Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ДАВЛЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПЛАСТИНЫ И МЕМБРАНЫ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Рассматривается задача о давлении жесткого параболоида вращения на пластины или мембраны, контур которых сотоит из отрезков прямых; при этом пластина предполагается свободно опертой. Указанная задача решается в квадратурах. Метод ее решения состоит в сведении к одному типу краевых задач Римана для двух функций, решение которого удалось найти в замкнутом виде. Задача о давлении жесткого параболоида на бесконечную пластину была решена впервые Л. А. Галиным [1].

§ 1. Общие соотношения и постановка задачи. 1°. Смещение в жесткой упругой пластине, находящейся под действием одной только поперечной нагрузки, удовлетворяет уравнению Кирхгоффа [2]

$$D\Delta\Delta w = q \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь w — смещение точек пластины по нормали к ее поверхности, D — цилиндрическая жесткость пластины, q — поперечная нагрузка.

Для изгибающих моментов M_t и M_n имеют место формулы [2]

$$M_t = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right), \qquad M_n = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \tag{1.2}$$

Здесь tn — произвольная система декартовых координат, ν — коэффициент Пуассона.

В той части пластины, где поперечная нагрузка q обращается в нуль, имеют место основные представления [3]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4\operatorname{Re}\Phi(z) \qquad (z = x + iy)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right]\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции; x, y — декартовы координаты.

Приведем еще формулы для случая $q = 0$, которые окажутся полезными в дальнейшем [3]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t} = e^{2i\alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

где α — угол между осями x и t.

На пластину давит абсолютно жесткий параболоид вращения, уравнение поверхности которого запишем в виде

$$z = Ax^2 + Ay^2 \tag{1.5}$$

На штамп действует сила P, направленная по оси симметрии. При этом на площадке контакта прогибы пластины будут равными

$$w = \delta - Ax^2 - Ay^2 \tag{1.6}$$

где δ — перемещение штампа. Толщину пластины считаем малой по сравнению с размерами площадки. На контуре площадки контакта L, которая подлежит определению, должны выполняться условия непрерывности всех вторых производных [1] функции w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2A, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2A, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.7}$$

Эти условия являются следствием непрерывности смещения w, а также его первой и второй производных по нормали $\partial w / \partial n$ и $\partial^2 w / \partial n^2$. На основании (1.1) и (1.6) давления на площадке контакта равны нулю, так что сила P уравновешивается перерезывающими силами, действующими на границе контактной площадки [1].

2°. В том случае, когда изгибной жесткостью пластины можно пренебречь, а напряжения в срединной поверхности, возникшие в результате изгиба, малы по сравнению с предварительным натяжением σ_x и σ_y, прогиб пластины w удовлетворяет уравнению

$$\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{h} \tag{1.8}$$

Здесь σ_x и σ_y — постоянные главные напряжения, h — толщина мембраны. Отметим, что уравнение (1.8) справедливо также для неупругих мембран.

Для случая обращающейся в нуль поперечной нагрузки $q = 0$ приведем основные представления

$$\begin{gathered} w = \operatorname{Re} f(z), \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z) + i\varkappa \operatorname{Im} f'(z) \\ z = x + i\varkappa y, \qquad \varkappa^2 = \sigma_x / \sigma_y \end{gathered} \tag{1.9}$$

На мембрану давит абсолютно жесткий параболоид вращения, уравнение поверхности которого можно записать в виде (1.5). На основании (1.8) и (1.6) давление, действующее на площадке контакта, постоянно и равно

$$q = 2Ah(\sigma_x + \sigma_y) \tag{1.10}$$

На контуре площадки контакта L, подлежащей определению, должны выполняться условия непрерывности всех первых производных функции w

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2Ax, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -2Ay \tag{1.11}$$

---

[1] Если учесть эффект действия перерезывающих сил, то распределение давления под штампом окажется отличным от нулевого, как это показано в работе [4].

