

ПОПЫТКА ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ, ОСНОВАННОЙ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООБРАЖЕНИЯХ ГРИФФИТСА

В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка

(Днепропетровск)

В работе Гриффитса [1] была предложена теория, объясняющая разрушение хрупких материалов при одноосном растяжении наличием микроскопических трещин. Основные предположения теории Гриффитса заключаются в том, что на поверхности твердого тела действуют силы натяжения, аналогичные силам, действующим на поверхности жидкости, и что при образовании трещины длиной $2l$ уменьшение потенциальной энергии тела W^* компенсируется поверхностной энергией трещины. Для того чтобы данная трещина разрасталась, необходимо, чтобы при увеличении размера трещины изменение свободной энергии тела $W^* - U$ не возрастало, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial l} (W^* - U) = 0 \quad (0.1)$$

Из соотношения (0.1) находятся параметры критического равновесного состояния. Поверхностная энергия трещины

$$U = 4lT_0 \quad (0.2)$$

где $2T_0$ — энергия, затрачиваемая при образовании единицы длины трещины.

Величину T_0 — поверхностное натяжение — при достаточно общих предположениях можно считать константой для данного материала.

Гриффитс получил соотношение, определяющее критическое значение разрушающего напряжения для одноосного растяжения бесконечной пластины с прямолинейной трещиной длиной $2l$ силами, перпендикулярными линии трещины, в виде

$$p_0 = (2ET_0 / \pi l)^{1/2}, \quad p_0 = (2ET_0 / \pi l (1 - \nu^2))^{1/2} \quad (0.3)$$

соответственно для условий плоского напряженного состояния и плоской деформации. Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В настоящей работе сделана попытка использовать идеи Гриффитса для построения теории разрушения хрупких тел для случаев, когда оправдывается предположение о наличии плоской деформации или плоского напряженного состояния.

Теория прочности здесь понимается в смысле, обычно употребляемом в науке о сопротивлении материалов, а именно: найти функцию $F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ такую, чтобы при выполнении условия $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C$ наступало разрушение материала.

В данной работе при построении теории приняты следующие гипотезы.

- (1) Трещины распространяются, оставаясь прямолинейными.
- (2) Трещины расположены перпендикулярно поверхности пластины.
- (3) Величины T_0 и l являются константами материала.

При вычислении потенциальной энергии деформации приходится преодолевать иногда значительные вычислительные трудности. В § 1 выведена формула, позволяющая определить потенциальную энергию бесконечной пластинки с вырезами любой формы в случае однородного напряженного состояния на бесконечности, если известны коэффициенты разложения функций Н. И. Мусхелишвили вблизи бесконечно удаленной точки.

В § 2 и 3 рассмотрены два случая распространения трещины — вследствие растяжения (§ 2) и вследствие сдвига (§ 3)

§ 1. Вывод формулы для потенциальной энергии. Потенциальная энергия пластины может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{1}{2} \iint_D \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (1.1)$$

Здесь, как и в дальнейшем, приняты обозначения [2]; толщина пластины принята равной единице; интегрирование в (1.1) ведется по площади пластины. Интегрируя по частям и учитывая, что

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

получим

$$W = \frac{1}{2} \oint [(\sigma_x u + \tau_{xy} v) \cos \theta + (\sigma_y v + \tau_{xy} u) \sin \theta] ds \quad (1.2)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint (u + iv) [(\sigma_x - i\tau_{xy}) \cos \theta + (\tau_{xy} - i\sigma_y) \sin \theta] ds \quad (1.3)$$

где Re обозначает действительную часть комплексного выражения.

При этом предполагается, что работа сил совершается только на внешнем контуре.

