям так, что градиент угловой скорости равен единице. Коэффициент  $\gamma$  характеризует меру «сцепления» частицы со своим окружением. Если  $\gamma \rightarrow 0$ , то частица свободно проворачивается относительно окружающей среды. Если  $\gamma \rightarrow \infty$ , то частица вращается вместе с прилегающим к ней участком среды.

Пренебрегая зависимостью коэффициентов вязкости ( $\lambda, \mu, \eta, \theta, \gamma$ ) от координат, получим

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{v} - (\mu - \gamma) \text{rot rot } \mathbf{v} - 2\gamma \text{rot } \Omega^* \\ (\eta + \tau + \theta) \text{grad div } \Omega^* - \theta \text{rot rot } \Omega^* + 2\gamma \Omega^* - \gamma \text{rot } \mathbf{v} + \rho \mathbf{m} = 0. \quad (4.2)$$

Эта система двух векторных уравнений содержит восемь неизвестных функций — три компоненты скорости  $\mathbf{v}$ , три компоненты «собственной» угловой скорости  $\Omega^*$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ . Для определения этих восьми функций необходимо иметь, наряду с шестью уравнениями движения, скажем, в форме (4.1) и (4.2), еще два уравнения. Они могут быть получены из закона сохранения вещества (уравнение неразрывности) и закона сохранения энергии. Уравнение неразрывности не связано с напряженным состоянием в жидкости и поэтому имеет тот же вид, что и в обычной гидромеханике

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3)$$

Уравнение притока тепла зависит от напряженного состояния и поэтому должно быть модифицировано. Если ввести понятие об удельной внутренней энергии  $\varepsilon$ , представляющей собой внутреннюю энергию единицы массы<sup>1</sup>, то ее приращение будет определяться: 1) потоком энергии, который обусловлен переносом массы через границы объема, 2) притоком тепла благодаря теплопроводности и 3) элементарной работой объемной силы и объемных моментов, поверхностных сил и поверхностных моментов<sup>2</sup>. Первые два слагаемых не требуют модификации, а в третьем работа деформирования единицы объема жидкости должна быть рассчитана по формуле (2.1). Окончательно получим

$$\rho d\varepsilon / dt = \text{div } (\kappa \text{grad } T) + q (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik} + \mu_{ik} \Gamma_{ik}) \quad (4.4)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $q$  — термический эквивалент работы,  $T$  — температура. Для замкнутости уравнений к (4.4) нужно присоединить еще уравнение состояния

$$p = p(\rho, T) \quad (4.5)$$

5. Общее решение уравнений движения для случая «ползущих» движений. В силу нелинейности выражения для ускорения

$$d\mathbf{v} / dt = \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$$

система (4.1) и (4.2) оказывается весьма сложной. Однако если ограничиться рассмотрением установившихся «ползущих» движений (приближение Стокса) в отсутствие объемно распределенных сил<sup>3</sup> и моментов ( $f_i = 0, m_i = 0$ ), то задача интегрирования уравнений движения сводится к решению известных уравнений второго порядка.

<sup>1</sup> Это можно сделать в пренебрежении энергией взаимодействия участков жидкости друг с другом.

<sup>2</sup> Другие источники изменения  $\varepsilon$  учитывать не будем.

<sup>3</sup> Или если объемные силы имеют потенциал.

Действительно, применяя операцию  $\text{div}$  к (4.1) и (4.2), получим

$$\Delta g = 0, \quad k_1^2 \Delta \varphi - \varphi = 0 \quad (5.1)$$

Здесь <sup>1</sup>

$$g = (\lambda + 2\mu) \text{div } v - p, \quad \varphi = \text{div } \Omega' \\ k_1^2 = -1/2 (\eta + \theta + \tau) \gamma^{-1} \quad (5.2)$$

Далее, подставляя (4.2) в (4.1), приходим к уравнению

$$\text{grad } g - 2\mu \text{rot } \Omega' + \theta (\mu - \gamma) \gamma^{-1} \text{rot rot rot } \Omega' = 0 \quad (5.3)$$

из которого без труда находим

$$\text{rot } \Omega' = \Omega'_1 + 1/2 \mu^{-1} \text{grad } g \quad (5.4)$$

где  $\Omega'_1$  удовлетворяет уравнению <sup>2</sup>

$$k_2^2 \text{rot rot } \Omega'_1 + \Omega'_1 = 0, \quad k_2^2 = 1/2 \theta (\mu - \gamma) \mu^{-1} \gamma^{-1} \quad (5.5)$$

Учитывая (5.4), в (4.1) получаем отдельное уравнение для  $v$

$$-\text{grad } p + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } v - \mu \text{rot rot } v = 2\gamma\mu (\mu - \gamma)^{-1} \Omega'_1 \quad (5.6)$$

которое можно рассматривать как неоднородное. Его решение имеет вид

$$v = v^\circ - \theta \mu^{-1} \Omega'_1 \quad (5.7)$$

Здесь  $v^\circ$  — решение соответствующего однородного уравнения

$$-\text{grad } p + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } v^\circ - \mu \text{rot rot } v^\circ = 0 \quad (5.8)$$

т. е. уравнения Навье — Стокса обычной гидромеханики, а  $-\theta \mu^{-1} \Omega'_1$  — частное решение (5.6), которое легко находится, если учесть (5.8).

