

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА В ДИНАМИКЕ СТЕРЖНЕЙ

В. В. Новожилов, Л. И. Слепян

(Ленинград)

Известны две формы приближенных уравнений динамического изгиба стержней — уравнение Бернулли — Эйлера

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (0.1)$$

и уравнение С. П. Тимошенко

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (0.2)$$

Последнее уравнение обычно называют «волновым» — оно приводит к конечной скорости распространения внезапно приложенного к стержню возмущения, и именно поэтому его считают существенно более пригодным для решения нестационарных задач, чем уравнение (0.1), которое дает бесконечно большие скорости распространения фронтов (см. например, [1]).

Для стержня кругового поперечного сечения и для балки-полоски, выделенной из прямоугольной пластины бесконечно большой ширины, уравнение (0.2) может быть выведено из общих уравнений динамики упругого тела [2] путем представления решения¹ в форме рядов по степеням расстояния точки от нейтральной оси и отбрасывания в получающемся при этом дифференциальном уравнении бесконечно высокого порядка всех членов с производными (как по времени, так и по координате) выше четвертого порядка.

То обстоятельство, что для вывода (0.2) приходится пренебрегать старшими производными по сравнению с младшими, казалось бы, исключает возможность его применения к задачам о распространении нестационарных деформаций вдоль стержней. К этому следует добавить, что как (0.1), так и (0.2) позволяют формулировать граничные условия только в смысле Сен-Венана.

Достаточность последнего в задачах статики обеспечивается принципом Сен-Венана, согласно которому уточнение теории в сторону учета самоуравновешенных краевых нагрузок внесло бы в поле напряжений лишь локальные поправки, не отражаясь (практически) на значениях прогибов. Что касается задач динамики, то в них напряжения и перемещения, вызываемые торцевой нагрузкой (вне зависимости от того, будет ли она самоуравновешенной или нет), не ограничиваются узкой зоной вблизи нагруженного торца, ввиду чего возможность постановки в этих задачах граничных условий только «в смысле Сен-Венана» оказывается проблематичной.

Сказанное ставит под сомнение допустимость использования «волнового» уравнения (0.2) (и, тем более, «неволнового» уравнения (0.1)) при решении задач о распространении деформаций, причем сомнения эти возникают как в связи с ограниченными возможностями рассматриваемых уравнений в отношении подчинения их решений краевым условиям, так и с точки зрения приемлемости вытекающих из них результатов даже в тех случаях, когда имеющиеся граничные условия не противоречат возможностям уравнений (т. е. сформулированы по Сен-Венану).

О применимости уравнений (0.1) и (0.2) имеется ряд теоретических [2-7] и экспериментальных [5,6] работ; однако до сих пор по этому вопросу существуют противоречивые суждения. По мнению одних, уравнения (0.1) и (0.2) не пригодны для решения

¹ См. также диссертацию И. Г. Селезова «Исследование распространения упругих волн в плитах и оболочках». Ин-т механики АН УССР, 1961.

задач о распространении возмущений и могут быть использованы лишь для исследования процессов, достаточно плавно изменяющихся как по времени, так и по координатам, по мнению других — уравнение (0.2) охватывает весь круг задач, в которых граничные условия заданы в смысле Сен-Венана.

В предлагаемой работе делается попытка ответить на два основных вопроса.

1. В какой мере правомочно переносить принцип Сен-Венана в динамику стержней, ограничиваясь постановкой краевых условий только по Сен-Венану.

2. Насколько достоверно решать задачи с граничными условиями по Сен-Венану, исходя из уравнения (0.2).

Первый вопрос освещается сначала с качественной стороны (§ 1), после чего ему дается и количественная оценка (§ 4). Второй вопрос освещается путем анализа решений уравнения (0.2) и некоторых других уравнений и сопоставления этих решений с точными решениями уравнений динамики упругого тела для некоторых частных нестационарных задач. Такого рода сравнения производились и ранее [4,8,9], однако при этом либо сравнивались решения стационарных задач¹, либо при получении точных решений использовался метод их представления в форме разложений по стационарным решениям (модам). Уравнение (0.2) дает всего две такие моды, тогда как точное решение приводит к бесконечному числу мод. Сложить их все, чтобы получить нестационарный или стационарный процесс с определенной формой возмущения, не представляется возможным. Считается, что если высшие моды (отсутствующие у (0.2)) в решении существенны, то результаты, даваемые (0.2), не достоверны. Как будет показано ниже, это не всегда так. Несовершенство метода разложения по модам заставляет прибегнуть к другим приемам построения решений.

§ 1. Об особенностях распространения несомоуравновешенных и самоуравновешенных торцевых возмущений. Рассмотрим полубесконечный стержень, к торцу которого в момент времени $t = 0$ внезапно прилагается некоторая самоуравновешенная нагрузка, остающаяся затем неизменной.

Эта задача сводится к решению уравнения

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \rho \mathbf{u}'' = 0 \quad (1.1)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}' = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.2)$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = f_x \delta_0(t), \quad \sigma_{xy} = f_y \delta_0(t), \quad \sigma_{xz} = f_z \delta_0(t) \quad \text{при } x = 0 \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{при } x = \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь точки означают дифференцирование по времени; $\delta_0(t)$ — функция Хевисайда; а функции $f_x = f_x(y, z)$, $f_y = f_y(y, z)$, $f_z = f_z(y, z)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \int f_x ds = 0, \quad \int f_y ds = 0, \quad \int f_z ds = 0, \quad \int y f_x ds = 0 \\ \int z f_x ds = 0, \quad \int (z f_y - y f_z) ds = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹ Следует отметить, что оправдание [4,8,9] или уточнение [7,10] уравнений сравнением фазовых скоростей не всегда обосновано. Дело в том, что волны, соответствующие нижним ветвям дисперсионных кривых для стержня как трехмерного тела, с увеличением частоты становятся поверхностными, что не может произойти в модели, описываемой «стержневой теорией». Таким образом, соответствующие кривые фазовых скоростей трехмерной и одномерной теорий при высоких частотах принадлежат различным видам деформаций, и их совпадение не является свидетельством в пользу одномерной теории.

Решение будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^* \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{u}_0(x, y, z)$ — решение статической задачи для этого же стержня при торцевой нагрузке

$$\sigma_{xx} = f_x, \quad \sigma_{xy} = f_y, \quad \sigma_{xz} = f_z$$

Введя (1.5) в (1.1) — (1.3), приходим к выводу, что неизвестный вектор \mathbf{u}^* должен подчиняться уравнению (1.1) при начальных условиях

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{u}_0(x, y, z), \quad \dot{\mathbf{u}}^* = 0 \quad (t=0) \quad (1.6)$$

а соответствующие перемещению \mathbf{u}^* напряжения должны быть при $t > 0$ равны нулю как на боковой поверхности стержня, так и на его торце.

Таким образом, исходная нестационарная задача расчленена на статическую и динамическую задачи, в последней движение точек стержня вызывается начальными перемещениями, взятыми из статической задачи. Но в силу принципа Сен-Венана перемещения \mathbf{u}_0 носят локальный характер, затухая практически уже при x порядка поперечного размера стержня. Физически очевидно, что движение \mathbf{u}^* , вызванное таким локальным возмущением, сведется к распространению вдоль стержня пакета волн, ширина которого вначале будет близка к ширине зоны начального возмущения, а в дальнейшем будет увеличиваться за счет дисперсии.

В любой момент времени должно выполняться равенство

$$V_0 = V_* + T_* \quad (1.7)$$

Здесь V_0 — потенциальная энергия начального возмущения, а V_* , T_* — потенциальная и кинетическая энергии точек стержня в динамической задаче.

Возвращаясь теперь к исходной задаче и учитывая, что ее решение складывается из решений статической и динамической задач, приходим к заключению, что и в этом случае движение точек стержня сводится к распространению вдоль стержня узкого волнового пакета, причем вблизи торца $x = 0$ очень быстро (за время t^* — время пробега волной деформации расстояния порядка поперечного сечения стержня) устанавливается поле напряжений, соответствующее статическому решению.

При $t \rightarrow \infty$ (а практически — при $t \gg t^*$) сумма кинетической и потенциальной энергий точек стержня стремится к $2V_0$, из которых половина остается в малой окрестности сечения $x = 0$ и половина распространяется вдоль стержня.

Принципиально иная картина получится, если считать, что торцевая нагрузка несамоуравновешена (т. е., если не выполняется хотя бы одно из равенств (1.4)). Тогда принятое выше расчленение задачи на две оказывается невозможным, так как при $t \rightarrow \infty$ перемещение $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$. Физически это означает, что при несамоуравновешенности внезапно приложенной к полубесконечному стержню торцевой нагрузки соответствующие ей перемещения со временем непрерывно возрастают, и сумма потенциальной и кинетической энергий точек стержня при $t \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности.

Фронты возмущения и в данном случае распространяются, разумеется, со скоростями волн объемного расширения или волн сдвига, однако зона возмущения не имеет характера узкого волнового пакета, а охватывает непрерывно расширяющуюся область, начинающуюся от нагруженного торца.

Предположим теперь, что к торцу внезапно и одновременно прилагаются как самоуравновешенная, так и несамоуравновешенная нагрузки, причем максимальные значения напряжений для обеих нагрузок являются величинами одного порядка. Ввиду сказанного ранее с возрастанием времени отношение $(V_1 + T_1) / (V_2 + T_2)$ (где V_1, T_1 — потенциальная и кинетическая энергии стержня, вызванные самоуравновешенной нагрузкой, а V_2, T_2 — вызванные несамоуравновешенной нагрузкой) непрерывно убывает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При $t \gg t^*$ это отношение уже должно стать весьма малым, причем поправки, вносимые в напряжения учетом самоуравновешенной нагрузки, могут сказываться только в непосредственной окрестности нагруженного торца и вблизи фронта возмущения, не влияя на перемещения оси стержня.

Таким образом, можно утверждать, что при одновременном приложении как самоуравновешенной, так и несамуравновешенной нагрузок первой можно пренебречь на том же основании, на каком это делают в задачах статики, т.е. ввиду существенной локальности соответствующих поправок.

Тем самым для рассмотренного важного класса задач принцип Сен-Венана справедлив (в указанном выше смысле). Данный вывод, однако, не может быть распространен на периодические нагрузки. Последние могут оказывать влияние на поле напряжений и перемещений по всей длине стержня (независимо от типа нагрузки). Поэтому пренебрегать самоуравновешенной торцевой нагрузкой по сравнению с несамуравновешенной в последнем случае, вообще говоря, нельзя.

В качестве объекта для теоретического исследования поставленных выше вопросов рассмотрим плоскую деформацию бесконечно широкой пластины, причем, не ограничиваясь задачей изгиба, дадим уравнение и для случая перемещений, симметричных относительно срединной плоскости. Последний случай интересен тем, что при его изучении возникают те же вопросы, что и в задаче изгиба, однако он существенно более прост в математическом отношении. Для построения приближенных уравнений используем метод представления перемещений и напряжений в ряды по полиномам Лежандра [11]. Этот подход в задачах динамики более логичен, чем традиционное представление в ряды по степеням расстояния точек от срединной поверхности z , так как, во-первых, используя ряды типа Фурье вместо степенных, получаем право без каких-либо дополнительных оговорок включить в рассмотрение и решения с разрывами первого рода (т.е. применять теорию к задачам о распространении волновых фронтов), во-вторых, разлагая напряжения в ряды по полиномам Лежандра, в чистом виде отделяем самоуравновешенную по сечению пластины часть поля напряжений от несамуравновешенной, что важно, если иметь в виду исследование возможности использования принципа Сен-Венана в задачах динамики.