Как известно [2], напряженно-деформированное состояние упругой изотропной среды в плоской задаче определяется двумя аналитическими функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, с которыми компоненты напряжений и смещений связаны зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] & (z = x + iy) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [\bar{z}\varphi''(\bar{z}) + \psi'(z)] & \left(\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме. Из формул (1.4) находим

$$\begin{aligned} \sigma_x - i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \bar{z}\varphi''(\bar{z}) - \psi'(z) \\ \tau_{xy} - i\sigma_y &= -i [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \bar{z}\varphi''(\bar{z}) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая соотношения (1.5) и последнюю формулу из (1.4), формулу (1.3) запишем в виде

$$W = \frac{1}{4\mu} \operatorname{Re} \oint [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \{ [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] (\cos \theta - i \sin \theta) - [\bar{z}\varphi''(\bar{z}) + \psi'(z)] (\cos \theta + i \sin \theta) \} ds \quad (1.6)$$

Если интегрирование производится по контуру круга радиуса R , то

$$\begin{aligned} \bar{z} &= R^2 z^{-1}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta) ds = -idz \\ (\cos \theta - i \sin \theta) ds &= -iR^2 z^{-2} dz \end{aligned} \quad (1.7)$$

Используя (1.7), формулы (1.6) получим

$$W = \frac{1}{4\mu} \operatorname{Re} \oint [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \left\{ \frac{R^2}{z} \varphi''(z) + \psi'(z) - \frac{R^2}{z^2} [\varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)}] \right\} idz \quad (1.8)$$

Потенциальная энергия бесконечной пластинки может определяться из потенциальной энергии круглой пластинки радиуса R путем предельного перехода при $R \rightarrow \infty$.

Решение задачи определения напряженного состояния круглой пластинки радиуса R с трещиной $2l$ (и вообще с произвольным отверстием) можно получить путем последовательного наложения решения бесконечной пластинки с трещиной и сплошного круга (алгоритм Шварца).

Компоненты напряжений и смещений круглой пластины без трещин определяются функциями

$$\varphi_1(z) = \Gamma z, \quad \psi_1(z) = \Gamma' z, \quad (\Gamma = 1/4(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \Gamma' = -1/2(\sigma_1 + \sigma_2) e^{-2i\alpha}) \quad (1.9)$$

Здесь σ_1, σ_2 — значения главных напряжений на бесконечности, α — угол, который главная ось, соответствующая σ_1 , составляет с осью x .

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ вызывают на контуре трещины некоторые напряжения, которые нужно снять введением функций

$$\varphi_2(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots, \quad \psi_2(z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots \quad (1.10)$$

Пусть l — характерный размер отверстия. Используя конформное отображение $z_1 = z/l$, сводим задачу к рассмотрению бесконечной пластинки с отверстием единичного размера. В этом случае коэффициенты разложения функций $\varphi(z_1)/l$, $\psi(z_1)/l$ по степеням z являются безразмерными величинами.

Следовательно, коэффициенты a_k, b_k содержат множители l^{k+1} . Этот результат можно также получить из соображений размерности.

Для того чтобы снять смещения на контуре круга радиуса R , вызванные функциями $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$, вводим функции

$$\begin{aligned} \varphi_3(z) &= A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \\ \psi_3(z) &= B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Требую, чтобы функции $\varphi_2(z) + \varphi_3(z)$, $\psi_2(z) + \psi_3(z)$ не вызывали смещений на контуре круга, и, сохраняя только члены, содержащие l^2 (не старше), находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{b_1}{(\kappa - 1)R^2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{\bar{a}_1}{\kappa R^4}, \quad A_4 = A_5 = \dots = 0 \\ B_1 &= \frac{\kappa^2 + 3}{\kappa R^2} a_1, \quad B_2 = B_3 = \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, искомые функции будут

$$\varphi(z) = (\Gamma + A_1)z + A_3 z^3 + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad \psi(z) = (\Gamma' + B_1)z + \frac{b_1}{z} + \dots \quad (1.13)$$