Найдем теперь  $\Omega'$ . Подставляя в (5.4) соотношения (5.5) и учитывая (5.8), приходим к уравнению

$$\text{rot } \Omega' = -k_2^2 \text{rot rot } \Omega'_1 + 1/2 \text{rot rot } v^\circ \quad (5.9)$$

из которого находим

$$\Omega' = 1/2 \text{rot } v^\circ - k_2^2 \text{rot } \Omega'_1 + \text{grad } \varphi^* \quad (5.10)$$

с точностью до не определенного пока  $\text{grad } \varphi^*$ . Сопоставляя выражение для  $\text{div } \Omega'$ , найденное из (5.10), с выражением (5.2), получаем  $\varphi^* = k_1^2 \varphi$  с точностью до несущественной гармонической функции. Отсюда

$$\Omega' = 1/2 \text{rot } v^\circ - k_2^2 \text{rot } \Omega'_1 + k_1^2 \text{grad } \varphi \quad (5.11)$$

Таким образом, общее решение системы уравнений стационарного медленного течения жидкости (4.1) и (4.2) дается соотношениями (5.7) и (5.11), т. е. сводится к решению известных уравнений Навье — Стокса обычной гидромеханики (5.8) и уравнений типа Гельмгольца (5.1) и (5.5).

Заметим, что последние можно записать в виде единого уравнения, введя вместо  $\varphi$  и  $\Omega'_1$  ( $\text{div } \Omega'_1 = 0$ ) один вектор  $\Omega'_2$

$$\Omega'_2 = -k_2^2 \text{rot } \Omega'_1 + k_1^2 \text{grad } \varphi \quad (5.12)$$

<sup>1</sup> Здесь принято, что  $\gamma \neq 0$ . Случай  $\gamma = 0$  требует особого рассмотрения.

<sup>2</sup> Отметим, что постоянные  $k_1$  и  $k_2$  имеют размерность длины.

удовлетворяющий уравнению

$$k_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \Omega_2 - k_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Omega_2 - \Omega_2 = 0 \quad (5.13)$$

Тогда вместо (5.7) и (5.11) получим

$$v = v^0 - \theta \mu^{-1} \operatorname{rot} \Omega_2, \quad \Omega = \Omega_2 + 1/2 \operatorname{rot} v^0 \quad (5.14)$$

6. **Граничные условия.** В асимметрической теории, как уже отмечалось, состояние жидкости характеризуется дополнительно полем угловых скоростей  $\Omega$ . В связи с этим в теории появляются три дополнительных уравнения движения. Из этого следует, что состояние жидкости у границы раздела <sup>1</sup> необходимо характеризовать более сложными граничными условиями.

Для решения уравнений движения (4.1) и (4.2) или, что то же, (5.1), (5.5) и (5.8) необходимо шесть условий. Поле поступательных скоростей у границы может быть задано, по-видимому, так же как и в обычной гидромеханике, в виде условия прилипания

$$[v^0 - \theta \mu^{-1} \operatorname{rot} \Omega_2]_S = V \quad (V - \text{скорость границы}) \quad (6.1)$$

Вторые три условия, очевидно, должны определять поле угловых скоростей  $\Omega$ . В этих условиях должен найти отражение механизм влияния границы на поле угловых скоростей  $\Omega$ . Поскольку этот механизм взаимодействия далеко не ясен, то ограничимся формулировкой граничных условий для вектора  $\Omega$  в некоторых идеализированных случаях. Предельным может быть случай, когда жидкость и твердая поверхность настолько сильно взаимодействуют, что частица жидкости не проворачивается относительно поверхности, и поэтому ее угловая скорость равна угловой скорости самой поверхности

$$\Omega|_S = 1/2 \operatorname{rot} V \quad (6.2)$$

Можно представить и другой случай — предельно слабого влияния поверхности на угловую скорость жидкости, когда частица свободно проворачивается относительно поверхности. Тогда, очевидно, вместо кинематического условия (6.2) на границе должно выполняться динамическое условие

$$M_i|_S = \mu_{ik} v_k|_S = 0 \quad (6.3)$$

где  $M_i|_S$  — плотность микромоментов на поверхности, а  $v_k$  — вектор нормали к ней.

Между этими крайними случаями находятся случаи заторможенного вращательного скольжения жидкости по поверхности тела. В этом случае естественно предположение о существовании трения, в результате которого на поверхности возникают микромоменты. Будем считать, что перепад угловых скоростей  $\Delta \Omega_k = \Omega_k - 1/2 (\operatorname{rot} V)_k$  на твердой поверхности пропорционален поверхностной плотности микромоментов, т. е.

$$\alpha_{ik} \Delta \Omega_k|_S = M_i|_S \quad (6.4)$$

<sup>1</sup> Здесь имеется в виду лишь граница раздела между жидкостью и твердым, непроницаемым для жидкости телом.

Здесь  $\alpha_{ik}$  — коэффициенты вращательного поверхностного трения.

Выражение (6.4) может быть получено из реологического закона (3.4) (записанного не в дифференциальной форме, а в конечных разностях) путем предельного перехода  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , где  $\Delta\xi$  — толщина пограничной области. При этом нужно учесть, что в (3.4) основную роль играют лишь производные по нормали к поверхности.

Если принять, что жидкость и граница изотропны, то приграничная область будет обладать цилиндрической симметрией относительно нормали. Это приводит к следующему виду матрицы  $\alpha_{ik}$ :

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

в проекциях на нормальное ( $i, k = 1$ ) и касательные ( $i, k = 2, 3$ ) направления. На основании (6.5) и (3.4) граничное условие (6.4) запишется в виде

$$\alpha_{ik} (\Omega - 1/2 \operatorname{rot} V)_k |_S = \left( 2\eta \operatorname{div} \Omega \delta_{ik} + 2\tau \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} + 2\theta \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} \right) v_k |_S \quad (6.6)$$

Любое из трех сформулированных условий вместе с условиями (6.1) дает шесть условий, достаточных для решения уравнений (4.1) и (4.2).