§ 2. Вспомогательная краевая задача. Пусть требуется определить две кусочно аналитические функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ комплексного переменного z с линией скачков $L+M$, граничные значения которых на контуре $L+M$ удовлетворяют условиям (2.1)

$$\varphi_1^+(t)=\alpha_1(t)\varphi_2^-(t)+f_1(t),\qquad \varphi_2^+(t)=\beta_1(t)\varphi_1^-(t)+f_2(t)\qquad (t\in L)$$

$$\varphi_1^+(t)=g_1(t)\varphi_1^-(t)+f_3(t),\qquad \varphi_2^+(t)=g_2(t)\varphi_2^-(t)+f_4(t)\qquad (t\in M)$$

Здесь $\alpha_1(t), \beta_1(t), g_1(t), g_2(t), f_1(t), \ldots, f_4(t)$ — кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условию Гольдера на интервалах непрерывности, $L+M$ — простой гладкий контур.

Таким образом, на части контура M задается линейное краевое условие задачи Римана для каждой функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ порознь [5,6], а на остальной части контура L ставится линейная краевая задача Римана для двух функций типа, рассмотренного в работе автора [7].

Введем новые кусочно аналитические функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ посредством формул

$$\psi_1(z)=\frac{\varphi_1(z)}{X_1(z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_M\frac{f_3(t)\,dt}{X_1^+(t)(t-z)}$$

$$\psi_2(z)=\frac{\varphi_2(z)}{X_2(z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_M\frac{f_4(t)\,dt}{X_2^+(t)(t-z)}\tag{2.2}$$

Здесь $X_i(z)$ является каноническим решением краевой задачи Римана [5,6]

$$\varphi_i^+(t)=g_i(t)\varphi_i^-(t)\qquad (t\in M)\ (i=1,2)\tag{2.3}$$

(где предполагается, что $\varphi_i(z)$ аналитичны всюду во внешности контура M).

Определенные таким образом функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, как нетрудно проверить, терпят разрыв лишь на линии L, а на контуре M они непрерывны

$$\psi_1^+=\psi_1^-,\qquad \psi_2^+=\psi_2^-\qquad (t\in M)$$

Подставляя функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, согласно (2.2), в первые два краевых условия (2.1), для функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ получаем краевую задачу

$$\psi_1^+(t)=\alpha(t)\psi_2^-(t)+f_{10}(t),\qquad \psi_2^+(t)=\beta(t)\psi_1^-(t)+f_{20}(t)\qquad (t\in L)\tag{2.4}$$

Здесь

$$\alpha(t)=\frac{X_2(t)}{X_1(t)}\alpha_1(t),\qquad \beta(t)=\frac{X_1(t)}{X_2(t)}\beta_1(t)$$

$$f_{10}(t)=\frac{1}{X_1(t)}\left\{f_1(t)+\alpha_1(t)\frac{X_2(t)}{2\pi i}\int_M\frac{f_4(\tau)\,d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)}-\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int_M\frac{f_3(\tau)\,d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}\right\}$$

$$f_{20}(t)=\frac{1}{X_2(t)}\left\{f_2(t)+\beta_1(t)\frac{X_1(t)}{2\pi i}\int_M\frac{f_3(\tau)\,d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}-\frac{X_2(t)}{2\pi i}\int_M\frac{f_4(\tau)\,d\tau}{X_2^+(\tau)(\tau-t)}\right\}$$

Краевая задача (2.4) решена в замкнутом виде в работе автора [7].

Так как в выражениях (1.9) работы [7] допущена неточность, то здесь приводятся исправленные формулы

$$\psi_j(z) = X_j(z)\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{a_{jk}}{z-z_{jk}} + P_\lambda(z) + \frac{1}{4\pi i}\int_L\left[\frac{f_{10}(t)}{X_1^+(t)} + \frac{f_{20}(t)}{X_2^+(t)}\right]\frac{dt}{t-z} + \right.$$

$$+ (-1)^{j-1}\frac{R_2(z)}{R_1(z)}\left[P_\mu(z) + \frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{R_1^+(t)}{R_2^+(t)}\left\langle\frac{f_{10}(t)}{X_1^+(t)} - \frac{f_{20}(t)}{X_2^+(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 2\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{a_{2k}}{t-d_k} - \frac{a_{1k}}{t-c_k}\right)\right\rangle\frac{dt}{t-z}\right]\right\} \tag{2.5}$$