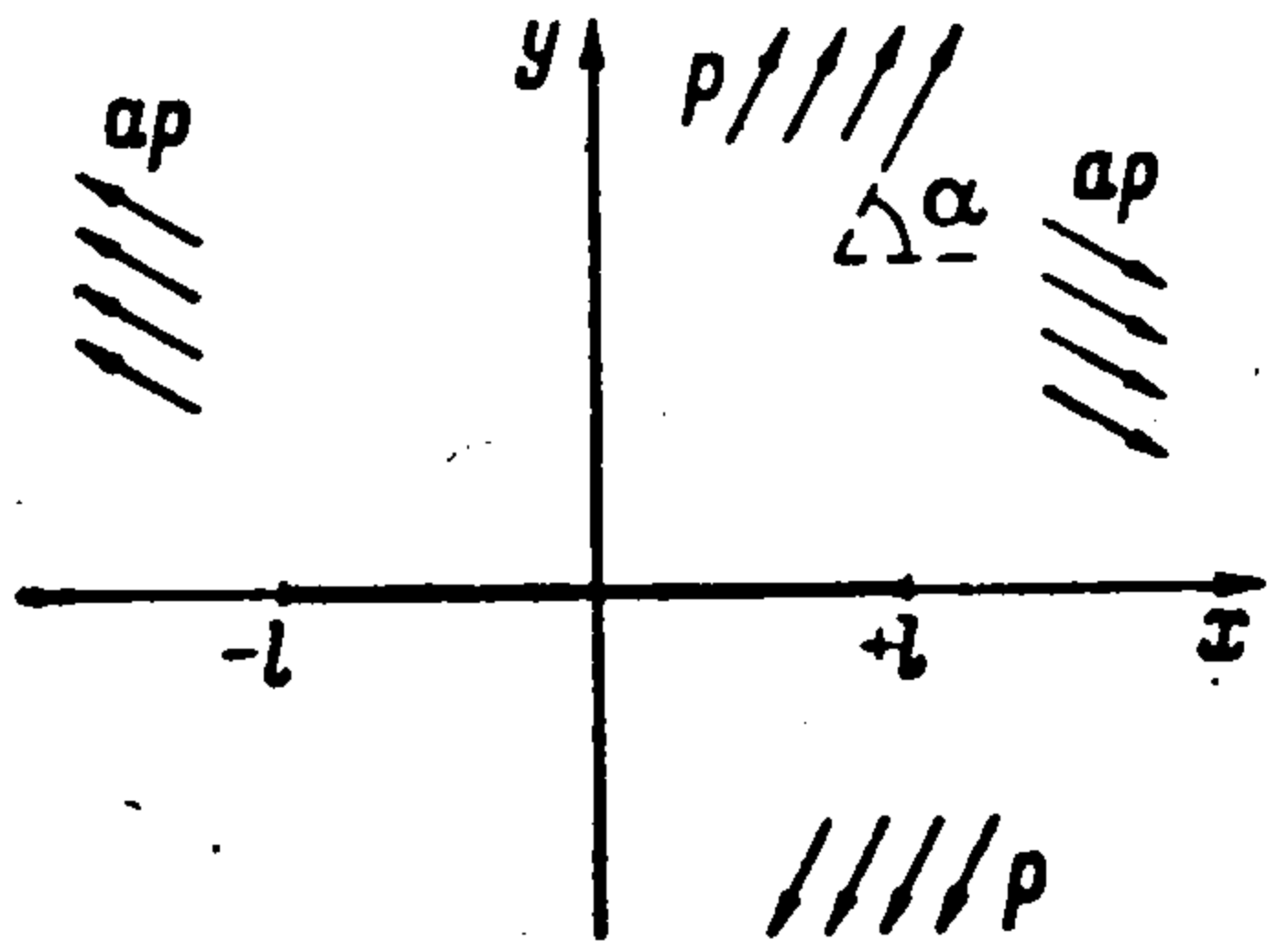
Подставляя (1.13) в формулу (1.8) и пользуясь теоремой о вычетах при интегрировании, получим формулу для потенциальной энергии пластины, ослабленной трещиной

$$\begin{aligned} W &= 1/2 \pi \mu^{-1} \operatorname{Re} [2(\kappa - 1) \Gamma^2 R^2 + \\ &+ \Gamma' \bar{\Gamma} R^2 + (\kappa + 1) \bar{\Gamma} \bar{a}_1 + (\kappa - 1) \Gamma b_1 + 2\Gamma \bar{b}_1] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уменьшение потенциальной энергии пластины W^* , вызванное образованием трещины, будет

$$W^* = 1/2 \pi \mu^{-1} \operatorname{Re} [(\kappa + 1) \bar{\Gamma} \bar{a}_1 + (\kappa - 1) \Gamma b_1 + 2\Gamma \bar{b}_1] \quad (1.15)$$