Граничное условие (6.6) содержит в себе оба ранее сформулированных предельных случая. Действительно, если  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ , то левая часть соотношения (6.6) обращается в нуль, и оно переходит в динамическое условие (6.3). Если  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ , то (6.6) переходит в условие кинематического типа (6.2).

Насколько хорошо сформулированные граничные условия отражают природу взаимодействия жидкости с твердой поверхностью, должен решить, конечно, опыт.

В заключение отметим, что в сформулированных граничных условиях векторы  $v^\circ$  и  $\Omega_2$  на границе оказываются «перепутанными». Вопрос об их «распутывании» является математически непростым и в данной работе не решается.

Для того чтобы проиллюстрировать характер эффектов, предсказываемых асимметрической гидромеханикой, рассмотрим ряд конкретных задач. Ради простоты жидкость считаем несжимаемой ( $\operatorname{div} v = 0$ ). Тогда интегрирование уравнений движения сводится к решению уравнения

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta v \quad (6.7)$$

наряду с уравнениями (5.1) и (5.5) при граничных условиях вида (6.6).

7. Истечение жидкости из капилляра. Рассмотрим истечение жидкости из цилиндрического капилляра кругового сечения радиуса  $R$ . Ось его примем за ось  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ . Поле поступательных скоростей  $v$  и «собственных» угловых скоростей  $\Omega$  ищем в виде

$$v = v(r) e_z, \quad \Omega = \Omega(r) e_\varphi \quad (7.1)$$

При такой симметрии течения  $\varphi = 0$ , а

$$v(r) = \left[ B + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 - \frac{\theta}{\mu} C I_0 \left( \frac{r}{k_2} \right) \right] \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} \right) \quad (7.2)$$

$$\Omega(r) = \left[ C k_2 I_1 \left( \frac{r}{k_2} \right) - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r \right] \quad (7.3)$$

где  $I_n(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента порядка  $n$ .

Из граничных условий (6.1) и (6.6) находим

$$B = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 + \frac{\theta}{\mu} C I_0(k) \quad \left(k = \frac{R}{k_2}\right) \quad (7.4)$$

$$C = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{k^{-1} I_1(k) + \delta_1 I_2(k)} \quad \left(\delta_1 = 1 - \frac{\tau}{\theta} - \frac{\alpha R}{\theta}\right)$$

Подставляя (7.4) в (7.2), а последнее в (7.1), находим поле скоростей (7.5)

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 - \rho^2 + \frac{2}{A^2} \frac{I_0(k\rho) - I_0(k)}{k^{-1} I_1(k) + \delta_1 I_2(k)} \right] \mathbf{e}_z \quad \left(\rho = \frac{r}{R}, A = \frac{\sqrt{2\mu} R}{\sqrt{\theta}}\right)$$

Количество жидкости, вытекшей из капилляра в единицу времени,

$$Q = Q^\circ \left[ 1 - \frac{4}{A^2} \left( \delta_1 + \frac{I_1(k)}{k I_2(k)} \right)^{-1} \right], \quad Q^\circ = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (7.6)$$

Как видно из (7.6), это количество меньше, чем по формуле Пуазейля, и тем меньше, чем меньше радиус капилляра. Рассмотрим некоторые частные случаи формулы

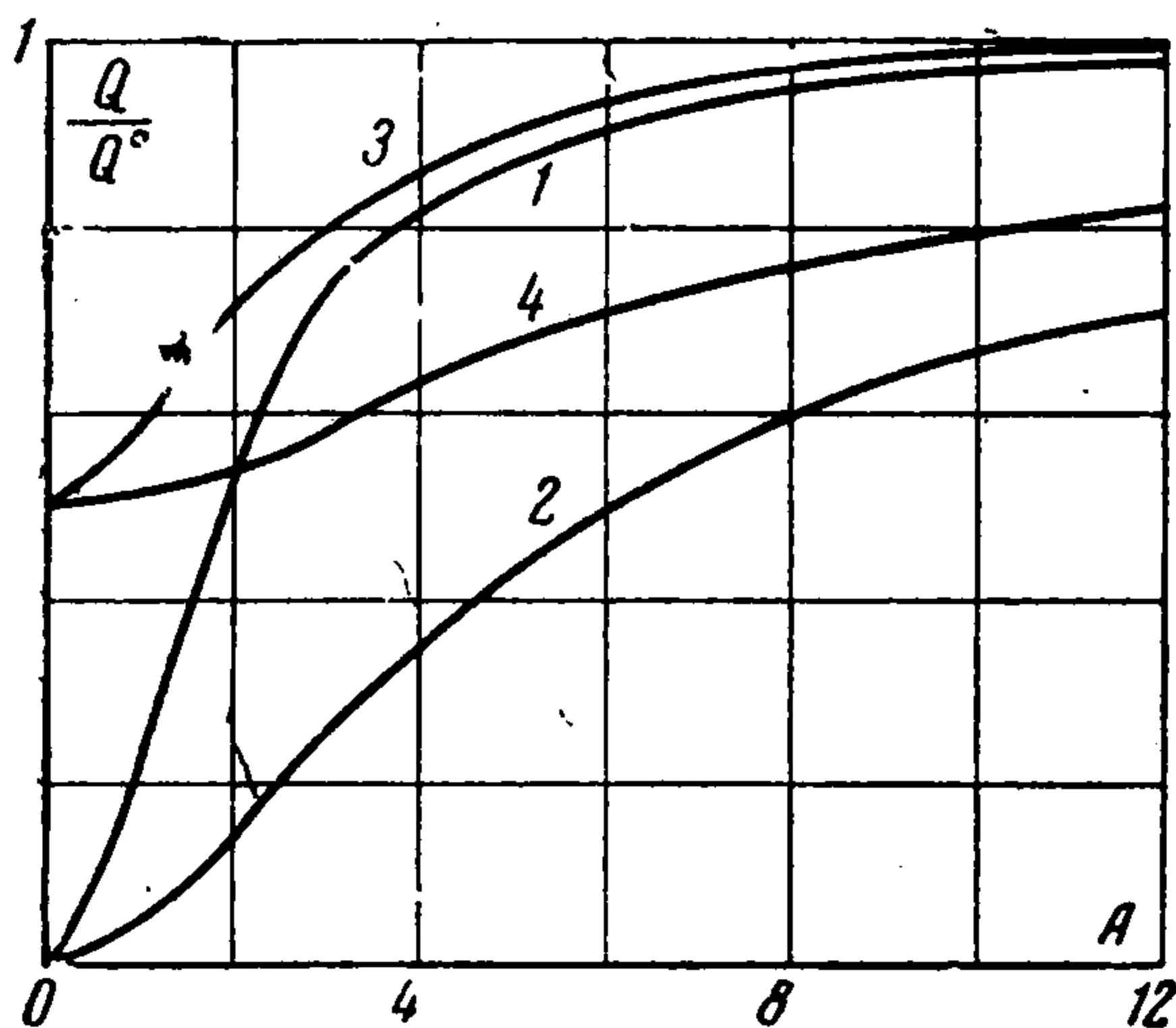
(7.6). Если  $|\gamma|/\mu \gg 1$ , то  $K \approx A$ , и (7.6) принимает вид