Здесь $X_1(z)$, $X_2(z)$ — каноническое решение [7] краевой задачи (2.4); $z_{1k} = c_k$, $z_{2k} = d_k$ — некоторые комплексные постоянные [7]; постоянные a_{jk} равны $a_{jk} = \lim\,(z - z_{jk})\,\psi_j(z)\,X_j^{-1}(z)$ при $z \to z_{jk}$; $P_n(z)$ — полином степени n. Числа λ и μ определяются следующим образом:

1) $\nu - \varkappa - l + n > 0$, $\mu = 0$, $n - l - 1 > 0$, $\lambda = n - l - 1$

2) $\nu - \varkappa - l + n > 0$, $\mu = 0$, $n - l - 1 < 0$, $\nu - \varkappa > 0$, $\lambda = 0$

3) $\nu - \varkappa - l + n > 0$, $\mu = 0$, $n - l - 1 < 0$, $\nu - \varkappa < 0$, $\lambda = \varkappa - \nu$

4) $\nu - \varkappa - l + n < 0$, $\mu = -\nu + \varkappa + l - n$, $\varkappa - \nu > 0$, $\lambda = \varkappa - \nu$

5) $\nu - \varkappa - l + n < 0$, $\mu = -\nu + \varkappa + l - n$, $\nu - \varkappa > 0$, $\lambda = 0$

$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$; вообще говоря, $\nu = [{}^1/_2 n]$. Через $R_1(z)$ и $R_2(z)$ обозначены следующие функции:

$$R_1(z) = \prod_{i=1}^{l}(z - g_i)^{1/2}, \qquad R_2(z) = \prod_{i=l+1}^{2n}(z - g_i)^{1/2}$$

В концах линий L_k $(L_1 + \ldots + L_n = L)$ $z = g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ функции $X_1(z)$ и $X_2(z)$ имеют порядок $O\,[(z - g_i)^\alpha]$, где $1 > \operatorname{Re}\alpha \geqslant {}^1/_2$.

При решении краевой задачи (2.1) можно идти другим (может быть, более удобным) путем. А именно, можно сначала построить каноническое решение краевой задачи (2.1), определяемое как некоторое решение однородной задачи (2.1), класс которого в концах кривых и точках разрыва коэффициентов α_1, β_1, g_1 и g_2 совпадает с заданным классом функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$; при этом, вообще говоря, возникает необходимость во введении некоторых дополнительных условий, аналогичных условию 1) определения работы [7]. Впрочем, эти условия нетрудно найти после фактического решения однородной краевой задачи (2.1) только что изложенным методом. После отыскания канонического решения краевая задача (2.1), очевидно, решается весьма просто.

§ 3. Давление абсолютно жесткого параболоида вращения на пластины и мембраны полигональной формы. 1°. Пусть упругая односвязная пластина полигональной формы свободно оперта на границе и подвержена давлению абсолютно жесткого параболоида вращения. На свободно опертой границе M будут иметь место условия $w = 0$ и $M_n = 0$ или, на основании (1.2),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь n и t — направления нормали и касательной к контуру пластины.

При помощи формул (1.3), (1.4) и (1.7) граничные условия задачи (3.1) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\Phi(z) = -A, \qquad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = 0 \quad \text{на } L \\ \operatorname{Re}\Phi(z) = 0, \quad \operatorname{Re}\{e^{2i\alpha_j}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\} = 0 \quad \text{на } M \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь α_j — угол, образуемый j-м прямолинейным отрезком границы с осью x (в направлении обхода контура $L + M$, L — неизвестный контур).

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает внешность двух разрезов действительной оси плоскости ζ на двусвязную область плоскости z, занятую пластиной и ограниченную контуром $L + M$. На основании теоремы Гильберта [8,9] и результата Чаплыгина [10] такое конформное отображение всегда возможно. При этом, очевидно, контурам L и M соответствуют различные разрезы. Образы контуров L и M на плоскости ζ будем обозначать также через L и M.