§ 2. Двухосное растяжение пластинки. Рассмотрим растяжение упругой изотропной пластинки, ослабленной трещиной длиной $2l$. Контур трещины свободен от внешних напряжений, а напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение равномерно распределенными напряжениями $p = \text{const}$ в направлении, составляющем произвольный угол α с линией трещины, и в перпендикулярном направлении $p_1 = ap$. Начало координат поместим в центре трещины, ось x направим вдоль трещины (фиг. 1). В этом случае функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, через которые выражаются компоненты напряжений и смещений, имеют вид [2]



Фиг. 1

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{2\Gamma + \bar{\Gamma}'}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}' \\ \Omega(z) &= \frac{2\Gamma + \bar{\Gamma}'}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}'\end{aligned}\quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z) \\ \Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь Γ, Γ' — постоянные, характеризующие напряженное состояние на бесконечности и в рассматриваемом случае имеющие значения

$$\Gamma = \frac{1}{4}p(1+a), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}p(1-a)e^{-2i\alpha}\quad (2.3)$$

Переходя от функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ к функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и учитывая (2.3), получим

$$\varphi(z) = \Gamma z + z^{-1}a_1 + \dots \quad \psi(z) = \Gamma'(z) + z^{-1}b_1 + \dots\quad (2.4)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{8}pl^2 [1+a - (1-a)e^{2i\alpha}] \\ b_1 &= -\frac{1}{8}pl^2 [2(1+a) - (1-a)(e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha})]\end{aligned}\quad (2.5)$$

Подставляя значения a_1 и b_1 в формулу (1.15) и используя (2.3), находим уменьшение потенциальной энергии за счет образования трещины

$$W^* = \frac{\pi(\kappa+1)}{16\mu} p^2 l^2 [1+a^2 - (1-a^2)\cos 2\alpha]\quad (2.6)$$

Из условия (0.1) определяем критическую длину трещины

$$l = \frac{32\mu T_0}{\pi(\kappa+1)p^2 [1+a^2 - (1-a^2)\cos 2\alpha]} \quad \left(l_1 = \frac{16\mu T_0}{\pi(\kappa+1)p^2}, \quad l_2 = \frac{16\mu T_0}{\pi(\kappa+1)p^2 a^2} \right)\quad (2.7)$$

Здесь в скобках указаны соответственно минимальная длина трещины для $a < 1$ при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ и для $a > 1$ при $\alpha = 0$.

Вводя обозначения $\sigma_1 = p, \sigma_2 = ap$ и учитывая, что $\mu = E/2(1-\nu)$, а при плоском напряженном состоянии $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, из выражений (2.7) для l_1 и l_2 получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2ET_0/\pi l}\quad (2.8)$$

При плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$ и формула (2.10) имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2ET_0/\pi l(1-\nu^2)}\quad (2.9)$$

§ 3. Двухосное сжатие пластинки. Рассмотрим сжатие упругой изотропной пластинки, ослабленной прямолинейной трещиной длиной $2l$. Ширина трещины настолько мала, что ею можно пренебречь («математическая щель»). Контур трещины свободен от напряжений, а напряженное состояние на бесконечности представляет собой двухосное сжатие равномерно распределенными напряжениями $p = \text{const}$, направленными под произвольным углом α к линии трещины, и $p_1 = ap$, перпендикулярными к p . Начало координат поместим в центре трещины, ось x направим по линии трещины (фиг. 2). При сделанных допущениях можно предполагать, что с возрастанием нагрузки кромки трещины сомкнутся по всей ее длине. Силами трения вдоль кромки трещины будем пренебрегать.

Граничные условия на контуре трещины

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad v^+ - v^- = 0 \quad (-l < t < l) \quad (3.1)$$

Компоненты напряжений и смещений выражаются через аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ соотношениями