$$Q = Q^\circ \left[ 1 - \frac{4}{A} \frac{I_2(A)}{I_1(A)} \right] \quad (\alpha = \infty) \quad (7.7)$$

$$Q = Q^\circ \left[ 1 - \frac{4}{A^2} \left( 1 + \frac{I_1(A)}{A I_2(A)} \right)^{-1} \right] \quad (\alpha = 0)$$

Зависимость  $Q/Q^\circ$  от  $A$  изображена на фиг. 1; кривая 1 — для случая  $\alpha = 0$  и кривая 2 — для случая  $\alpha = \infty$ .

Если  $|\gamma|/\mu$  сравнимо с единицей, то кривые  $Q/Q^\circ$  от  $A$  при  $A \rightarrow 0$  на оси ординат будут зависеть от  $|\gamma|/\mu$ . Кривая 3 изображает зависимость  $Q/Q^\circ$  от  $A$  для  $|\gamma|/\mu = 1$  и  $\alpha = 0$ , а кривая 4 — для  $|\gamma|/\mu = 1$  и  $\alpha = \infty$ .



Фиг. 1

8. Поступательное движение сферы. Рассмотрим задачу об обтекании жидкостью шара радиуса  $R$ , помещенного в начале сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , потоком вязкой жидкости, имеющим на бесконечности заданную постоянную скорость  $u_i$ . Решение уравнения Навье — Стокса, как известно [13], имеет вид

$$v_i^\circ = n_i + e_{ipm} e_{pks} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_s} [f(r) u_k], \quad f(r) = ar + \frac{b}{r} \quad (8.1)$$

Здесь и в дальнейшем по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование. Решение уравнения (5.5) можно найти в виде

$$\Omega_{ii}^\circ = \partial_{ipm} \partial_{pks} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_s} [\psi(r) u_k], \quad \psi(r) = \frac{c}{r} \exp \frac{-r}{k_2} \quad (8.2)$$

Подставляя (8.1) и (8.2) в (5.7), находим поле поступательных скоростей

$$v_i = u_i [1 + F_1(r)] + n_i (n_k u_k) F_2(r) \quad (8.3)$$

$$F_1(r) = - \left\{ \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3} - \frac{\theta}{\mu} \left[ 1 + \frac{r}{k_2} + \frac{r^2}{k_2^2} \right] \frac{c}{r^3} \exp \frac{-r}{k_2} \right\} \quad (8.4)$$

$$F_2(r) = - \left\{ \frac{a}{r} - \frac{3b}{r^3} + \frac{\theta}{\mu} \left[ 3 + 3 \frac{r}{k_2} + \frac{r^2}{k_2^2} \right] \frac{c}{r^3} \exp \frac{-r}{k_2} \right\}$$

Здесь  $n_i = x_i/r$  — единичный радиус-вектор. Перепишем (8.3) в сферической системе координат

$$v_r = [1 + F_1(r) + F_2(r)] u \cos \theta, \quad v_\theta = -[1 + F_1(r)] u \sin \theta, \quad v_\varphi = 0 \quad (8.5)$$

Поле «собственных» угловых скоростей  $\Omega$ , согласно (5.11), примет вид

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_\theta = 0, \quad \Omega_\varphi = \Omega(r) u \sin \theta$$

$$\Omega(r) = \frac{a}{r^2} - c \left(1 + \frac{r}{k_2}\right) \frac{\exp(-r/k_2)}{r^2} \quad (8.6)$$

Постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  должны быть найдены из граничных условий. Граничное условие (6.1), очевидно, эквивалентно двум равенствам  $1 + F_1(R) = 0$  и  $F_2(R) = 0$ , из которых находим

$$a = \frac{3R}{4} \left\{ 1 + \frac{4}{3R} c \frac{k^2}{A^2} e^{-k} \right\} \quad (8.7)$$

$$b = \frac{R^3}{4} \left\{ 1 + \frac{4}{R} c \frac{(k+1)^2 + 1}{A^2} e^{-k} \right\}$$