В плоскости ζ для трех аналитических функций $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$ и $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ по формулам (3.2) получаем краевую задачу

$$\operatorname{Re}\varphi(\zeta) = 0 \quad \text{на } M, \qquad \operatorname{Re}\varphi(\zeta) = -A \quad \text{на } L \tag{3.3}$$

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = 0 \quad \text{на } L$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{2i\alpha_j}\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta)\right]\right\} = 0 \quad \text{на } M, \quad \operatorname{Im}[e^{-i\alpha_j}\omega(\zeta)] = d_j \tag{3.4}$$

Последнее условие (3.4) представляет собой записанное в комплексной форме уравнение j-го прямолинейного отрезка границы $y = x \operatorname{tg}\alpha_j + d_j \sec\alpha_j$.

Введем аналитическую функцию $\chi(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \frac{\omega'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\psi(\zeta) \tag{3.5}$$

При помощи функции $\chi(\zeta)$ краевую задачу (3.4) можно записать в виде

$$\overline{\omega(\zeta)} + \chi(\zeta) = 0 \quad \text{на } L \tag{3.6}$$

$$\operatorname{Im}[e^{-i\alpha_j}\omega(\zeta)] = d_j, \qquad \operatorname{Im}[e^{i\alpha_j}\chi(\zeta)] = d_j \quad \text{на } M$$

Краевую задачу (3.6) при помощи функций $\omega_1(\zeta)$ и $\chi_1(\zeta)$

$$\omega_1(\zeta) = \bar{\omega}(\zeta), \; \chi_1(\zeta) = \bar{\chi}(\zeta)$$

аналитических во внешности разрезов $L + M$, запишем в виде краевой задачи Римана для четырех функций $\omega(\zeta)$, $\chi(\zeta)$, $\omega_1(\zeta)$, $\chi_1(\zeta)$

$$\begin{array}{llll} 1)\ \chi^+ + \omega_1^- = 0 & \text{на } L, & 5)\ \omega^+ - e^{2i\alpha_j}\omega_1^- = 2id_j e^{i\alpha_j} & \text{на } M \\ 2)\ \omega^+ + \chi_1^- = 0 & \text{на } L, & 6)\ \omega^- - e^{2i\alpha_j}\omega_1^+ = 2id_j e^{i\alpha_j} & \text{на } M \\ 3)\ \omega_1^+ + \chi^- = 0 & \text{на } L, & 7)\ \chi^+ - e^{-2i\alpha_j}\chi_1^- = 2id_j e^{-i\alpha_j} & \text{на } M \\ 4)\ \omega^- + \chi_1^+ = 0 & \text{на } L, & 8)\ \chi^- - e^{-2i\alpha_j}\chi_1^+ = 2id_j e^{-i\alpha_j} & \text{на } M \end{array} \tag{3.7}$$

Введем новые аналитические функции

$$\varphi_1(\zeta) = \omega(\zeta) + \chi_1(\zeta), \qquad \varphi_2(\zeta) = \chi(\zeta) + \omega_1(\zeta) \tag{3.8}$$

Складывая первое условие краевой задачи (3.7) с третьим, второе — с четвертым, вычитая из пятого условия восьмое, а из шестого — седьмое, для функций $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ получим краевую задачу

$$\begin{array}{ll} \varphi_2^+ + \varphi_2^- = 0, \qquad \varphi_1^+ + \varphi_1^- = 0 & \text{на } L \\ \varphi_1^+ - e^{2i\alpha_j}\varphi_2^- = 0, \qquad \varphi_2^+ - e^{-2i\alpha_j}\varphi_1^- = 0 & \text{на } M \end{array} \tag{3.9}$$

Краевая задача (3.9) будет частным случаем краевой задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе. Ее решение находится в замкнутой форме.