§ 2. Точная постановка задачи; вывод приближенных уравнений из точных. Рассмотрим уравнения динамики упругого тела, написанные для случая плоской деформации

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + C_{21}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1 - C_{21}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= -q_x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + C_{21}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 - C_{21}^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= -q_z \end{aligned} \quad (C_{21} = c_2/c_1) \quad (2.1)$$

Все координаты и перемещения в (2.1) безразмерны, что достигнуто путем деления размерных координат и перемещений на полутолщину пластины h . Время τ в (2.1) также безразмерно, причем

$$\tau = (t/h) c_1, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho} \quad (2.2)$$

Здесь c_1 — скорость распространения волн объемного расширения, c_2 — скорость распространения волн сдвига; за единицу принимается, следовательно, интервал времени, в течение которого волна объемного расширения пробегает расстояние, равное половине толщины пластины, q_x, q_z — безразмерные объемные силы, получающиеся путем деления соответствующих компонентов объемных сил на $(\lambda + 2\mu)/h$.

Умножив каждое из уравнений (2.1) на полином Лежандра $P_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и проинтегрировав по толщине пластины, с учетом

отсутствия напряжений на плоскостях $z = \pm 1$, получим для

$$u_n(x, \tau) = \int_{-1}^1 u P_n(z) dz, \quad w_n(x, \tau) = \int_{-1}^1 w P_n(z) dz \quad (2.3)$$

две независимые бесконечные системы дифференциальных уравнений в частных производных, которые приводятся ниже и в которых приняты обозначения

$$q_{xn}(x, \tau) = \int_{-1}^1 q_x P_n(z) dz, \quad q_{zn}(x, \tau) = \int_{-1}^1 q_z P_n(z) dz \quad (2.4)$$

1. Система, описывающая продольную деформацию (u — четная, w — нечетная функция z)

$$\begin{aligned} u_0'' - u_0'' + 2(1 - 2C_{21}^2)w'(1) &= -q_{x0} \\ u_2'' - u_2'' + 3C_{21}^2u_0 - 3(1 - C_{21}^2)w_1' - 6C_{21}^2u(1) + \\ &+ 2(1 - 2C_{21}^2)w'(1) = -q_{x2} \\ \dots \dots \dots \\ C_{21}^2w_1'' - w_1'' - (1 - C_{21}^2)u_0' - 2w(1) + 2C_{21}^2u'(1) &= -q_{z1} \\ C_{21}^2w_3'' - w_3'' + 15w_1 - (1 - C_{21}^2)u_0' - 5(1 - C_{21}^2)u_2' - \\ &- 12w(1) + 2C_{21}^2u'(1) = -q_{z3} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $u(1), w(1)$ — значения u, w при $z = 1$

$$u(1) = \sum_{n=0, 2, \dots} (n + \frac{1}{2}) u_n, \quad w(1) = \sum_{n=1, 3, \dots} (n + \frac{1}{2}) w_n \quad (2.6)$$

2. Система, описывающая изгибные деформации (u — нечетная, w — четная функции z)

$$\begin{aligned} u_1'' - u_1'' - (1 - C_{21}^2)w_0' - 2C_{21}^2u(1) + 2(1 - 2C_{21}^2)w'(1) &= -q_{x1} \\ u_3'' - u_3'' - 15C_{21}^2u_1 - (1 - C_{21}^2)w_0' - 5(1 - C_{21}^2)w_2' - 12C_{21}^2u(1) + \\ &+ 2(1 - 2C_{21}^2)w'(1) = -q_{x3} \\ \dots \dots \dots \\ C_{21}^2w_0'' - w_0'' + 2C_{21}^2u'(1) &= -q_{z0} \\ C_{21}^2w_2'' - w_2'' + 3w_0 - 3(1 - C_{21}^2)u_1' - 6w(1) + 2C_{21}^2u'(1) &= -q_{z2} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$u(1) = \sum_{n=1, 3, \dots} (n + \frac{1}{2}) u_n, \quad w(1) = \sum_{n=0, 2, \dots} (n + \frac{1}{2}) w_n \quad (2.8)$$

Ограничиваясь сохранением в этих системах того или иного конечного числа уравнений, можно получить приближенные варианты теории. При этом, если сохранить в разложениях перемещений по полиномам Лежандра члены до u_{2n}, w_{2n-1} (в первом случае) или члены до u_{2n+1}, w_{2n} (во втором случае), то надо вычеркнуть в системах уравнения с правыми частями, соответствующими отбрасываемым членам рядов. Ввиду линейности задачи левые части дифференциальных уравнений для всех u_k, w_k , отвечающих какому-либо приближению, будут одинаковыми. Выпишем опера-

торы левых частей этих уравнений для нескольких первых приближений.

Удерживаемые
величины

Оператор

Продольные деформации

$$u_0 \quad L_1 \quad (2.9)$$

$$u_0, w_1 \quad L_1 L_2 + 3C_{32}^2 [L_3] \quad (2.10)$$

Изгибные деформации

$$w_0, u_1 \quad L_1 L_2 + 3 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.11)$$

$$w_0, u_1, w_2 \quad L_1 L_2^2 + 15C_{32}^2 \left[L_4 L_5 + 3C_{13}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \quad (2.12)$$

$$w_0, u_1, w_2, u_3 \quad L_1^2 L_2^2 + 15 C_{32}^2 L_6 L_7 L_8 + 525 C_{31}^2 \left(L_9 L_{10} + 3C_{13}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

$$\text{Здесь} \quad (2.13)$$

$$L_i = \frac{c_1^2}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 10), \quad C_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \quad (2.14)$$

Выражение для скорости распространения продольных деформаций c_3 , соответствующей плоскому напряженному состоянию, имеет вид

$$c_3 = \left(\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)} \right)^{1/2} = \left(\frac{E}{(1 - \nu^2)\rho} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

Параметр c_i в (2.14), имеющий размерность скорости, при $\lambda = 1.4\mu$ ($\nu = 0.292$) принимает значения

$i = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_{i1}^2 = 0.294$	0.830	0.805	0.292	0.99	0.292	0.347	0.738	0.246

Из полученных результатов можно усмотреть следующее.

(1) Выведенные приближенные уравнения при любой степени точности рассуждений дают скорости распространения разрывов, равные c_1 и c_2 , т. е. совпадающие со скоростями волн объемного расширения и волн сдвига (2.2).

Последнее вытекает из того, что члены со старшими производными в каждом из операторов всегда являются произведениями степеней двух одномерных волновых операторов L_1 и L_2 , которым соответствуют именно эти скорости.

(2) Уравнения с операторами (2.9) и (2.11) (т. е. первые приближения для задач о продольных и изгибных колебаниях пластины), в которых учитываются только несамоуравновешенные по сечению слагаемые рядов для напряжений, по структуре совпадают с общепринятым уравнением продольных колебаний пластин, получаемых из представления, что пластина находится в плоском напряженном состоянии, и с уравнением С. П. Тимошенко. Однако значения коэффициентов в последних уравнениях не совпадают с (2.9) и (2.11).

Действительно, в принятых обозначениях уравнение продольных колебаний имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - C_{13}^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.16)$$

а уравнение С. П. Тимошенко записывается в форме

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + 3C_{13}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] w_0 = 0 \quad (2.17)$$

где (применительно к плоской деформации пластины)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1.10, & \alpha_2 &= 2.02 & (\text{по рекомендации С. П. Тимошенко [12]}) \\ \alpha_1 &= 1.10, & \alpha_2 &= 2.26 & (\text{по рекомендации Я. С. Уфлянда [1]}) \\ \alpha_1 &= 1.26, & \alpha_2 &= 2.05 & (\text{по рекомендации И. Т. Селезова}) \end{aligned}$$

Последние значения α_1 и α_2 получены методом разложения решения рассматриваемой задачи в ряды по степеням z и отбрасывания в получающемся при этом уравнении бесконечно высокого порядка членов с производными выше четвертого порядка.

Известно, что уравнения (2.16) и (2.17) заведомо охватывают круг задач, в которых перемещения и напряжения являются достаточно плавными (медленно изменяющимися) функциями x и τ . Отсюда следует, что уравнения, соответствующие операторам (2.9) и (2.11), правильно улавливая характер наиболее быстро изменяющихся частей решений, должны давать существенную погрешность в отношении определения медленно изменяющихся перемещений и напряжений.

(3) Последний недостаток устраняется, если перейти ко вторым приближениям, каковым соответствуют операторы (2.10) и (2.12).

Действительно, заключенные в квадратные скобки члены оператора (2.10) идентичны (2.16), а члены оператора (2.12) близки по коэффициентам к (2.17), причем асимптотика оператора (2.12) для медленных процессов

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 3C_{13}^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

совпадает с асимптотикой оператора (2.17).

Поэтому уравнения второго приближения, описывая асимптотически правильно наиболее быстро изменяющиеся процессы, дают верные решения и для медленных процессов. В свете сказанного уравнение продольных колебаний (2.16) и уравнение изгибных колебаний (2.17) можно трактовать (с позиций изложенного общего метода) как вторые приближения (2.10), (2.12), в которых отброшены члены со старшими производными (четвертого порядка в (2.10) и шестого порядка в (2.12)).

Уравнениям (2.16) и (2.17) можно дать и несколько менее формальное толкование.

При построении операторов (2.9) и (2.11) пренебрегалось всеми самоуравновешенными составляющими. Не повышая порядок операторов, можно поступать иначе: учесть смещения, соответствующие первым из самоуравновешенных составляющих объемных сил, приняв для них асимптотические (для медленных процессов) зависимости. Так при $|w_1''| \ll 3|w_1|$, $|u_1''| \ll 3C_{13}^2|w_1|$ из третьего уравнения (2.5) получаем $w_1 = -1/3(1 - 2C_{21}^2)u_0'$ и, подставляя в первое, находим

$$L_3(u_0) = C_{13}^2 q_{x0} \quad (2.18)$$

— волновое уравнение для плоской деформации пластины.

Пренебрегая производными w_2 и u_3 во втором и четвертом уравнениях системы (2.7), получим¹ уравнения

$$\begin{aligned} w_0'' - 6/5 C_{12}^2 w_0'' + 3u_1' &= -6/5 C_{12}^2 q_{z0} \\ u_1'' - C_{13}^2 u_1'' - 5/3 C_{23}^2 (3u_1 + w_0') &= -C_{13}^2 q_{x1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

с основным оператором (2.17), тождественные системе уравнений Тимошенко [12].

¹ Иногда [6] утверждается, что уравнения С. П. Тимошенко основаны на гипотезе плоских сечений. В приведенном здесь выводе уравнений С. П. Тимошенко гипотеза плоских сечений не использовалась ($u_3 \neq 0$).

Таким образом, «инженерные уравнения» — уравнение продольных колебаний, уравнения С. П. Тимошенко — являются следствием теории упругости, если рассматриваются процессы, при которых смещения, соответствующие первым из самоуравновешенных составляющих объемных сил, изменяются достаточно медленно, а остальными можно пренебречь. Указанными предположениями достигается упрощение уравнений, но утрачивается точность в отношении определения скоростей распространения разрывов и описания поля напряжений и перемещений в их окрестностях.