Для определения  $c$  остается граничное условие (6.6), откуда

$$c = \frac{3}{4} R [1 - k^2 A^{-2} + k(1 + \delta_2 k)]^{-1}$$

$$\delta_2 = [2 + \tau \theta^{-1} + \alpha R \theta^{-1}]^{-1} \quad (8.8)$$

Для силы сопротивления  $F$ , испытываемой сферой, получим следующее выражение

$$F = \int_s (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta) ds \quad (8.9)$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^+ + \sigma_{\theta r}^- \quad (8.10)$$

Последнее выражение содержит антисимметрическую часть (с верхним индексом  $-$ ). Давление  $p$  можно найти, если в (6.7) вместо  $v^\circ$  подставить явное выражение (8.1).

Тогда получим

$$p = -2\mu r^{-2} a (n_s u_s) \quad (8.11)$$

$$\sigma_{\theta r}^+ |_{r=R} = \mu \left\{ -aR^{-2} - 3bR^{-4} + \theta \mu^{-1} c [3 + 3k + 2k^2 + k^3] R^{-4} e^{-k} \right\} u \sin \theta \quad (8.12)$$

$$\sigma_{\theta r}^- |_{r=R} = -\theta k_2^{-2} c (1 + k) R^{-2} e^{-k} u \sin \theta \quad (8.13)$$

Давление отсчитывается от его значения на бесконечности, поэтому в (8.11) опущено постоянное слагаемое. Подставляя (8.11) — (8.13) в (8.10), учитывая также (8.7), найдем

$$\sigma_{\theta r} |_{r=R} = -\frac{3}{2} R^{-1} [1 + \frac{4}{3} R^{-1} c k^2 A^{-2} e^{-k}] \mu u \sin \theta \quad (8.14)$$

$$\sigma_{rr} |_{r=R} = \frac{3}{2} R^{-1} [1 + \frac{4}{3} R^{-1} c k^2 A^{-2} e^{-k}] \mu u \cos \theta \quad (8.15)$$

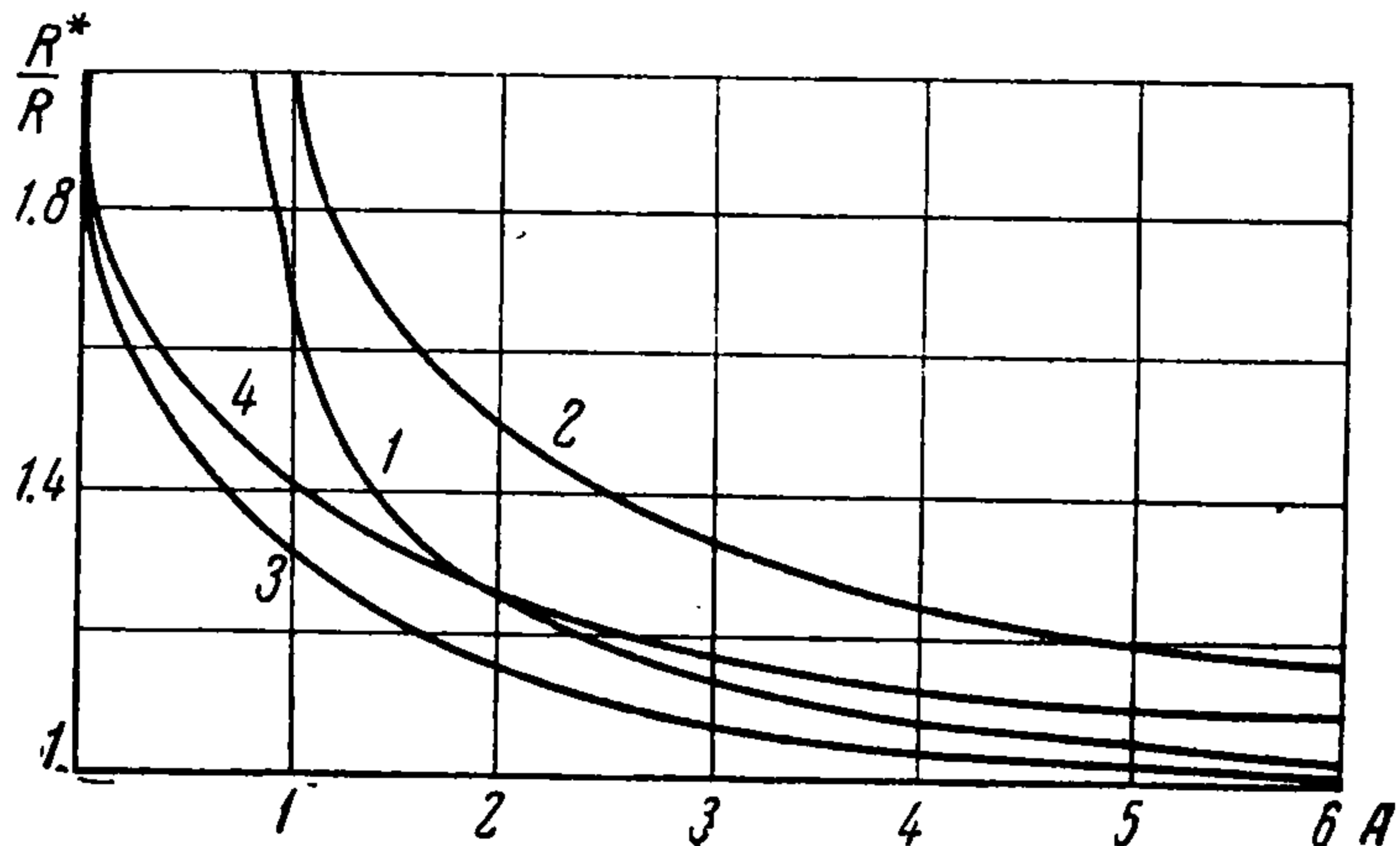
Подставляя эти выражения в (8.9) и учитывая (8.8), окончательно находим

$$F = F^\circ \left[ 1 + \frac{k^2 A^{-2}}{1 - k^2 A^{-2} + k(1 + \delta_2 k)} \right], \quad F^\circ = 6\pi \mu R u \quad (8.16)$$