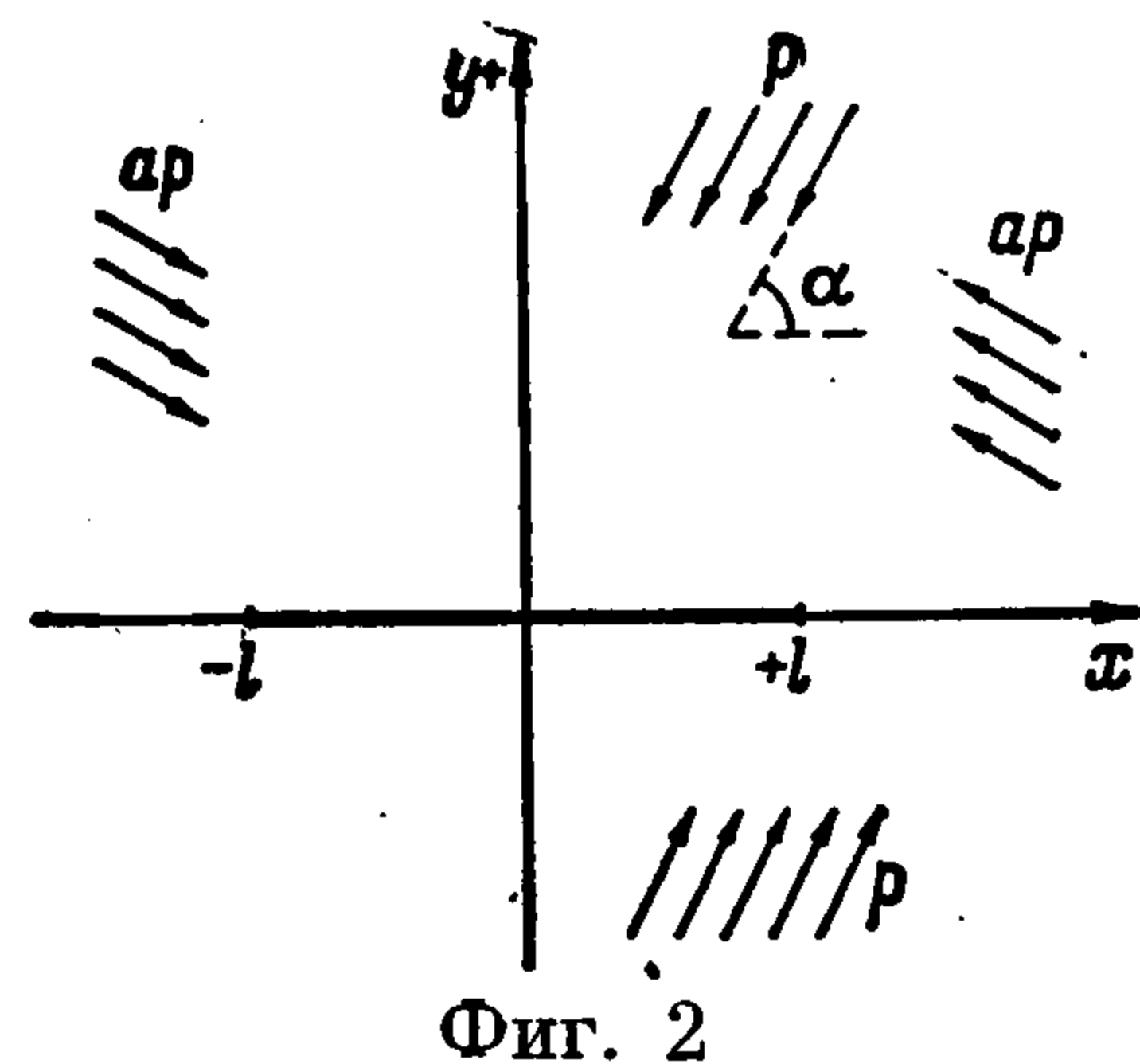
$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (3.2)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (3.3)$$

При достаточно больших $|z|$ функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют вид

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}),$$

$$\Omega(z) = \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}' + \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Здесь X, Y — компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру трещины,

$$\Gamma = -1/4 p (1 + a), \quad \Gamma' = 1/2 p (1 - a) e^{-2i\alpha} \quad (3.5)$$