Подставляя функции $\omega_1(\zeta)$ и $\chi_1(\zeta)$, согласно (3.8) и (3.9), в краевую задачу (3.7), для определения двух функций $\omega(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ можно найти следующую краевую задачу типа задачи Римана:

$$\begin{array}{ll} \chi^+ - \chi^- = \varphi_2^+, \qquad \omega^+ - \omega^- = \varphi_1^+ & \text{на } L \\ \omega^+ + e^{2i\alpha_j}\chi^- = 2id_j e^{i\alpha_j} + \varphi_1^+ & \text{на } M \\ \chi^+ + e^{-2i\alpha_j}\omega^- = 2id_j e^{-i\alpha_j} + \varphi_2^+ & \text{на } M \end{array} \tag{3.10}$$

Краевая задача (3.10) принадлежит к тому же типу кревых задач Римана, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Таким образом, решение краевой задачи (3.6), а с ней и исходной упругой задачи может быть найдено в квадратурах. Заметим, что применяемый метод решения без существенных изменений переносится на тот случай, когда рассматриваемая область, занятая пластиной, является трехсвязной.

2°. Пусть теперь абсолютно жесткий параболоид вращения давит на мембрану полигональной формы, занимающей односвязную область. На границе мембраны M будет иметь место условие

$$w = 0 \tag{3.11}$$

Мембрану считаем равномерно натянутой во всех направлениях, т. е. $\sigma_x = \sigma_y$ или $\varkappa = 1$.

При помощи формул (1.9), (1.11) и (3.11) граничные условия задачи можно записать в виде

$$\operatorname{Re} f(z) = 0 \quad \text{на } M, \qquad f'(z) = -2A\bar{z} \quad \text{на } L \tag{3.12}$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного при помощи функции $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает внешность двух разрезов действительной оси плоскости ζ на двусвязную область плоскости z, занятую мембраной и ограниченную контуром $L + M$.

В плоскости ζ для двух аналитических функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta) = f'[\omega(\zeta)]$ по формулам (3.12) получаем краевую задачу

$$\operatorname{Re}[e^{i\alpha_j}F(\zeta)] = 0, \qquad \operatorname{Im}[e^{-i\alpha_j}F(\zeta)] = d_j \quad \text{на } M$$
$$F(\zeta) = -2A\,\overline{\omega(\zeta)} \quad \text{на } L \tag{3.13}$$

Второе условие представляет собой записанное в комплексной форме уравнение j-го прямолинейного отрезка границы (как и в формуле (3.4)).

Краевую задачу (3.13) при помощи функций

$$\omega_1(\zeta) = \overline{\omega}(\zeta), \qquad F_1(\zeta) = \overline{F}(\zeta)$$

аналитических во внешности разрезов $L + M$, запишем в виде краевой задачи Римана для четырех функций $\omega(\zeta)$, $F(\zeta)$, $\omega_1(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$

$$\begin{array}{llll}
1) & F^+ + 2A\omega_1^- = 0, & 2) & F^- + 2A\omega_1^+ = 0 \quad \text{на } L \\
3) & F_1^- + 2A\omega^+ = 0, & 4) & F_1^+ + 2A\omega^- = 0 \quad \text{на } L \\
5) & F^+ + e^{-2i\alpha_j}F_1^- = 0, & 6) & F^- + e^{-2i\alpha_j}F_1^+ = 0 \quad \text{на } M
\end{array} \tag{3.14}$$
$$7) \quad \omega^+ - e^{2i\alpha_j}\omega_1^- = 2id_je^{i\alpha_j} \quad \text{на } M$$
$$8) \quad \omega^- - e^{2i\alpha_j}\omega_1^+ = 2id_je^{i\alpha_j} \quad \text{на } M$$

Введем новые аналитические функции

$$\varphi_1(\zeta) = F(\zeta) + 2A\omega_1(\zeta), \qquad \varphi_2(\zeta) = F_1(\zeta) - 2A\omega(\zeta) \tag{3.15}$$