Как видно из этого выражения, учет вращательного трения частиц жидкости приводит к увеличению силы сопротивления по сравнению с тем, что дает формула Стокса. Этот результат формально равносильно увеличению гидродинамического радиуса сферы. Отметим предельные случаи формулы (8.16). Если  $|\gamma|/\mu \gg 1$ , тогда

$$R^* = R [1 + A^{-1}] \quad (\alpha = \infty), \quad R^* = R [1 + 2A^{-1} (A + 2)^{-1}] \quad (\alpha = 0) \quad (8.17)$$

На фиг. 2 изображена зависимость  $R^*/R$  от  $A$  для случая  $\alpha = 0$  (кривая 1) и  $\alpha = \infty$  (кривая 2). Если  $|\gamma|/\mu$  будет сравнимо с единицей, то кривые  $R^*/R$  при  $A \rightarrow 0$  будут стремиться к конечной величине, определяемой  $|\gamma|/\mu$ . Кривая 3 изображает зависимость  $R^*/R$  от  $A$  для случая  $|\gamma|/\mu = 1$  и  $\alpha = 0$ , а кривая 4 — для случая  $|\gamma|/\mu = 1$  и  $\alpha = \infty$ .



Фиг. 2

9. Вязкость суспензий. Рассмотрим задачу о вязкости разбавленных суспензий с частицами шарообразной формы при тех же допущениях, которые были сделаны в свое время А. Эйнштейном [14]. Рассмотрим то влияние, которое оказывает на течение жидкости один, погруженный в нее шарик. В асимметрической теории эта задача сводится к решению уравнений (6.7) и (5.5) при граничных условиях (6.6) и (6.1) на поверхности шарика и условию на бесконечности

$$v_i|_{r \rightarrow \infty} = a_{ik} x_k \quad (9.1)$$

где  $a_{ik}$  — постоянный симметричный тензор, причем  $a_{ii} = 0$ . Решение данной задачи попытаемся найти в виде

$$v_i = a_{ik} x_k + v_{1i}, \quad \Omega_{1i} = e_{ipm} e_{pks} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_s} \left[ a_{kr} \frac{\partial \psi(r)}{\partial x_r} \right] \quad (9.2)$$

$$v_{1i} = v_{1i}^\circ - \frac{\theta}{\mu} \Omega_{1i}, \quad v_{1i}^\circ = e_{ipm} e_{pks} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_s} \left[ a_{kr} \frac{\partial f(r)}{\partial x_r} \right] \quad (9.3)$$

Подставляя функции  $f(r)$  и  $\psi(r)$  в явном виде в (9.3) и (9.2), найдем

$$v_{1i}^\circ = F_1(r) (a_{kr} n_k n_r) n_i + F_2(r) a_{ir} n_r, \quad \Omega_{1i} = G_1(r) (a_{kr} n_k n_r) n_i + G_2(r) a_{ir} n_r$$

$$F_1(r) = 3ar^{-2} - 15br^{-4}, \quad F_2(r) = 6br^{-4}$$

$$G_1(r) = -c (15 + 15rk_2^{-1} + 6r^2k_2^{-2} + r^3k_2^{-3}) r^{-4} \exp(-r/k_2)$$

$$G_2(r) = -c (6 + 6rk_2^{-1} + 3r^2k_2^{-2} + r^3k_2^{-3}) r^{-4} \exp(-r/k_2) \quad (9.5)$$

Подставляя (9.4) и (9.5) в выражение для  $v_{1i}$ , а это — в (9.2), найдем поле поступательных скоростей

$$v_i = F_1^\circ(r) (a_{kr} n_k n_r) n_i + [F_2^\circ(r) + r] a_{ir} n_r$$

$$F_1^\circ(r) = F_1(r) - \theta \mu^{-1} G_1(r), \quad F_2^\circ(r) = F_2(r) - \theta \mu^{-1} G_2(r) \quad (9.6)$$

Выражение (9.6) в сферической системе координат имеет вид

$$v_r = [F_1^\circ(r) + F_2^\circ(r) + r] \Phi_r(\theta, \varphi), \quad \Phi_r(\theta, \varphi) = a_{kr} n_k n_r$$

$$v_\theta = [F_2^\circ(r) + r] \Phi_\theta(\theta, \varphi), \quad \Phi_\theta(\theta, \varphi) = a_{ir} n_r \frac{\partial n_i}{\partial \theta}$$

$$v_\varphi = [F_2^\circ(r) + r] \Phi_\varphi(\theta, \varphi), \quad \Phi_\varphi(\theta, \varphi) = a_{ir} n_r \csc \theta \frac{\partial n_i}{\partial \varphi}$$

Зная  $v_{1i}^\circ$  и  $\Omega_{1i}^\circ$ , по (5.11) найдем поле «собственных» угловых скоростей