(4) Без специального исследования нельзя сказать, насколько эта утрата существенна для оценки практического значения уравнения продольных колебаний и для уравнения С. П. Тимошенко. Дело в том, что, как будет видно из дальнейшего, в задачах о распространении деформаций в пластинах и стержнях интерес представляют не столько истинные фронты, сколько квазифронты, на которых напряжения хотя и не терпят разрыв, но имеют существенно большие градиенты. Энергия волнового пакета, непосредственно следующего за истинным фронтом, на достаточно большом расстоянии от источника возмущения ($x \gg 1$) относительно мала. Подавляющая же часть энергии следует за квазифронтом. Это в значительной мере снижает интерес к описанию картины движения в окрестности фронта и заставляет проявлять внимание к области, где сосредоточена большая часть энергии движения.

Последнее необходимо иметь в виду при оценке возможностей приближенных уравнений динамики пластин и стержней. Более того, став на точку зрения необходимости правильной оценки преимущественно распространения энергии, нельзя безоговорочно отвергнуть даже уравнение Бернулли — Эйлера (0.1) как аппарат для изучения распространения изгибных деформаций вдоль стержней лишь на том основании, что в нем принимается $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. скорости распространения фронтов считаются бесконечно большими. В следующих параграфах приводится ряд примеров, иллюстрирующих высказанные выше положения и проливающих свет на степень точности и на области применимости различных приближенных вариантов уравнений динамики стержней и пластин. Попутно приводятся и некоторые количественные данные относительно распространения вдоль стержней (пластин) самоуравновешенных возмущений.

§ 3. Переходные процессы в задаче о продольных деформациях пластин. В качестве объекта для исследования и сравнения между собой точных и приближенных решений уравнений динамики стержней рассмотрим наиболее простую для математического исследования нестационарную задачу, когда плоское движение безграничной пластины вызывается сосредоточенными на плоскости yz объемными силами, изменяющимися по закону

$$q_x = Q_x(z) \delta_1(x) \delta_0(\tau), \quad q_z = Q_z(z) \delta_1(x) \delta_0(\tau) \quad (3.1)$$

Здесь δ_1 — функция Дирака, δ_0 — функция Хевисайда, причем в момент начала действия этих сил ($\tau = 0$) пластина находится в покое ($u = w = u' = w' = 0$).

Эта несколько вычурная задача позволяет использовать не только преобразование Лапласа, но и преобразование Фурье, что является ее преимуществом перед более естественной задачей, когда пластина полубесконечна и движение ее возбуждается краевой нагрузкой, изменяющейся по аналогичному закону.

Начнем со случая, когда Q_x — четная, а Q_z — нечетная функции z , т. е. с безызгибной деформации пластины, и построим решение, исходя из уравнений второго приближения, которому соответствует оператор (2.10), учитывающий, кроме несамоуравновешенных по сечению напряжений, также и самоуравновешенные напряжения σ_{xz} , изменяющиеся

по линейному закону. При этом уравнения (2.5) примут вид

$$\begin{aligned} u_0'' - u_0'' + 3(1 - 2C_{21}^2)w_1' &= -Q_{x0}\delta_1(x)\delta_0(\tau) \\ - (1 - 2C_{21}^2)u_0' + C_{21}^2w_1'' - w_1'' - 3w_1 &= -Q_{z1}\delta_1(x)\delta_0(\tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Q_{x0} = \int_{-1}^1 Q_x(z) dz = 2Q, \quad Q_{z1} = \int_{-1}^1 zQ_z(z) dz = 2R \quad (3.3)$$

После осуществления над (3.2) преобразований Фурье (F) по x и Лапласа (L) по τ получаем

$$(q^2 + p^2)u_0^{LF} + 3(1 - 2C_{21}^2)iqw_1^{LF} = 2Q/p \quad (3.4)$$

$$- (1 - 2C_{21}^2)iqu_0^{LF} + (C_{21}^2q^2 + p^2 + 3)w_1^{LF} = 2R/p$$

$$\text{Отсюда} \quad (3.5)$$

$$u_0^{LF} = A^{-1}(p^2, q^2) [(C_{21}^2q^2 + p^2 + 3)2Q/p - 3iq(1 - 2C_{21}^2)2R/p]$$

$$w_1^{LF} = A^{-1}(p^2, q^2) [iq(1 - 2C_{21}^2)2Q/p + (q^2 + p^2)2R/p]$$

$$A(p^2, q^2) = p^4 + [(1 + C_{21}^2)q^2 + 3]p^2 + C_{21}^2q^4 + 3C_{31}^2q^2 \quad (3.6)$$

Так как $\sigma_{xx0}^{LF} = -iqu_0^{LF} + 3(1 - 2C_{21}^2)w_1^{LF}$ то можно написать

$$\begin{aligned} \sigma_{xx0}^{LF} &= \left[\frac{-iq}{q^2 + p^2} + 3(1 - 2C_{21}^2)^2 \frac{iqp^2}{(q^2 + p^2)A(p^2, q^2)} \right] \frac{2}{p} Q + \\ &+ 3(1 - 2C_{21}^2) \frac{p^2}{A(p^2, q^2)} \frac{2}{p} R \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{xx0} &= \frac{Q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{i}{q} + 3(1 - 2C_{21}^2)^2 \frac{iq}{p_1^2 - p_2^2} \left(\frac{\cos p_2\tau}{q^2 - p_2^2} - \frac{\cos p_1\tau}{q^2 - p_1^2} \right) \right] \times \\ &\times e^{-iqx} dq + \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3(1 - 2C_{21}^2) \frac{\cos p_2\tau - \cos p_1\tau}{p_1^2 - p_2^2} e^{-iqx} dq \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{Здесь } -p_1^2, -p_2^2 \text{ — корни уравнения } A(p^2, q^2) = 0 \quad (3.9)$$

$$p_{1,2}^2 = 1/2 [(1 + C_{21}^2)q^2 + 3] \pm \sqrt{1/4 [(1 + C_{21}^2)q^2 + 3]^2 - C_{21}^2q^4 - 3C_{31}^2q^2}$$

Графики функций $p_1(q)$, $p_2(q)$, $\partial p_1 / \partial q$, $\partial p_2 / \partial q$ показаны на фиг. 1.

Если $\tau \rightarrow \infty$, то основной вклад в значение первого интеграла (3.8) будет давать интегрирование первого члена, а также интегрирование в окрестностях нулей знаменателя членов, стоящих в круглых скобках (т. е. в окрестности $q = 0$ и $q = \infty$).

При этом можно пользоваться разложениями

$$p_1^2 = 3 + 0.463q^2 + \dots, \quad p_1 = \sqrt{3} + 0.1337q^2 + \dots \text{ при } q \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

$$p_2^2 = 0.830q^2 - 0.0305q^4 + \dots, \quad p_2 = 0.911q - 0.0167q^3 + \dots$$

$$p_1^2 = q^2 + 0.722 + \dots, \quad p_1 = q + 0.361q^{-1} + \dots \text{ при } q \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

$$p_2^2 = 0.294q^2 + 2.278 + \dots, \quad p_2 = 0.541q + 2.06q^{-1} + \dots$$

Ограничиваясь пока что случаем несомоуравновешенного возмущения, т. е. полагая $R = 0$, имеем (3.12)

$$\frac{\sigma_{xx0}}{Q} = -1 + 3 - 2C_{21}^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q}{p_1^2 - p_2^2} \sum_{i=1}^2 \frac{\sin(qx + p_i \tau) + \sin(qx - p_i \tau)}{q^2 - p_i^2} (-1)^i dq$$

причем на основании вышеизложенного при $\tau \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma_{xx0}}{Q} \sim -1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^2 [\sin(qx + (-1)^i m) + \sin(qx + (-1)^i n)] \frac{dq}{q}$$

$$(m = (0.911q - 0.0167q^3) \tau, \quad n = (q + 0.361q^{-1}) \tau) \quad (3.13)$$

Из полученного приближенного решения следует:

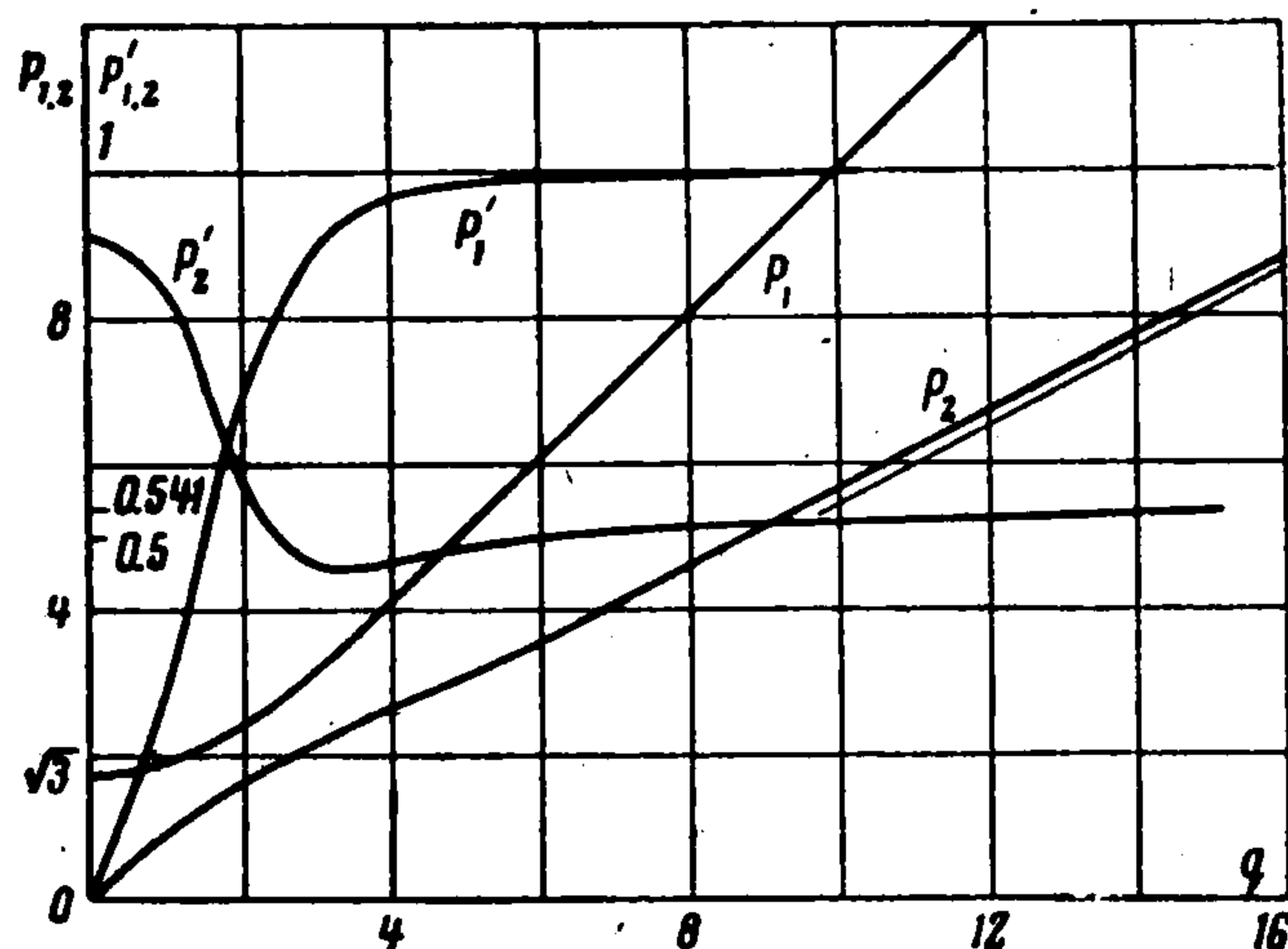
(а) при $x = c\tau$ ($c < C_{31} = 0.911$) основной вклад дает первый член (3.13) (два слагаемых во втором члене взаимно уничтожаются), т. е. в этом диапазоне

$$\sigma_{xx0} \sim -Q \quad (3.14)$$

(б) при $x = 0.911\tau + \varepsilon$ основные вклады дают первый и второй члены (3.13), причем

$$\sigma_{xx0} \sim -Q \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(q\varepsilon + 0.0167q^3\tau) \frac{dq}{q} \right) \quad (3.15)$$

Если обозначить $\alpha = (0.0167\tau)^{-1/3}\varepsilon$, то формула (3.15) может быть написана в виде



Фиг. 1

$$\sigma_{xx0} \sim -Q \left(\frac{1}{3} - \int_0^{\alpha} Ai(\varphi) d\varphi \right)$$

$$\left(Ai(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3 + \varphi t) dt \right) \quad (3.16)$$

Здесь $Ai(\varphi)$ — функция Эйри [13], графики которой можно найти в [14].
(в) при $x = \tau - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) основной вклад дает последний член (3.13) (два первых члена взаимно уничтожаются), и

$$\sigma_{xx0} \sim -QJ_0(1.20\sqrt{\varepsilon\tau}) \quad (3.17)$$

Таким образом, уравнения (3.1) дают следующую картину распространения деформаций при внезапном приложении объемной силы $Q_x = 2Q\delta_1(x)\delta_0(\tau)$.