Складывая первое условие краевой задачи (3.14) со вторым, из третьего условия вычитая четвертое, умножая пятое и шестое условия на $(-{}^1/{}_2A)$ и складывая их, соответственно, с восьмым и седьмым условиями, для функций $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ получаем краевую задачу

$$\varphi_1^+ + \varphi_1^- = 0 \quad \text{на } L, \qquad \varphi_1^+ + e^{-2i\alpha_j}\varphi_2^- = -4A\,id_je^{-i\alpha_j} \quad \text{на } M$$
$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = 0 \quad \text{на } L, \qquad \varphi_2^+ + e^{2i\alpha_j}\varphi_1^- = -4A\,id_je^{i\alpha_j} \quad \text{на } M \tag{3.16}$$

Краевая задача (3.16) является частным случаем краевой задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе. Ее решение получается в квадратурах.

Подставляя функции $\omega_1(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$, согласно (3.15) и (3.16), в краевую задачу (3.14), для определения двух функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta)$ также придем к уже изученной краевой задаче Римана.

Метод решения исходной задачи (3.12) без существенных изменений переносится на случай трехсвязной области.

Если область, занятая пластиной или мембраной и находящаяся вне площадки контакта, является односвязной (или, может быть, сделана односвязной при наличии линий симметрии задачи), то в качестве канонической области на параметрической плоскости ζ удобнее использовать полуплоскость или круг. Решение краевых задач при этом, совершенно аналогичное изложенному ранее, значительно упрощается, так как построенные выше функции $\omega_1(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$ будут аналитическими в области, симметричной области определения функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta)$ и не пересекающейся с последней, так что пару функций $\omega(\zeta)$ и $\omega_1(\zeta)$ (а также $F(\zeta)$ и $F_1(\zeta)$) можно считать одной кусочноаналитической функцией.

§ 4. Некоторые конкретные задачи. 1°. *Давление параболоида на бесконечную мембрану.* Пусть произвольный жесткий параболоид, уравнение поверхности которого имеет вид

$$z = Ax^2 + By^2 + Cxy \tag{4.1}$$

давит силой P на бесконечную произвольно натянутую мембрану, для которой справедливы представления (1.9).

На неизвестной границе L площадки контакта имеем граничные условия

$$\operatorname{Re} f'(x) = -2Ax - Cy, \qquad \varkappa \operatorname{Im} f'(z) = 2By + Cx \quad \text{на } L$$
$$f'(z) \to 0 \qquad \text{при } z \to \infty \tag{4.2}$$

Перейдем на внешность единичного круга параметрической плоскости ζ при помощи конформного преобразования $z = \omega(\zeta)$. Тогда из (4.2) для двух аналитических функций $\omega(\zeta)$ и $F(\zeta) = f'[\omega(\zeta)]$ можно получить краевую задачу

$$(1+\varkappa) F(\zeta) + (1-\varkappa)\overline{F(\zeta)} = 2(B - A + Ci)\,\omega(\zeta) - 2(A+B)\overline{\omega(\zeta)} \quad \text{при } |\zeta| = 1$$
$$\omega(\zeta) = O(\zeta), \qquad F(\zeta) = O(\zeta^{-1}) \quad \text{при } \zeta \to \infty \tag{4.3}$$

Используя или метод функциональных уравнений [11], или сводя (4.3) к краевой задаче Римана, легко найти решение задачи (4.3)

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + c_1/\zeta^{-1}, \qquad F(\zeta) = c_2/\zeta^{-1} \tag{4.4}$$

Здесь

$$|c_0^2| = \frac{P\,[4(B+\varkappa A)^2 + C^2(\varkappa-1)^2]}{8\pi\varkappa h\sigma_y(\varkappa^2A + B)(4AB - C^2)}$$

$$\arg c_0 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(\varkappa-1)C}{2(B+\varkappa A)} - \operatorname{arc\,tg}\frac{(\varkappa+1)C}{2(B-\varkappa A)}\right]$$

$$c_1 = \bar{c}_0\,\frac{2B - 2\varkappa A - C(\varkappa+1)i}{2B + 2\varkappa A - C(\varkappa-1)i}$$

$$c_2 = \frac{2\bar{c}_0}{\varkappa+1}\left[-A - B + (B - A + Ci)\,\frac{2B - 2\varkappa A - C(\varkappa+1)i}{2B + 2\varkappa A - C(\varkappa-1)i}\right]$$

Площадка контакта имеет форму эллипса.