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_\theta = \Omega(r) \Phi_\varphi(\theta, \varphi), \quad \Omega_\varphi = -\Omega(r) \Phi_\theta(\theta, \varphi)$$

$$\Omega(r) = 3ar^{-3} - c (3 + 3rk_2^{-1} + r^2k_2^{-2}) r^{-3} \exp(-r/k_2) \quad (9.8)$$

Постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  находятся из условий (6.6) и (6.1). Как легко видеть из (9.7), условие (6.1) эквивалентно двум равенствам ( $F_1^\circ(R) = 0$ ,  $F_2^\circ(R) + R = 0$ ), из которых

$$a = -\frac{5}{6} R^3 \left[ 1 - \frac{2R}{A^2} \left( G_2(R) + \frac{2}{5} G_1(R) \right) \right], \quad b = -\frac{R^5}{6} \left[ 1 - \frac{2R}{A^2} G_2(R) \right]$$

Постоянная  $c$  определяется из условия (6.6). Запишем правую часть выражения (6.6) в символическом виде

$$M = 2(\tau + \theta) (e_r \nabla) \Omega + 2\tau e_r \times \text{rot } \Omega \quad (9.9)$$

Учитывая в нем (9.8), получаем

$$M_r = 0, \quad M_\theta = \left[ 2\theta \frac{d\Omega(r)}{dr} - \frac{2\tau}{r} \Omega(r) \right] \Phi_\varphi(\theta, \varphi)$$

$$M_\varphi = - \left[ 2\theta \frac{d\Omega(r)}{dr} - \frac{2\tau}{r} \Omega(r) \right] \Phi_\theta(\theta, \varphi) \quad (9.10)$$

Из (9.8) и (9.10) видно, что граничное условие (6.6) равносильно равенству

$$\left[ \theta \frac{d\Omega(r)}{dr} - (\alpha r + \tau) r^{-1} \Omega(r) \right]_{r=R} = 0$$

Отсюда находим

$$c = -\frac{5R^3}{2} \frac{e^k}{3(k+1)(1-k^2A^{-2}) + k^2[1+\delta_3(k+1)]}, \quad \delta_3 = \frac{1}{3 + \tau\theta^{-1} + \alpha R\theta^{-1}} \quad (9.11)$$

Подставляя найденные значения для  $a$ ,  $b$  и  $c$  в (9.6) и ограничиваясь лишь членами порядка  $1/r^2$ , находим

$$v_i = a_{ik} n_k r - \zeta(r) (a_{ps} n_p n_s) n_i, \quad \zeta(r) = 5/2 R^{*3} r^{-2} \quad (9.12)$$

$$R^{*3} = R^3 \left[ 1 + 3 \frac{k^2 A^{-2} (k+1)}{3(k+1)(1-k^2 A^{-2}) + k^2 [1+\delta_3(k+1)]} \right] \quad (9.13)$$

Вычислим теперь диссипацию энергии

$$W = \int_s (\sigma_{ik} v_i + \mu_{ik} \Omega_i) n_k ds \quad (9.14)$$

Интегрирование ведется по сфере радиуса  $r_0 \gg R$ , поэтому в подынтегральном выражении нужно оставить лишь члены порядка  $r^{-2}$ . Из (9.8) видно, что  $\Omega_i \sim r^{-3}$ , следовательно,  $\mu_{ik} \sim r^{-4}$ , поэтому вклад в  $W$  от второго слагаемого в (9.14) будет равен нулю. Рассмотрим первое слагаемое. Запишем  $\sigma_{ik}$  в виде  $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^+ + \sigma_{ik}^-$ , где

$$\sigma_{ik}^+ = -p\delta_{ik} + 2\mu\epsilon_{ik}^+, \quad \sigma_{ik}^- = -2\gamma(\epsilon_{ik}^- + \Omega_l \epsilon_{lik}) \quad (9.15)$$

Давление  $p$  можно найти, если (9.12) подставить в (6.7)

$$p = -2\mu r^{-1} \zeta(r) a_{ps} n_p n_s \quad (9.16)$$

$$\epsilon_{ik}^+ = a_{ik} + r^{-1} \zeta(r) [5a_{ps} n_p n_s n_i n_k - a_{ks} n_i n_s - a_{is} n_s n_k - \delta_{ik} a_{ps} n_p n_s] \quad (9.17)$$

Подставляя (9.16) и (9.17) в (9.15), найдем

$$\sigma_{ik}^+ = 2\mu \{a_{ik} + r^{-1} \zeta(r) [5a_{ps} n_p n_s n_i n_k - a_{ks} n_i n_s - a_{is} n_s n_k]\} \quad (9.18)$$

Если (9.12) и (9.8) подставить в (9.15), то получим  $\sigma_{ik}^- = 0$ , поэтому в (9.14) дает вклад лишь симметрическая часть тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ . Подставляя (9.18) и (9.12) в (9.14) и ограничиваясь лишь членами порядка  $r^{-2}$ , получим

$$W = 2\mu \int_s \{3\zeta(r) (a_{ps} n_p n_s)^2 + (r - \zeta(r)) a_{ps} a_{pk} n_s n_k\} ds \quad (9.19)$$

Учитывая, что

$$\int_s a_{ik} a_{is} n_k n_s ds = (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2) 4/3 \pi r_0^2$$

$$\int_s (a_{ik} n_i n_k)^2 ds = (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2) 8/15 \pi r_0^2$$

найдем

$$W = 2\mu (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2) (V + 1/2 \Phi^*) \quad (V = 4/3 \pi r_0^3, \Phi^* = 4/3 \pi R^{*3}) \quad (9.20)$$

Выражение (9.20) не отличается от аналогичного соотношения работы [14], если только в нем истинный радиус шарика  $R$  заменить на  $R^*$ . Опуская дальнейшие выкладки, напишем окончательный результат в виде

$$\mu^* = \mu (1 + 5/2 \Phi^*), \quad \Phi^* = 4/3 \pi R^{*3} c_n \quad (9.21)$$

где  $\mu^*$  — вязкость суспензий,  $c_n$  — объемная концентрация шариков.