(1) Со скоростью волн объемного расширения (c_1) распространяется фронт возмущения со скачком в напряжениях Q . Следующий за ним волновой пакет на достаточном расстоянии от плоскости возмущения $x = 0$ вырождается в узкий пик — сигнал, несущий малую долю энергии (стремящуюся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$).

(2) Со скоростью c_3 распространяется квази фронт, в районе которого

$$Q^{-1} \frac{\partial \sigma_{xx0}}{\partial \tau} = Ai(0) \frac{\partial a}{\partial \tau} = - \frac{\Gamma(1/3) \cos^{1/3} \pi}{3\pi} 0.911 (0.0167\tau)^{-1/3} = -0.88\tau^{-1/3} \quad (3.18)$$

(3) В интервале между $x = 0$ и квази фронтом напряжения близки к постоянному значению $-Q$.

Сравним полученные результаты с точным решением той же задачи, вытекающим непосредственно из (2.1), и с более грубым приближенным решением, следующим из уравнения продольных колебаний (2.18).

Уравнение продольных колебаний в данном случае приводит к утрате истинного фронта и непосредственно прилегающей к нему узкой зоны возмущения, квази фронт превращается при этом в истинный фронт со скачком в напряжениях Q . В области между этим фронтом и $x = 0$ напряжения получаются постоянными: $\sigma_{xx0} = -Q$. Что касается точного решения задачи, то, применив к (2.1) интегральные преобразования Фурье и Лапласа, придем к следующей формуле для Лапласова изображения:

$$Q^{-1} \sigma_{xx0}^L = -\frac{1}{p} + \frac{2}{\pi} (C_{12}^2 - 2)^2 p^3 \int_0^{\infty} \frac{q \sin qxdq}{(q^2 + p^2) B(p^2, q^2)} \quad (3.19)$$

$$B(p^2, q^2) = (q^2 + n_2^2)^2 n_1 \operatorname{cth} n_1 - 4q^2 n_2 n_1^2 \operatorname{cth} n_2$$

$$n_1 = \sqrt{q^2 + p^2}, \quad n_2 = \sqrt{q^2 + C_{12}^2 p^2} \quad (3.20)$$

Имея в виду получение решения при достаточно больших x и τ , разложим входящие в B гиперболические функции в степенной ряд, сохранив в нем два первых члена.

Тогда получим для σ_{xx0} выражение, отличающееся от (3.8) лишь значениями корней $-p_1^2$, $-p_2^2$, а именно,

$$p_2^2 = 0.830q^2 - 0.0470q^4 + \dots, \quad p_1^2 = 3 + 0.170q^2 + \dots \quad \text{при } q \rightarrow 0$$

Это отличие приводит к несколько иной (меньшей на 13%) скорости изменения напряжений в районе квази фронта, чем в (3.18), а именно,

$$\frac{\partial \sigma_{xx0}}{\partial \tau} = -0.77\tau^{-1/3} \quad (\text{при } x = C_{31}\tau) \quad (3.22)$$

Во всем остальном полученная ранее, исходя из второго приближения (3.2), картина движения подтверждается. К таким же результатам (для окрестности $x = C_{31}\tau$) приводят исследования работы [14], проведенные другим путем и качественно подтвержденные экспериментом¹.

Использованные выше методы не подходят для исследования деформаций в начальный период движения (при относительно малых τ). Здесь успешно можно применить разложение деформаций в ряд Фурье на переменном интервале, полностью охватывающем деформированную часть пластины ($0 \leq |x| \leq \tau$).

Преимуществами данного приема является использование возможности применения рядов Фурье в нестационарных задачах для неограниченных областей и улучшение сходимости тригонометрических рядов в нестационарных задачах для ограни-

¹ В работе [14] в формуле (41) имеется опечатка: в первых квадратных скобках числитель равен 6, а не 2.

ченных областей в тот период времени, когда возмущение еще не распространилось на всю область. Формально указанное решение получается из решения, соответствующего постоянному интервалу $2l$ с последующей заменой $2l$ на 2τ .

В рассматриваемой задаче при использовании второго приближения (3.2) ряд Фурье на интервале $2l = 2\tau$ получается из интеграла Фурье (3.12) путем рассуждений, обратных тем, какие применяют обычно для получения интеграла Фурье из ряда, т. е. заменой q на $n\pi/\tau$ (n — номер члена ряда), интеграла — на сумму и умножением нулевого члена ряда на π/τ , а остальных членов — на $2\pi/\tau$. При этом получим

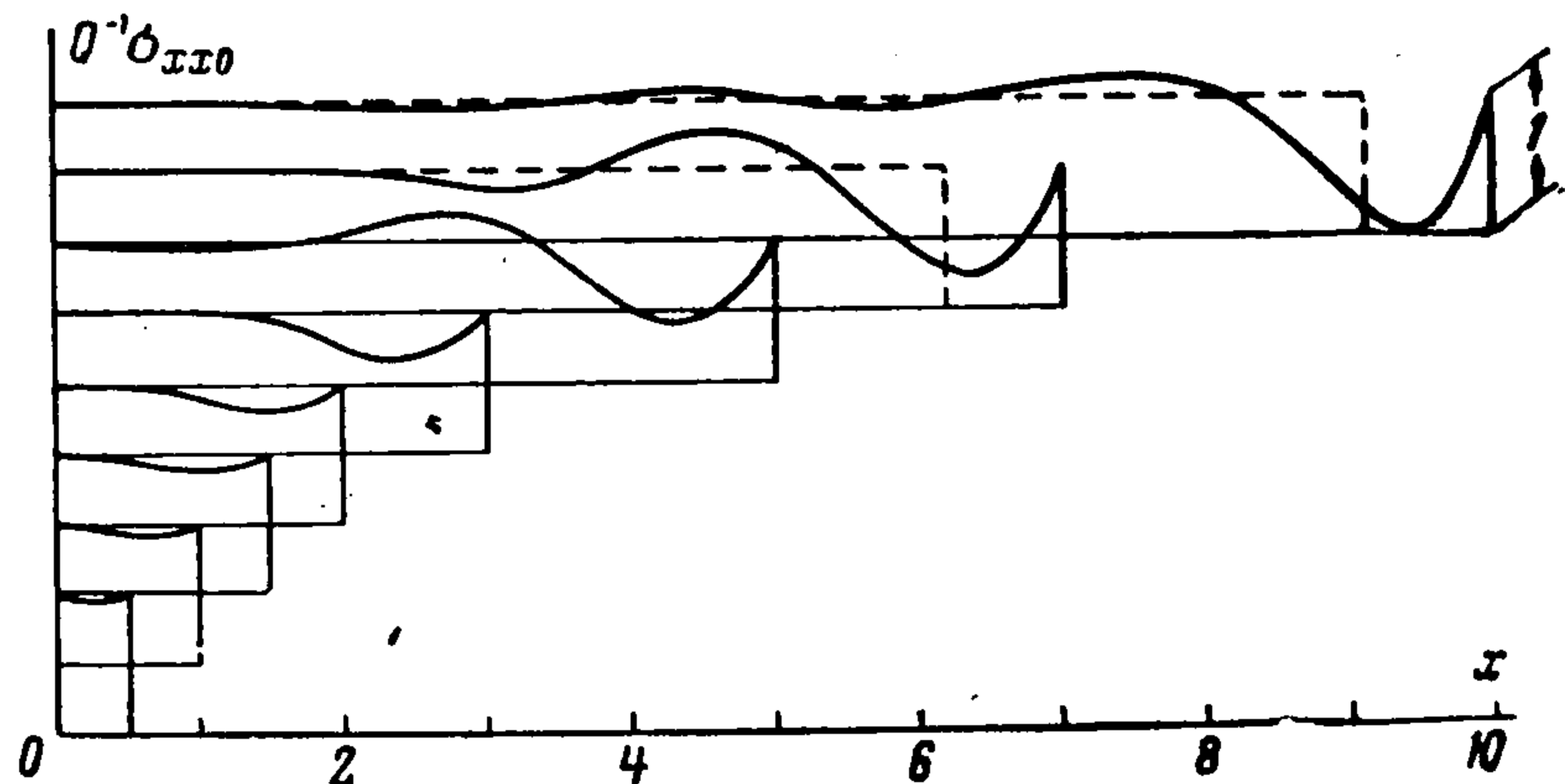
$$\frac{\sigma_{xx0}}{Q} = -1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\pi^2}{\tau^2} 3(1 - 2C_{12}^2)^2 \frac{n}{p_1^2 - p_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\cos p_i \tau}{q^2 - p_i^2} \right] \sin qx$$

при $0 < x < \tau$

$$Q_{xx0}^{-1} = 0 \quad \text{при } x > \tau \quad (3.23)$$

Здесь p_1, p_2 определяются, как и выше (3.9), при замене $q = n\pi/\tau$.

Результаты вычислений по формуле (3.23), иллюстрирующие развитие и установление волны напряжений в пластине, показаны на фиг. 2. Расчет проведен для значе-



Фиг. 2

ний τ от 0.5 до 10. После этого значения заведомо можно пользоваться теми оценками, которые были даны в начале параграфа; на фиг. 2 пунктир соответствует элементарной теории.

§ 4. Исследование эффекта Сен-Венана в задаче о продольных колебаниях пластины. В предыдущем параграфе рассмотрен случай $Q \neq 0, R = 0$. Обратный случай $R \neq 0, Q = 0$ также представляет интерес, поскольку при этом объемные силы q_z самоуравновешены, и, следовательно, распространение деформаций должно происходить в соответствии с принципом Сен-Венана (т. е. форме узкого волнового пакета, непрерывно «тающего» за счет дисперсии).

Ясно, что в рассматриваемом случае смещение u_0 не оказывает решающего влияния на распространяющиеся вдоль пластины самоуравновешенные касательные напряжения.