При решении было использовано также условие равновесия параболоида

$$P = qS, \qquad q = 2h\sigma_y(\varkappa^2A + B) \tag{4.5}$$

где q — давление на контактной площадке, S — ее площадь.

Отметим один частный случай решения (3.4) при $C = 0$, $\varkappa = 1$

$$c_0^2 = \frac{P(A+B)}{8\pi\sigma hAB}, \qquad c_1 = \frac{B-A}{B+A}c_0, \qquad c_2 = -\frac{4AB}{A+B}c_0 \tag{4.6}$$

2°. *Давление параболоида на бесконечную пластину.* Пусть жесткий параболоид, уравнение поверхности которого имеет вид

$$z = Ax^2 + By^2 \tag{4.7}$$

давит силой P на бесконечную пластину, для которой справедливы представления (1.3). Эта задача другим методом была решена впервые Л. А. Галиным [1].

На неизвестной границе L площадки контакта имеем, очевидно, граничные условия

$$2 \operatorname{Re} \Phi (z) = -A - B, \quad \bar{z}\Phi' (z) + \Psi (z) = B - A \quad \text{на } L \tag{4.8}$$

На достаточном удалении от площадки контакта имеют место соотношения [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{P}{4\pi D}\left(\ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} + 1\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = \frac{P (x - iy)}{4\pi D (x + iy)}\end{gathered} \tag{4.9}$$

Асимптотические формулы (4.9) получены в предположении, что круговая пластинка радиуса R заделана по контуру, а размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусом R.

Перейдем на внешность единичного круга плоскости ζ при помощи конформного преобразования $z = \omega (\zeta)$. Тогда из (4.8) и (4.9) для трех аналитических функций

$$\omega (\zeta), \quad \chi (\zeta) = \frac{\omega' (\zeta)}{\varphi' (\zeta)} \{B - A - \Psi [\omega (\zeta)]\}, \qquad \varphi (\zeta) = \Phi [\omega (\zeta)]$$

можно получить краевую задачу:

при $|\zeta| = 1$

$$\varphi (\zeta) + \overline{\varphi (\zeta)} = -A - B, \qquad \overline{\omega (\zeta)} = \chi (\zeta) \tag{4.10}$$

при $\zeta \to \infty$

$$\omega (\zeta) = O (\zeta), \qquad c_0 = \omega' (\omega)$$

$$\varphi (\zeta) = \frac{P}{16\pi D} \left(\ln \frac{c_0{}^2\zeta^2}{R^2} + 1\right) + O (\zeta^{-1}) \qquad \chi (\zeta) = \frac{8\pi D}{P} c_0 (B - A) \zeta + O (\zeta^{-1})$$

Краевая задача (4.10) легко решается; получаем

$$\begin{gathered}\varphi (\zeta) = \frac{P}{16\pi D}\left(2 \ln \frac{c_0\zeta}{R} + 1\right), \qquad c_0 = R \exp \left[-\frac{4\pi D (A + B)}{P} - \frac{1}{2}\right] \\ \chi (\zeta) = c_0 \left[\frac{8\pi D (B - A)}{P} \zeta + \frac{1}{\zeta}\right], \qquad \omega (\zeta) = c_0 \left[\zeta + \frac{8\pi D (B - A)}{P\zeta}\right]\end{gathered} \tag{4.11}$$

Поступила 8 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. О давлении твердого тела на пластинку. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1948.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
4. Розенберг Л. А. О давлении твердого тела на пластинку. Инж. сб., 1955, т. 21.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
7. Черепанов Г. П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
8. Келдыш М. В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи матем. наук, 1939, вып. 6.
9. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.
10. Чаплыгин С. А. К теории триплана. Избранные труды по механике и математике, М., Гостехтеоретиздат, 1954.
11. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.