Из формул (9.13) и (9.21) видно, что  $\mu^*$  в асимметрической теории более сложным образом зависит от радиуса суспендированных частиц, чем по формуле Эйнштейна. Если, согласно Эйнштейну,  $\mu^*$  зависит лишь от суммарного объема, занимаемого всеми шариками, независимо от их радиуса, то в рассматриваемом случае она зависит от радиуса шарика  $R$ .

Как и раньше, приведем частные случаи формулы (9.13). Если  $|\gamma|/\mu \gg 1$ , то

$$\frac{R^*}{R} = \left[ 1 + 3 \frac{(A+1)}{A^2} \right]^{1/3} \quad (\alpha = \infty), \quad \frac{R^*}{R} = \left[ 1 + \frac{9(A+1)}{A^2(A+4)} \right]^{1/3} \quad (\alpha = 0) \quad (9.22)$$

Графики зависимостей (9.22) аналогичны кривым фиг. 2.

Течение «неклассической» жидкости сопровождается дополнительным рассеиванием энергии. Действительно, как видно из рассмотренных задач, твердое тело движется в жидкости с большим сопротивлением, чем в классическом случае, количество вытекшей из капилляра жидкости оказывается меньше, чем по формуле Пуазейля, вязкость суспензий  $\mu^*$  больше, чем по формуле Эйнштейна. Дополнительное рассеивание энергии приводит также к тому, что поле скоростей оказывается по абсолютной величине меньше, чем в обычной гидродинамике при тех же условиях течения. Отметим, что, согласно (5.7), изменение претерпевает лишь вихревая часть вектора скорости.

Часть дополнительных членов в выражении для диссипативной функции (2.7) связана со вторыми производными от поля  $v^\circ$  по пространственным координатам, в то время как классические члены обусловлены лишь первыми производными. Такие добавочные характеристики, как тензор микромоментов  $\mu_{ik}$  и антисимметрическая часть тензора напряжений, также определяются вторыми производными от поля  $v^\circ$ . Следовательно, эффекты, связанные с учетом микромоментов, существенны в неоднородных полях скоростей.

Нетрудно видеть, что при  $(\eta, \tau, \theta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty)$  выводы асимметрической гидромеханики переходят в выводы обычной. Как следует из формул (5.2) и (5.5), при этом стремятся к нулю и величины  $k_1/l$  и  $k_2/l$  ( $l$  — характерный размер системы). Поэтому решение уравнений (5.5) и (5.1) имеет характер пограничного слоя [15]. Это значит, что добавочное поле скоростей быстро затухает в приграничной области шириной порядка  $k_1$  и  $k_2$ , поэтому неклассические эффекты будут тем больше, чем меньше линейный размер системы  $l$  (радиус капилляра, радиус шарика и т. д.). Действительно, из рассмотренных задач (фиг. 1 и 2) видно, что отклонения от классических результатов тем больше, чем меньше безразмерные числа  $K$  и  $A$ , а так же, что неклассические результаты можно получить, если в формулах обычной гидродинамики (для количества вытекшей жидкости, силы сопротивления, вязкости) заменить истинный размер системы  $l$  на эффективный  $l^* = l + \Delta$ , где  $\Delta$  определяется свойствами жидкости.

Поступила 4 VII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G o u r i n R. A. The elastic dielectrics. J. Rational Mech., and Analysis, 1956 vol. 5, No. 6, p. 850.
2. L e C o r r e. II Theorie tensorielle de l'elasticite et de la piézoélectricité. Bull. Soc. franc. minéral. et cristallogr., 1954, t. 77, p. 1398.
3. T i f f e n R., S t e v e n s o n A. Elastic isotropy with body force and Couple, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1956, vol. 9, p. 306.
4. R a j a g o p a l E. S. The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity. Ann. Phys., 1960, Bd. 6, No. 3—4, p. 192.
5. К у в ш и н с к и й Е. В., А э р о Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Физика твердого тела, 1963, т. 5, № 9.
6. А э р о Э. Л., К у в ш и н с к и й Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. Ж. Физика твердого тела. 1960, т. 2, № 7.
7. G r i o l i G. Elasticita asimmetrica. Ann. mat. pura ed appl., 1960, vol. 50, p. 389.
8. M i n d l i n R. D., T i e r s t e n H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, No. 5, p. 415.
9. D a h l e r I. S. Transport Phenomena in a Fluid Composed of Diatomic Molecules. J. Chem. Phys., 1959, vol. 30, p. 1447.
10. D a h l e r I. S., S c r i v e n L. E. Angular momentum of continua. Nature, 1961, vol. 192, No. 4797.
11. G r a d H. Statistical Mechanics, Thermodynamics, and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals. Commun. Pure, App. Math., 1952, vol. 5, p. 455.
12. А э р о Э. Л., К у в ш и н с к и й Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Ж. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 9.
13. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.
14. Э й н ш т е й н А. Новый способ определения размера молекул; Э й н ш т е й н А. и С м о л у х о в с к и й М. Брауновское движение. Л., ОНТИ—НКГТ, 1936.
15. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи математ. наук, 1957, № 5 (77), стр. 3.