Положив во втором из уравнений (3.4) величину $u^{LF} = 0$, получим

$$(C_{21}^2 q^2 + p^2 + 3) w_1^{LF} = 2R / p \quad (4.1)$$

Отсюда найдем простую оценку

$$w_1^{LF} = 2R \frac{\sin \sqrt{C_{21}^2 q^2 + 3} \tau}{\sqrt{C_{21}^2 q^2 + 3}} \quad (4.2)$$

$$R^{-1} w_1 = \frac{c_1}{c_2} J_0(\sqrt{3}(\tau^2 - C_{12}^2 x^2)) \quad (c_2 \tau > c_1 x) \quad (4.3)$$

При τ больших и $(\tau - x) \tau^{-1}$ малых

$$\begin{aligned} w_1' &= -C_{12} w_1 + O(\tau^{-1}) \\ \sigma_{xz1} &= C_{21} w_1' \approx -R J_0 \left(\sqrt{3} (\tau^2 - C_{12}^2 x^2) \right) \quad (c_2 \tau > c_1 x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

В районе, где приложено внешнее возмущение,

$$\sigma_{xz1} \approx -R \exp(-\sqrt{3} C_{12} x) \quad (4.5)$$

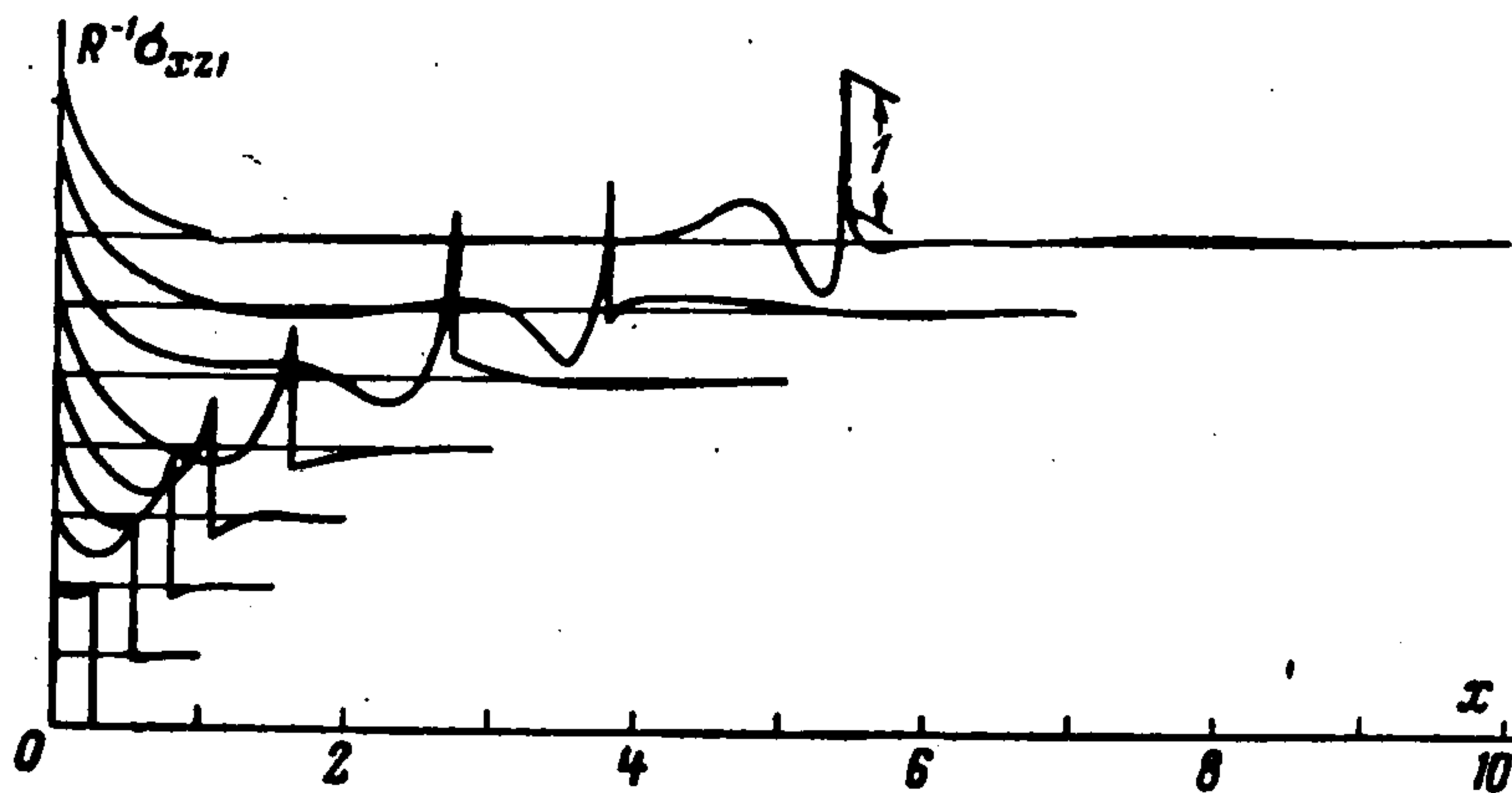
Более точно (без пренебрежения u_0) процесс распространения самоуравновешенных по сечению напряжений (σ_{xz1}) в начальный период движения может быть изучен при помощи разложения этих напряжений в ряд Фурье на переменном во времени интервале.

Исходя из (3.5) и связи напряжений с перемещениями, находим

$$\begin{aligned} R^{-1} \sigma_{xz1} &= -\delta_0 (C_{21} \tau - x) + \frac{2}{\pi} C_{21}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \frac{q^2}{p_1^2 - p_2^2} \left[\cos p_1 \tau - \cos p_2 \tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q^2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{1 - \cos p_i \tau}{p_i^2} \right] + C_{12}^2 \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi C_{21}) \right\} \sin qx \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $p_{1,2}$ определяются так же, как и в (3.23).

Результаты вычислений по формуле (4.6) для различных значений $0.5 \leq \tau \leq 10$ показаны на фиг. 3, из которой следует что, уже начиная с $\tau = 5$, деформация сводится к волновому пакету шириной порядка 1, распространяющемуся со скоростью волн сдвига c_2 и к установлению вблизи $x = 0$ поля напряжений, близкого к статическому полю, соответствующему приложенной нагрузке. Ясно (вследствие соображений, высказанных в § 1, и данной выше оценки), что с увеличением τ эта картина сохранится, ввиду чего продолжение выкладок в сторону $\tau > 10$ не даст ничего нового.



Фиг. 3

При изучении эффекта Сен-Венана в случае периодического возмущения существенным является учет связи между смещениями, соответствующими самоуравновешенным и несамуравновешенным напряжениям.

Игнорирование такой связи (рассмотрение безграничной среды) приводит к следующему заключению [16]: эффект Сен-Венана («пограничный слой») имеет место при частоте ниже некоторой критической (зависящей от частоты формы воздействия) и отсутствует при более высокой частоте. В случае пластины получается другой вывод.

Заменив в (3.2) значение $\delta_0(\tau)$ на $e^{i\omega\tau}$, и исходя из связи между напряжениями и деформациями, для $x > 0$ получим

$$R^{-1} \sigma_{xz1} = -e^{i\omega\tau} (q_1^2 - q_2^2)^{-1} [(q_1^2 + \omega^2) e^{-q_1 x} - (q_2^2 + \omega^2) e^{-q_2 x}] \quad (4.7)$$

$$q_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [-(1 + C_{12}^2) \omega^2 + 3C_{32}^2] \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} (C_{12}^2 - 1)^2 \omega^4 - 3(C_{12}^2 - 2C_{21}^2) \omega^2 + 36(1 - C_{21}^2)^2}$$

$$q_1^2 > 0, \quad q_2^2 < 0 \quad \text{при } 0 < \omega^2 < 3; \quad q_1^2 < 0, \quad q_2^2 < 0 \quad \text{при } \omega^2 > 3.$$

Корень q_2 всегда мнимый, поэтому соответствующая часть напряжений σ_{xz1} не затухает с увеличением координаты, x -эффект Сен-Венана отсутствует. Эффект проявляется при $\omega^2 < 3$ лишь для части напряжений, соответствующей корню q_1 .

Таким образом, в случае стационарного процесса самоуравновешенная нагрузка непрерывно индуцирует волны напряжений, распространяющиеся вдоль пластины.

Следует отметить, что как при стационарном, так и при нестационарном процессах самоуравновешенное возмущение вызывает и несамоуравновешенные напряжения.

Вследствие этого описанные выше волны напряжений, распространяющиеся вдоль пластины, несут лишь часть энергии, излучаемой внешним воздействием.

Однако в случае нестационарного процесса суммарная энергия, уходящая от района самоуравновешенного воздействия, остается равной V_0 (см. § 1).

Выше была решена частная задача, проливающая свет на особенности распространения самоуравновешенных и несамоуравновешенных возмущений при продольных деформациях пластины. Сравнение решения уравнений (3.2) с результатами, вытекающими из теории упругости, проведенное для $\tau \gg 1$, в основном подтвердило достоверность указанного решения. Этот вывод нельзя считать неожиданным, если учесть, что при $\tau \gg 1$ квазифронт сглаживается, вследствие чего высшие составляющие в разложениях смещений по полиномам Лежандра становятся несущественными.

Обычно подвергается сомнению приемлемость «инженерных» уравнений для описания динамических деформаций при малых τ после внезапного приложения внешней нагрузки. Сравнение решений, определяемых (3.2) и теорией упругости при малых τ , производится ниже.

§ 5. Динамическая податливость пластины при малых τ . Исследуем динамическую податливость пластины при действии объемных сил

$$q_x = 2Q\delta_1(x)\delta_0(\tau)$$

Найдем вначале решение уравнений теории упругости.

Однородность характеристического полинома, соответствующего уравнениям теории упругости (2.1) (в (2.1) входят производные только второго порядка), позволяет построить решение в форме отдельных волн, удобное для использования [15,20] при малых τ .

Решение проводится применением преобразований Лапласа и Фурье. При этом вследствие однородности изображений, представляющих волны, отраженные от свободных поверхностей пластины, оказывается возможным обеспечить формальную тождественность обратного преобразования Фурье прямому преобразованию Лапласа, в результате чего отпадает необходимость проведения обоих (L) и (F) обратных преобразований.

При помощи преобразований Лапласа по τ и Фурье по x из уравнений (2.1) для случая продольных деформаций находим

$$\begin{aligned} (q^2 + p^2)u^{LF} - C_{21}^2 \frac{d^2 u^{LF}}{dz^2} + (1 - C_{21}^2)iq \frac{dw^{LF}}{dz} &= \frac{2}{p} Q \\ \frac{d^2 w^{LF}}{dz^2} - (C_{21}^2 q^2 + p^2)w^{LF} - (1 - C_{21}^2)iq \frac{du^{LF}}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

С учетом граничных условий при $z = \pm 1$

$$\frac{dw^{LF}}{dz} + \frac{1}{2}(C_{21}^2 - 2)\left(-iqu^{LF} + \frac{dw^{LF}}{dz}\right) = 0, \quad -iqw^{LF} + \frac{du^{LF}}{dz} = 0 \quad (5.2)$$

решение системы (5.1) относительно $u_0^L(0, p)$ имеет вид

$$\frac{u_0^L(0, p)}{Q} = \frac{1}{p^2} + (C_{21}^2 - 2) \frac{2}{\pi} p \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(q^2 + p^2) B(p^2, q^2)} \quad (5.3)$$

где B определяется выражением (3.20).