Из формул (3.2), (3.3) и их сопряженных после перехода к граничным значениям величин на контуре трещины, использования условий (3.1) и некоторых преобразований получим четыре задачи линейного сопряжения

$$\begin{aligned} [\Phi(t) - \bar{\Phi}(t) - \Omega(t) + \bar{\Omega}(t)]^+ &= [\Phi(t) - \bar{\Phi}(t) - \Omega(t) + \bar{\Omega}(t)]^- \\ [\kappa\Phi(t) + \kappa\bar{\Phi}(t) + \Omega(t) + \bar{\Omega}(t)]^+ &= [\kappa\Phi(t) + \kappa\bar{\Phi}(t) + \Omega(t) + \bar{\Omega}(t)]^- \\ [\Phi(t) + \bar{\Phi}(t) - \Omega(t) - \bar{\Omega}(t)]^+ &= [\Phi(t) + \bar{\Phi}(t) - \Omega(t) - \bar{\Omega}(t)]^- \\ [\Phi(t) - \bar{\Phi}(t) + \Omega(t) - \bar{\Omega}(t)]^+ &= -[\Phi(t) - \bar{\Phi}(t) + \Omega(t) - \bar{\Omega}(t)]^- \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решая (3.6) с учетом (3.4), получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p}{4} \left[-(1 + a) + i(1 - a) \frac{z \sin 2\alpha}{\sqrt{z^2 - l^2}} - i(1 - a) \sin 2\alpha \right] \\ \Omega(z) &= \frac{p}{4} \left[-(1 + a) + 2(1 - a) \cos 2\alpha + \frac{i(1 - a) z \sin 2\alpha}{\sqrt{z^2 - l^2}} + i(1 - a) \sin 2\alpha \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пользуясь (2.2), из (3.7) находим

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1/4 p [- (1 + a) z - 1/2 il^2 (1 - a) \sin 2\alpha z^{-1} - \dots] \\ \psi(z) &= 1/4 p [2(1 - a) (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) - 1/4 il^2 (1 - a) \sin 2\alpha z^{-3} - \dots] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$a_1 = -1/8 p l^2 i (1 - a) \sin 2\alpha, \quad b_1 = 0 \quad (3.9)$$

Учитывая (3.9) и (3.5), по формуле (1.15) находим

$$W^* = \frac{\pi p^2 l^2 (\kappa + 1)}{32\mu} (1 - a)^2 \sin^2 2\alpha \quad (3.10)$$

Из соотношения (0.1) получаем критическую длину трещины

$$l_* = \frac{64\mu T_0}{\pi(1+\kappa)p^2(1-a)^2 \sin^2 2\alpha} \quad (3.11)$$

Минимальная длина трещины будет при $\alpha = 1/4\pi$

$$\min l = \frac{64\mu T_0}{\pi(1+\kappa)p^2(1-a)^2} \quad (3.12)$$

Обозначив $\sigma_1 = p$, $\sigma_2 = ap$ и заменяя $\mu = 1/2E/(1-\nu)$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, из (3.12) находим зависимость между главными напряжениями σ_1 и σ_2 в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2 \sqrt{2ET_0/\pi l} \quad (3.13)$$

Для случая плоской деформации эта зависимость будет

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2 \sqrt{2ET_0/\pi l(1-\nu^2)} \quad (3.14)$$

На основании формул (2.8) и (3.13) можно графически указать зависимость между главными напряжениями σ_1 и σ_2 при хрупком разрушении (фиг. 3).

В частности, при хрупком разрушении сжимающие напряжения в два раза больше растягивающих. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными авторами при испытании на разрушение образцов из хрупких пластических масс.

Из самой постановки проблемы Гриффитса ясно, что результаты, полученные как самим Гриффитсом [1], так и в настоящей статье, справедливы только для случая однородного напряженного состояния.

Совершенно очевидно, что исследование различных случаев неоднородных напряженных состояний необходимо проводить отдельно для каждого случая, и вполне возможно, что момент разрушения будет определяться не только величинами напряжений, но и градиентами напряжений.

В статье [3] Гриффитсом предпринята попытка построить теорию прочности для плоского напряженного состояния. Гриффитс исходил из решения задачи теории упругости для плоскости с эллиптическим вырезом. На границе эллипса напряженное состояние одноосное, поэтому им находились максимальные растягивающие напряжения и сравнивались с разрушающими напряжениями, полученными ранее [1] для однородного одноосного напряженного состояния.

В выражение для максимального напряжения вошли значения главных напряжений на бесконечности и угол наклона эллипса. Минимизируя это выражение по углу (примерно, как в данной работе), Гриффитс в конечном счете получил критерий прочности, применение которого для случая простого сжатия дает разрушающие усилия примерно в восемь раз больше разрушающих усилий для растяжения.