Входящие в B гиперболические функции можно представить в виде

$$\text{cth } n_{1,2} = 1 + 2e^{-2n_{1,2}} + 2e^{-4n_{1,2}} + \dots \quad (5.4)$$

Тогда

$$B = a_1 - a_2 + 2a_1(e^{-2n_1} + e^{-4n_1} + \dots) - 2a_2(e^{-2n_2} + e^{-4n_2} + \dots) \quad (5.5)$$

$$\frac{u_0^L(0, p)}{Q} = \frac{1}{p^2} + (C_{21}^2 - 2)^2 \frac{2}{\pi} p \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{n_1^2 (a_1 - a_2)} \left[1 - 2 \frac{a_1 e^{-2n_1} - a_2 e^{-2n_2}}{a_1 - a_2} + \dots \right] \quad (5.6)$$

$(a_1 = (q^2 + n_2^2) n_1, \quad a_2 = 4q^2 n_1^2 n_2)$

Члены в (5.6), содержащие множителями экспоненты, соответствуют запаздывающим оригиналам, так что для $\tau < 2$ их все можно игнорировать, для $\tau < 2C_{12}$ следует удержать лишь член с $\exp(-2n_1)$, и так далее.

Ограничиваясь промежутком времени $0 < \tau < 2$, C_{12} имеем

$$Q^{-1}u_0^L = p^{-2} + (C_{12}^2 - 2)^2 (C^L - D^L) 2 / \pi \quad (5.7)$$

где

$$C^L = p \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{n_1^3 [(q^2 + n_2^2)^2 - 4q^2 n_1 n_2]}, \quad D^L = p \int_0^\infty \frac{2q^2 (q^2 + n_2^2)^2 e^{-2n_1} dq}{n_1^3 [(q^2 + n_2^2)^2 - 4q^2 n_1 n_2]^2} \quad (5.8)$$

Будем рассматривать Лапласовы изображения C^L и D^L лишь на вещественной оси p . Положив в интегралах (5.8) $q = ps$, получим

$$C^L = \alpha p^{-3}, \quad C = 1/2 \alpha \tau^2 \quad (5.9)$$

где

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(s^2 + 1)^{3/2} [(2s^2 + C_{12}^2)^2 - 4s^2 \sqrt{s^2 + 1} \sqrt{s^2 + C_{12}^2}]} = 0.0455$$

Для вычисления D введем еще замену $\sqrt{s^2 + 1} = 1 + 1/2 \tau$. Тогда

$$D^L = \frac{e^{-2p}}{p^3} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

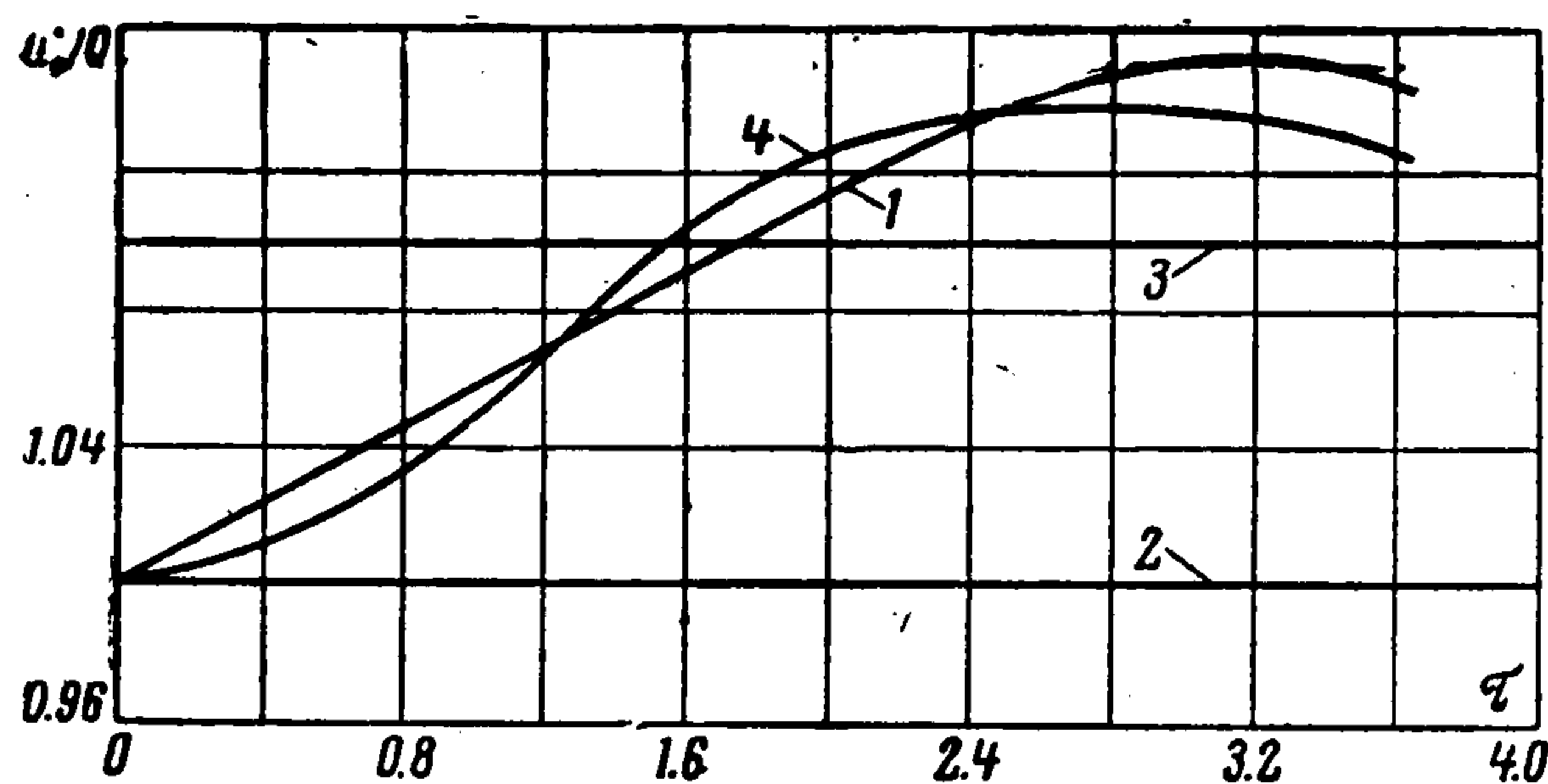
$$f(\tau) = \frac{\sqrt{1/4\tau^2 + \tau} (1/2\tau^2 + 2\tau + C_{12}^2)^2}{(1/2\tau + 1)^2 [(1/2\tau^2 + 2\tau + C_{12}^2)^2 - 4(1/4\tau^2 + \tau)(1/2\tau + 1) \sqrt{1/4\tau^2 + \tau + C_{12}^2}]} \quad (5.10)$$

Интеграл (5.10) можно рассматривать как преобразование Лапласа над функцией $f(\tau)$. Учитывая, кроме того, наличие множителя перед интегралом, можно записать

$$D = \frac{1}{2} \int_2^{\tau-2} f(\alpha - 2) (\tau - \alpha)^2 d\alpha \quad \text{при } \tau > 2, \quad D = 0 \quad \text{при } \tau < 2 \quad (5.11)$$

График скорости u_0^* при внезапном приложении продольной силы ($x = 0$) представлен на фиг. 4, где кривая 1 — теория упругости, кривая 2 — уравнение (5.12), кривая 3 — уравнение (5.14), кривая 4 — уравнение (3.2).

Выясним теперь, какова динамическая податливость моделей бесконечной пластины, описываемых упрощенными уравнениями.



Фиг. 4

1. Уравнение продольных деформаций, учитывающее только u_0 — основной оператор L_1 (2.9),

$$u_0'' - u_0'' = -q_{x0} = -2Q\delta_1(x)\delta_0(\tau) \quad (5.12)$$

Искомое решение этого уравнения имеет вид

$$u_0^*(0, \tau) = Q \quad (\tau > 0) \quad (5.13)$$

2. Уравнение продольных деформаций, учитывающее u_0, w_1 в предположении плавности $w_1(x, \tau)$, обычно используемое для пластины, (2.18)

$$C_{13}^2 u_0'' - u_0'' = -2Q\delta_1(x)\delta_0(\tau) \quad (5.14)$$

его решение

$$u_0^*(0, \tau) = C_{13}Q \quad (\tau > 0) \quad (5.15)$$

3. Уравнения продольных деформаций, учитывающие u_0, w_1 — уравнения (3.2).

Пусть $q_{x0} = 2Q\delta_1(x)\delta_0(\tau)$, $q_{z1} = 0$. Тогда при помощи преобразования Лапласа по τ можно получить

$$u_0^L(0, p) = \frac{p^2 + m_1 m_2}{p^3 (m_1 + m_2)} Q \quad (5.16)$$

где

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (C_{12}^2 + 1) p^2 + 3C_{32}^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} (C_{12}^2 + 1) p^2 + 3C_{32}^2)^2 - C_{12}^2 (p^4 + 3p^2)}$$

Разложение $p^2 u_0^L$ в ряд по отрицательным степеням p в окрестности бесконечно удаленной точки оказывается следующим:

$$Q^{-1} p^2 u_0^L = 1 + \frac{0.110}{p^2} - \frac{0.191}{p^4} + \frac{0.399}{p^6} - \frac{0.892}{p^8} + \frac{1.92}{p^{10}} \mp \dots \quad (5.17)$$

Отсюда

$$Q^{-1} u_0^* = 1 \mp 0.0550\tau^2 - 0.00795\tau^4 + 0.553 \cdot 10^{-3}\tau^6 - 0.221 \cdot 10^{-4}\tau^8 \mp 0.530 \cdot 10^{-6}\tau^{10} \mp \dots \quad (5.18)$$

Графики, соответствующие формулам (5.13), (5.15) и (5.18), приведенные на фиг. 4, определяют мощность, потребляемую пластиной, и дают представление о возможностях различных упрощенных уравнений при малых τ .

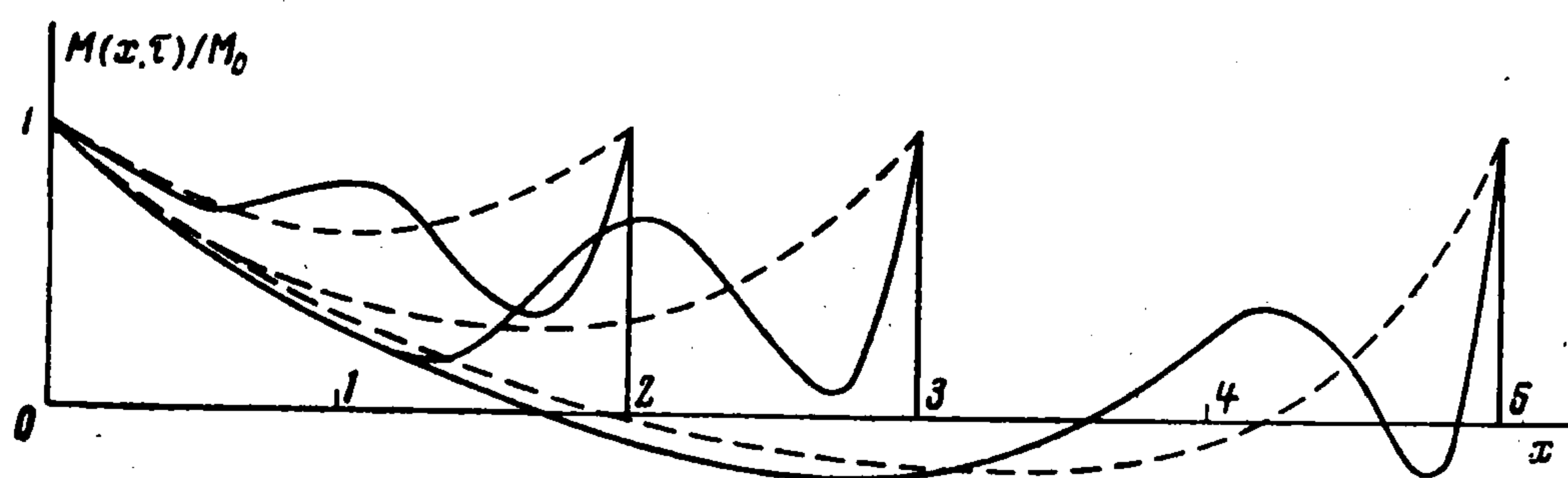
Зависимость между продольной силой и средней по сечению скоростью вначале соответствует одномерной деформации, а затем плоскому напряженному состоянию ($\sigma_{zz} = 0$). Переход этот сопровождается колебаниями относительно асимптотического ($\tau \rightarrow \infty$) значения. Уравнения (3.2) удовлетворительно описывают указанный процесс. Уравнения второго порядка (5.12) и (5.14) определяют начальную зависимость (первое) и асимптотику (второе).

Исследование задачи об изгибных деформациях затруднено тем, что учет смещений, соответствующих самоуравновешенным напряжениям, требует решения уравнений не ниже шестого порядка (тогда как в предыдущем случае второму приближению соответствовали уравнения четвертого порядка).

Полученные выше выводы о характере распространения напряжений σ_{xx} , симметричных относительно срединной плоскости пластины, будут во многих отношениях справедливы и для случая распространения изгибных напряжений.

Здесь, однако, имеется существенная особенность, заключающаяся в том, что при распространении изгибающего момента зона, содержащая некоторую фиксированную (близкую к полной, но не полную) долю всей энергии, расширяется не равномерно, как в предыдущем случае, а с замедлением (при $\tau \rightarrow \infty$ пропорционально $\sqrt{\tau}$). В связи с этим деформации в промежутке между фронтом $x = \tau$ и указанной зоной убывают. Представляет интерес выяснить, каким образом в этих условиях происходит перестройка волны (образование квазифронта), и оценить тем самым смысл скорости c_3 в случае изгибных деформаций.

§ 6. Исследование уравнений динамического изгиба. Воспользуемся тем обстоятельством, что как при малых τ , так и в достаточно большой окрестности фронта при τ больших среднее смещение $0.5 w_0$ не оказывает решающего влияния на величину изгибающего момента.



Фиг. 5

Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить фиг. 5 (пунктир), где представлено распределение изгибающего момента $M^* = M(x/\tau)/M_0$ для $0.5 \leq \tau \leq 5$ (сплошными линиями с учетом u_1 и w_2 , а пунктиром — при $w_2 \equiv 0$), с фиг. 6 статьи [17]. Сохраним в системе (2.7) величины u_1 и w_2 (второе приближение при $w_0 = 0$) и положим

$$q_x = 3M_0 z \delta_1(x) \delta_0(\tau) \quad (q_z = 0) \quad (6.1)$$

При этом

$$q_{x1} = 2M_0 \delta_1(x) \delta_0(\tau) \quad (q_{z2} = 0)$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned} u_1'' - u_1'' - 3C_{21}^2 u_1 + 5(1 - 2C_{21}^2) w_2' &= -2M_0 \delta_1(x) \delta_0(\tau) \quad (6.2) \\ -3(1 - 2C_{21}^2) u_1' + C_{21}^2 w_2'' - w_2'' - 15w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Проведя выкладки, аналогичные описанным в § 3, получим следующее решение уравнений (6.2) в форме ряда с переменным интервалом разложения. Изгибающий момент

$$\begin{aligned} M(x, \tau) &= \sigma_{xx1} = u_1' + 5(1 - 2C_{21}^2) w_2 = \quad (0 < x < \tau) \\ &= M_0 + 2M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \frac{q}{p_1^2 - p_2^2} \left[\cos p_2 \tau - \cos p_1 \tau + (C_{21}^2 q^2 + 60C_{21}^2 (1 - C_{21}^2)) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{1 - \cos p_i \tau}{p_i^2} \right] - \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \right\} \sin qx \quad \left(q = \frac{n\pi}{\tau} \right) \quad (6.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} [(1 + C_{21}^2) q^2 + 15 + 3C_{21}^2] \pm \left\{ \frac{1}{4} [(1 + C_{21}^2) q^2 + 15 + 3C_{21}^2]^2 - \right. \\ &\quad \left. - C_{21}^2 q^4 - [3C_{21}^4 + 60C_{21}^2 (1 - C_{21}^2)] q^2 - 45C_{21}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Графики, построенные в соответствии с (6.3), показаны на фиг. 5.

Там же для сравнения приводятся графики $M^*(x, \tau)$, соответствующие первому приближению (также при $w_0 \equiv 0$). В этом случае, полагая в первом из уравнений (6.2) величину $w_0 \equiv 0$, получаем

$$u_1'' - u_1'' - 3C_{21}^2 u_1 = -2M_0 \delta_1(x) \delta_0(\tau) \quad (6.4)$$

Отсюда при помощи интегральных преобразований можно найти (так же, как (4.3))

$$M(x, \tau) = u_1' = M_0 \sqrt{3} C_{21} x \int_x^\tau (\tau^2 - x^2)^{-1/2} J_1 \left(C_{21} \sqrt{3} (\tau^2 - x^2) \right) d\tau \quad (6.5)$$

в форме ряда

$$M(x, \tau) = M_0 + 2M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{q}{\tau} \frac{1 - \cos \tau \sqrt{q^2 + 3C_{21}^2}}{q^2 + 3C_{21}^2} - \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \right\} \sin qx \quad (6.6)$$

$(0 < x < \tau, q\tau = n\pi)$

Как видно на фиг. 5, при изгибных деформациях также образуется квазифронт. Однако вследствие причин, указанных выше, величина изгибающего момента в районе квазифронта с течением времени убывает.

Точный анализ возможностей приближенных уравнений при малых τ может быть произведен сравнением динамических податливостей, определяемых приближенными уравнениями и теорией упругости, так же, как это было сделано в § 5 для случая безызгибной деформации пластины.

Найдем динамическую податливость (средний угол поворота $\varphi = 3/2 u_1$) бесконечной пластины на действие изгибающего момента. Заменяем в первом уравнении системы (5.1) правую часть на $-(3/p) M_0 z$.

Тогда

$$M_0^{-1} \frac{3}{2} u_1^L = M_0^{-1} \varphi^L = \frac{3}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{9}{\pi} (C_{12}^2 - 2) \frac{1}{p} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q^2}{n_1^2} \left[(q^2 + n_2^2) \left(\operatorname{ch} n_1 \operatorname{ch} n_2 - \operatorname{ch} n_2 \frac{\operatorname{sh} n_1}{n_1} \right) - 2 \left(q^2 - \frac{c_1^2}{c_1^2 - 2c_2^2} p^2 \right) \times \right. \right.$$

$$\times \left. \left(\operatorname{ch} n_1 \frac{\operatorname{sh} n_2}{n_2} - \frac{\operatorname{sh} n_1 \operatorname{sh} n_2}{n_1 n_2} \right) \right] + \frac{1}{n_2^2} \left(q^2 - \frac{c_1^2}{c_1^2 - 2c_2^2} p^2 \right) (q^2 + n_2^2) \times$$

$$\times \left. \left(\frac{\operatorname{sh} n_1}{n_1} \operatorname{ch} n_2 - \frac{\operatorname{sh} n_1 \operatorname{sh} n_2}{n_1 n_2} \right) - 2q^2 \left(\operatorname{ch} n_1 \operatorname{ch} n_2 - \operatorname{ch} n_1 \frac{\operatorname{sh} n_2}{n_2} \right) \right\} \frac{dq}{B^*(p^2, q^2)} \quad (6.7)$$

$$(B^*(p^2, q^2) = (q^2 + n_2^2)^2 n_1 \operatorname{sh} n_1 \operatorname{ch} n_2 - 4q^2 n_1^2 n_2 \operatorname{ch} n_1 \operatorname{sh} n_2) \quad (6.8)$$

Поступая так же, как и в предыдущем случае, получим, что

$$M_0^{-1} \varphi^* = 3/2 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 \quad \text{для } \tau < 2 \quad (6.9)$$

$$a_1 = \frac{9}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1.96q^2 dq}{(q^2 + 1)^{3/2} F(q^2)} = 0.255, \quad a_3 = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(3.4 - 1.4q^2)^2 dq}{(q^2 + 3.4)^{3/2} (q^2 + 1)^2 F(q^2)} = 0.0365$$

$$a_2 = \frac{9}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{6.76q^2 + 3.4}{(q^2 + 1)^2 (q^2 + 3.4)} - \frac{4.8}{(q^2 + 1)^{3/2} \sqrt{q^2 + 3.4}} \right) \frac{q^2 dq}{F(q^2)} = -0.383 \quad (6.10)$$

$$(F(q^2) = (2q^2 + 3.4)^2 - 4q^2 \sqrt{q^2 + 1} \sqrt{q^2 + 3.4})$$

График угловой скорости φ^* (6.9) представлен на фиг. 6. (кривая 1), где на оси ординат отложена величина $^{2/3} \varphi^* M_0^{-1}$.

Выясним теперь, какова динамическая податливость моделей пластины, описываемых упрощенными уравнениями.

(1) Уравнения изгибных деформаций, учитывающие w_0 , u_1 . Основной оператор (2.11)

$$C_{21}^2 w_0'' - w_0'' + 3C_{21}^2 u_1' = -q_{z0} = 0 \quad (6.11)$$

$$-C_{21}^2 w_0' + u_1'' - u_1'' - 3C_{21}^2 u_1 = -q_{x1} = -2M_0 \delta_1(x) \delta_0(\tau)$$

После применения преобразования Лапласа для $x = 0$ получаем

$$\frac{\varphi^L}{M_0} = \frac{3}{2} \frac{u_1^L}{M_0} = \frac{3}{2} \frac{1}{p} \frac{m_1 m_2 + C_{12}^2 p^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \quad (6.12)$$

$$(m_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(C_{12}^2 p^2 \pm \sqrt{1/4 (C_{12}^2 - 1)^2 p^4 - 3p^2})$$

Разложение (6.12) по отрицательным степеням p в окрестности бесконечно удаленной точки следующее: (6.13)

$$M_0^{-1} p^2 \varphi^L = \frac{3}{2} - 0.658\alpha + 0.492\alpha^2 - 0.410\alpha^3 + 0.359\alpha^4 - 0.323\alpha^5 + \dots$$

$$(\alpha = 0.882 p^{-2})$$

Отсюда

$$M_0^{-1} \varphi^* = \frac{3}{2} - 0.329\tau^2 + 0.0205\tau^4 - 0.569 \cdot 10^{-3}\tau^6 +$$

$$+ 0.889 \cdot 10^{-5}\tau^8 - 0.890 \cdot 10^{-7}\tau^{10} + \dots (\tau > 0) \quad (6.14)$$