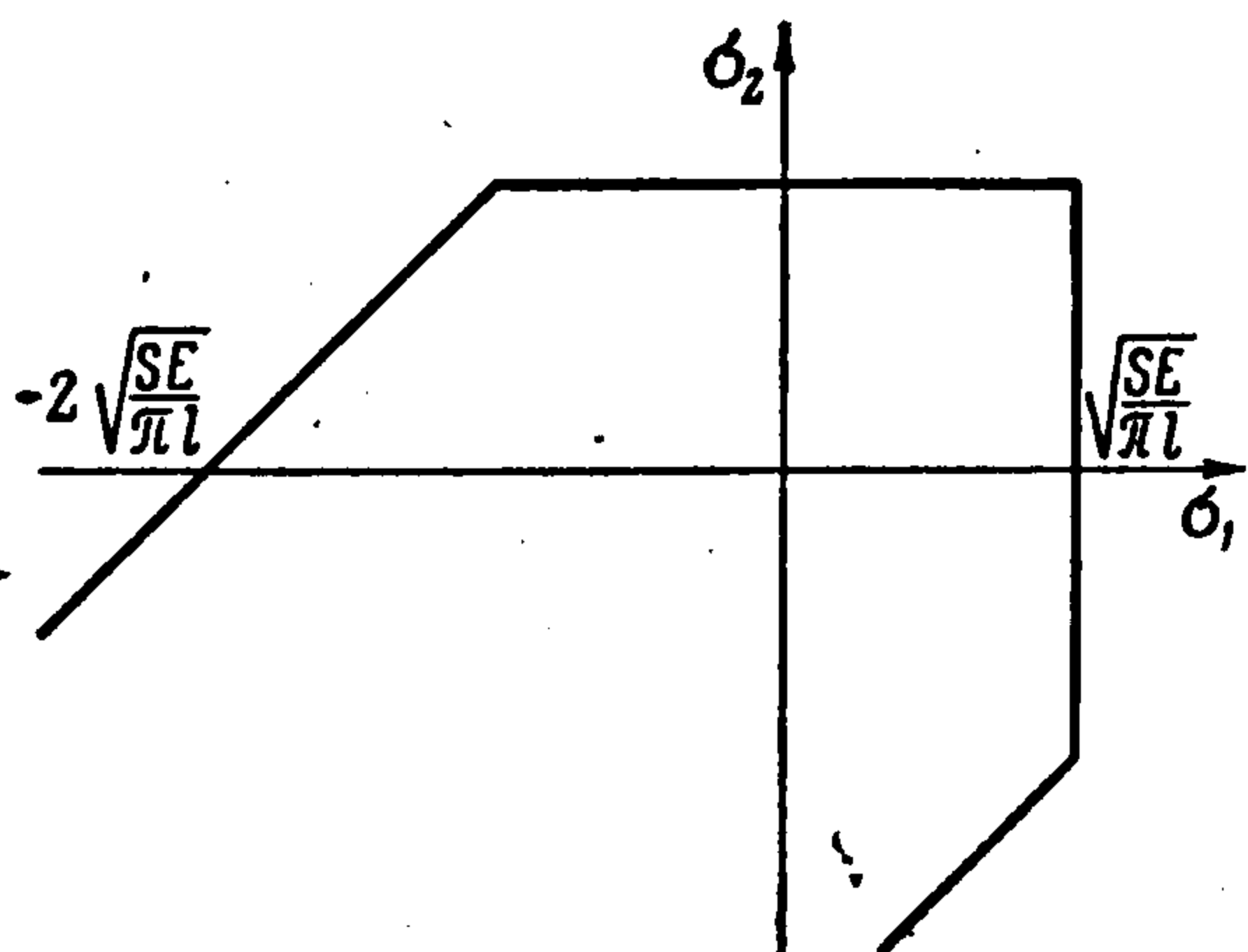
Принятая в настоящей работе гипотеза распространения трещины только в ее плоскости безусловно должна давать завышенные значения разрушающих напряжений для несимметричных случаев.

Поэтому результаты, полученные в статье [3], представляются некорректными.

Поступила 10 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. A., vol. 221, 1920, p. 163—198.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Griffith A. A. The theory of rupture. Proc. 1-st International Congr. Appl. Mech., Delft, 1924.



Фиг. 3