(2) Уравнения С. П. Тимошенко (2.19). Заметим, что после подстановки

$$\tau = (1.2)^{1/2} \tau_*$$

и домножения правых частей на коэффициент 1.2 уравнения (6.11) практически не отличаются от уравнений С. П. Тимошенко (2.19). Следовательно, уравнения С. П. Тимошенко определяют угловую скорость

$$\varphi_*^* = \sqrt{1.2} \varphi^* (\tau / \sqrt{1.2}) \quad (6.15)$$

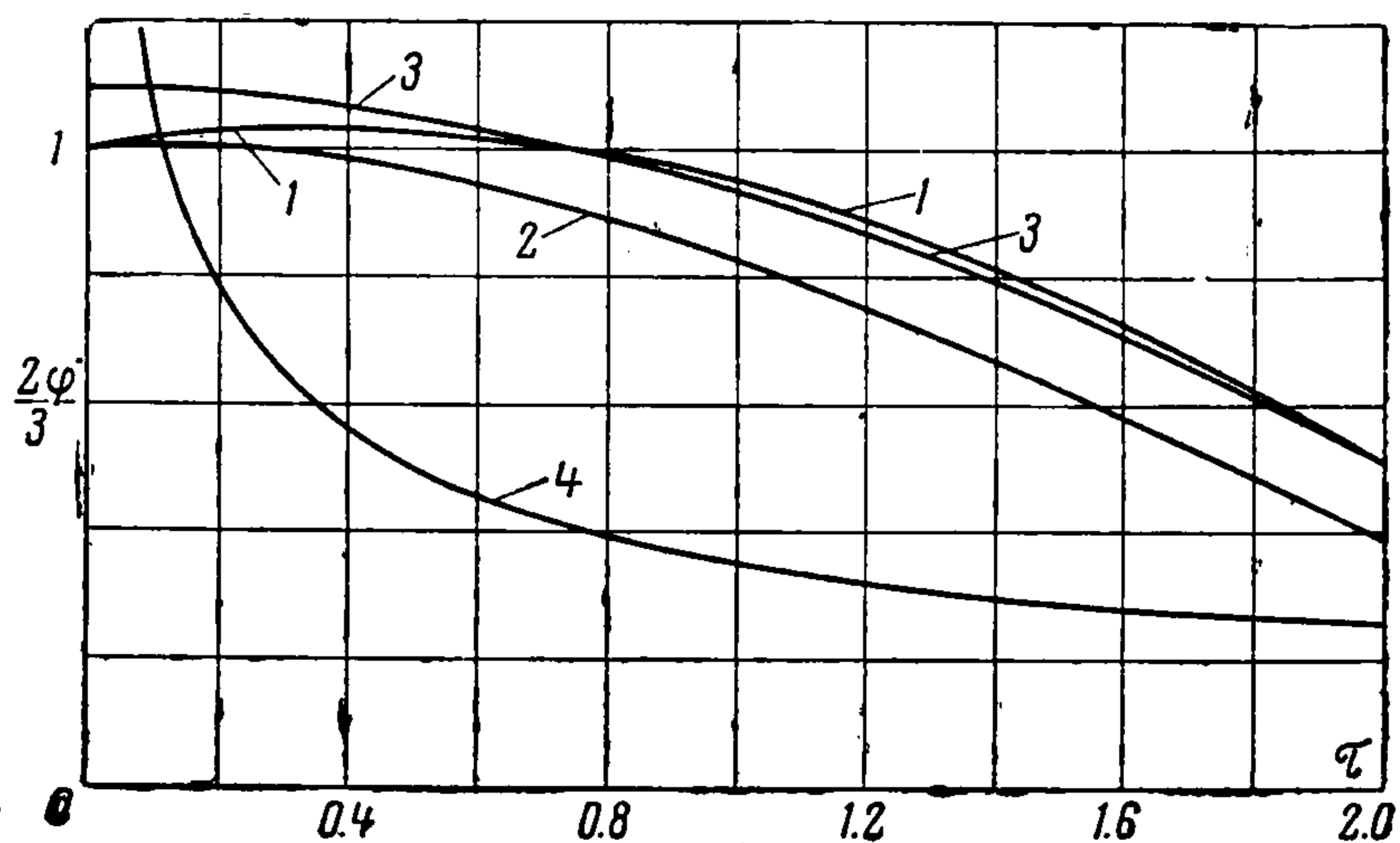
Здесь φ^* (τ) определяется выражением (6.14).

(3) Уравнение Бернулли — Эйлера. Это уравнение отличается от уравнения Тимошенко пренебрежением: продольной инерцией ($u_1'' \equiv 0$), искривлением сечения ($u_3 \equiv 0$) и сдвигом ($3u_1 = -w_0'$, но $\sigma_{xz0} \neq 0!$)

$$\frac{1}{3} C_{31}^2 w_0'''' + w_0'' = q_{z0} + q_{x1}' \quad (6.16)$$

Отсюда при $q_{z0} = 0$, $q_{x1} = 2M_0 \delta_1(x) \delta_0(\tau)$

$$\varphi^L = \frac{1}{2} w_0'^L(0, p) = M_0 \frac{0.930}{p^{3/2}}, \quad \varphi^* = M_0 \frac{0.525}{\sqrt{\tau}} \quad (6.17)$$



Фиг. 6

Графики, построенные в соответствии с формулами (6.14), (6.15), (6.17), показаны на фиг. 6 (кривые 2, 3, 4 соответственно).

Деформации $\partial w/\partial z$ увеличивают динамическую податливость и в случае воздействия изгибающего момента. Вследствие этого уравнения (6.11), не учитывающие составляющих w_n при $n > 0$, определяют точный результат лишь в самом начале процесса, а затем дают некоторую погрешность.

Результат, соответствующий уравнениям С. П. Тимошенко, в самом начале отличается от точного на 10%, но затем весьма быстро (в течение времени распространения волны расширения на четверть толщины пластины) сближается с результатом теории упругости. По-видимому, уравнения шестого порядка¹, учитывающие составляющие w_0 , u_1 , w_2 и асимптотическое значение (так же, как уравнения С. П. Тимошенко) составляющей u_3 , определяют практически точную угловую скорость при всех τ .

Уравнение Бернулли — Эйлера при малых τ (в диапазоне представления графиков) не пригодно.

Полученные результаты позволяют высказать следующие положения.

1. Принцип Сен-Венана² применим при рассмотрении переходных процессов в динамике стержней, поскольку деформации, соответствующие внезапно прилаживаемым к стержню самоуравновешенным по его сечениям нагрузкам, локализируются вблизи волновых фронтов и того сечения, где приложено возмущение.

2. Это утверждение не распространяется на самоуравновешенные возмущения с непрерывным притоком энергии к стержню (например, на периодические возмущения).

3. Обобщение (в указанном выше смысле) принципа Сен-Венана на динамику стержней обеспечивает возможность исследования не только медленных, но и резко изменяющихся переходных процессов при помощи уравнений продольных и изгибных колебаний (2.16) и (2.17). Основания здесь примерно такие же, какие позволяют применять элементарную теорию статики балок и пластин при расчете их на сосредоточенные нагрузки. Получающиеся при этом решения дают правильное представление о распространении энергии вдоль стержня и об изменении несамоуравновешенных по сечению напряжений.

4. Постоянная c_3 в (2.16) определяет скорость распространения волнового фронта при продольном возмущении стержня. По существу же она является скоростью распространения квазифронта. Деформациями в области между квазифронтом и истинным фронтом в приближенном уравнении (2.16) пренебрегают.

Постоянные v_1 , v_2 в (0.2) определяют скорости распространения разрывов при изгибном возмущении стержня. Однако v_1 , v_2 , не совпадая с истинными скоростями распространения разрывов c_1 , c_2 , могут быть истолкованы как скорости распространения квазифронтов только в самый первый период движения ($\tau < 5 - 7$). Далее квазифронты, по существу, исчезают, после чего оказывается невозможно связать с v_1 , v_2 распространение каких-либо характерных для изгибной деформации особенностей. Поэтому v_1 , v_2 , быть может, правильнее всего толковать как скорости c_1 , c_2 , искаженные за счет приближенности тех рассуждений, при помощи которых выводится (0.2). Любопытно, однако, что хотя при отождествлении v_1 , v_2 с c_1 , c_2 достигается правильность в описании распространения разрывов, но при этом получается худшая точность в отношении описания общей картины деформации стержней и, в частности, при определении его динамической податливости (§ 6), чем если определять v_1 , v_2 согласно, например, рекомендации С. П. Тимошенко.

¹ Для задачи о смещении под действием поперечной силы лучшими уравнениями шестого порядка будут те, которые учитывают составляющие w_0 , u_1 , u_3 и асимптотическое значение составляющей w_2 .

5. Хотя уравнения (2.16), (2.17) не дают скачка напряжений в районах истинных фронтов, это не приводит к существенной погрешности. Дело в том, что пик напряжений в районе фронта быстро сужается, и, как следствие этого, в реальных случаях, когда нагрузка прикладывается не мгновенно, величина напряжений в районе фронта будет убывать. Анализ влияния скорости нагружения на величину напряжений во фронте проведен на модели, представляющей собой две параллельные балки, соединенные упругой связью [18].

Наряду с уравнением (0.2), (2.17) при рассмотрении переходных процессов динамики стержней можно пользоваться и уравнением Бернулли — Эйлера (0.1), что дает близкие к решению (0.2) результаты [19], уже начиная с $\tau = 7 - 10$. То обстоятельство, что скорости распространения разрывов, согласно (0.1), оказываются бесконечно большими, не оказывает существенного количественного влияния на деформацию нейтральной оси и на картину распространения энергии вдоль стержня.

Преимуществом «волнового» уравнения (0.2) перед «неволновым» (0.1) является возможность осветить картину деформации стержня при $\tau < 7$, причем, как видно из § 6, правильная оценка динамической податливости получается вплоть до $\tau = 0$.

Поступила 17 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. У ф л я н д Я. С. О распространении волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.
2. У т е ш е в а В. И. Приближенные уравнения динамики упругого стержня кругового поперечного сечения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 4.
3. П е т р а ш е н ь Г. И. К теории колебаний тонких пластин. Уч. зап. ЛГУ, 1951, № 149 (серия матем. наук, вып. 24).
4. Н и г у л У. К. Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. Э й б р а м с о н Х. Н., П л а с с Х. Дж., Р и п п е р г е р Э. А. Распространение волн напряжений в стержнях и балках. Сб. «Проблемы механики», вып. 3, Изд. иностр. лит., 1961.
6. R i p p e r g e r E. A., A b r a m s o n H. N. A Study of the propagation of flexural waves in elastic beams. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 3.
7. M i n d l i n R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic plates. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, No. 1.
8. A b r a m s o n H. N. The propagation of flexural elastic waves in solid circular cylinders. J. Acoust. Soc. Amer., 1957, No. 29.
9. Д е й в и с Р. М. Волны напряжений в твердых телах. Изд. иностр. лит., 1961.
10. M i n d l i n R. D., M e d i k M. A. Extensional vibrations of elastic plates. J. Appl. Mech., Trans. of the ASME, Series E, 1959, vol. 26, No. 4.
11. В е к у а И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, т. 21.
12. Т и м о ш е н к о С. П. Теория колебаний в инженерном деле. Гостехиздат, 1932.
13. К р а т ц е р А., Ф р а н ц В. Трансцендентные функции. Изд. иностр. лит., 1963.
14. J o n e s O. E., E l l i s A. T. Longitudinal Strain Pulse Propagation in Wide Rectangular Bars. Part 1 and 2. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, № 1 (русск. перевод: ж. Прикладная механика, Изд. иностр. лит.).
15. B r o b e r g K. V. A problem on stress waves in an infinite elastic plate. Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, 1959, No. 139.
16. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. Успехи матем. н., 1960, т. 15, вып. 4.
17. F l ü g g e W., Z a j a c E. E. Bending impact waves in beams. Ing.-Arch., 1959, Bd. 28.
18. B o l e y B. A. On a dynamical Saint Venant principle. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 1.
19. B o l e y B. A., C h i - c h a n g C h a o. Some solutions of Timoshenko beam equations. J. Appl. Mech. 1955, vol. 22, No. 4.
20. C a g n i a r d L. Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Gauthier-Villars, Paris, 1939.