Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК СИСТЕМЫ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ДЛЯ КЕПЛЕРОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ОБЪЕКТА

В. Д. Андреев

(Москва)

Система инерциальной навигации определяет местоположение и ориентацию движущегося объекта по показаниям ньютонометров, гироскопических измерителей абсолютной угловой скорости и заданным начальным условиям [1,2].

Если элементы инерциальной системы имеют инструментальные погрешности, а начальные условия заданы не точно, то координаты и ориентация объекта будут определяться с ошибками. Зависимость этих ошибок от погрешностей элементов и начальных условий характеризуется уравнениями ошибок [2], включающими в себя две группы дифференциальных уравнений и несколько алгебраических соотношений.

Ниже проводится интегрирование уравнений ошибок для кеплеровых движений объекта.

1. Введем правую ортогональную систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, начало которой совместим с центром Земли, а ориентацию осей примем неизменной по отношению к направлениям из центра Земли на удаленные звезды.

Уравнения ошибок системы инерциальной навигации в этой системе координат имеют вид [2]

$$\frac{d^2\delta\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{\mu\delta\mathbf{r}}{r^3}-\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}\frac{3\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r}}{r^2}=\Delta\mathbf{n}-2\Delta\mathbf{m}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\times\frac{d\Delta\mathbf{m}}{dt} \tag{1.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}_1}{dt}=\Delta\mathbf{m},\qquad \delta\mathbf{r}_1=\boldsymbol{\theta}_1\times\mathbf{r},\qquad \delta\mathbf{r}_2=\delta\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}_1$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O объекта, в которой расположены чувствительные массы ньютонометров инерциальной системы, имеющий начало в центре Земли O_1, $\delta\mathbf{r}$ — его вариация, μ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, $\boldsymbol{\theta}_1$ — ошибка ориентации гироскопической платформы инерциальной системы, $\Delta\mathbf{n}$, $\Delta\mathbf{m}$ — инструментальные погрешности ньютонометров и измерителей абсолютной угловой скорости, $\delta\mathbf{r}_2$ — суммарная ошибка определения инерциальной системой координат объекта.

Если считать, что точка O является центром масс объекта, то ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, входящий в уравнения (1.1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}=0 \tag{1.2}$$

Основную трудность при интегрировании системы (1.1) представляет первое уравнение. Для кеплеровых движений объекта соответствующее ему однородное уравнение преобразуется к виду

$$\delta\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}\right)=0 \tag{1.3}$$

т. е. оказывается уравнением в вариациях уравнения (1.2) кеплерова движения. Общий интеграл уравнения (1.2), содержащий шесть произвольных постоянных, известен. На основании известной теоремы Пуанкаре [3], частными решениями однородного уравнения (1.1) будут производные общего интеграла уравнения (1.2) по произвольным постоянным, что и дает возможность проинтегрировать первое уравнение (1.1). Этим путем А. И. Лурье проинтегрировано векторное уравнение свободного падения материальной точки в кабине спутника [4], которое лишь правой частью отличается от первого уравнения (1.1).

Свяжем с плоскостью орбиты объекта трехгранник $O_1\xi'\eta'\zeta'$, совместив с ней плоскость $O_1\xi'\eta'$ этого трехгранника. Ось $O_1\zeta'$ направим по нормали к плоскости орбиты так, чтобы движение объекта, если смотреть с конца этой оси, происходило против часовой стрелки. Кеплерово движение объекта (эллиптическое) в плоскости орбиты определяется формулами [5]

$$M = \nu (t - t_0) + M_0, \quad \nu = \mu^{1/2} a^{-3/2}, \quad E - e \sin E = M$$

$$r = a (1 - e \cos M), \quad \operatorname{tg} {}^1/_2 v = \sqrt{(1 + e) / (1 - e)} \operatorname{tg} {}^1/_2 E, \quad \sigma = v + \omega \tag{1.4}$$

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k (ke)}{k} \sin kM$$

Здесь a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты, M, E, v — средняя, эксцентрическая и истинная аномалии, ν — средняя частота обращения на орбите, σ — угол между осью ξ' и радиусом-вектором $\mathbf{r}$, ω — угол между осью ξ' и направлением в перигей, t_0 — время прохождения через перигей, J_k — функции Бесселя.

Формулы (1.4) зависят от четырех произвольных постоянных: t_0, e, a, ω. Две недостающие постоянные должны содержаться в определении положения плоскости орбиты по отношению к системе координат $O_1\xi\eta\zeta$.

Расположение трехгранников $O_1\xi\eta\zeta$, $O_1\xi'\eta'\zeta'$ дается таблицей направляющих косинусов

	ξ'	η'	ζ'
ξ	$\cos\beta$	0	$\sin\beta$
η	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha\cos\beta$
ζ	$-\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha\cos\beta$

(1.5)

Теперь

$$\mathbf{r} = \xi\boldsymbol{\xi} + \eta\boldsymbol{\eta} + \zeta\boldsymbol{\zeta}$$

$$\xi = r \cos\sigma \cos\beta, \quad \eta = r (\cos\sigma \sin\alpha \sin\beta + \sin\sigma \cos\alpha) \tag{1.6}$$

$$\zeta = r (-\cos\sigma \cos\alpha \sin\beta + \sin\sigma \sin\alpha)$$

где $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ — орты соответствующих осей.

Формулы (1.4), (1.6) дают общий интеграл уравнения (1.2), зависящий от произвольных постоянных t_0, e, a, ω, α, β. Не уменьшая общности, можно принять

$$t_0 = 0, \qquad \alpha = \beta = 0, \qquad \omega = \sigma(0) = 0 \tag{1.7}$$

что упростит дальнейшие записи.

Образуем следующие линейные комбинации [4] производных радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определенного равенствами (1.4), (1.6), по произвольным постоянным:

$$\begin{gathered} \mathbf{q}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e}, \quad \mathbf{q}_3 = -\frac{1}{ae(1-e^2)}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{aev}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_0} \\ \mathbf{q}_4 = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}, \qquad \mathbf{q}_5 = -\frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \qquad \mathbf{q}_6 = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Обозначим через $\mathbf{p}_i$ полные производные векторов $\mathbf{q}_i$ по времени. Векторы $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{p}_i$ составляют, очевидно, систему частных решений уравнения (1.2).

Спроектировав векторы $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{p}_i$ на оси xyz орбитального трехгранника, ось z которого направлена вдоль $\boldsymbol{r}$, а ось y совмещена с $O_1\zeta'$, образуем из этих проекций матрицы A и B. Элементами матриц A и B будут

$$\begin{gathered} A_{1i} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x}, \qquad A_{2i} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{z}, \qquad A_{3i} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}, \qquad A_{4i} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{z} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\ B_{1i} = \mathbf{q}_{i+4} \cdot \mathbf{y}, \qquad B_{2i} = \mathbf{p}_{i+4} \cdot \mathbf{y} \qquad (i = 1, 2) \end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — орты соответствующих осей.

При вычислении элементов матриц A и B следует принять во внимание равенства

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\omega_y \mathbf{z}, \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \omega_y \mathbf{x} \\ \omega_y = v^{\bullet} = \nu\sqrt{1-e^2}\,\frac{a^2}{r^2}, \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\nu e a \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \end{gathered} \tag{1.10}$$

Спроектировав уравнение (1.1) на оси орбитального трехгранника, приходим к двум системам скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} x_1^{\bullet} = -\omega_y x_2 + x_3, \qquad x_2^{\bullet} = \omega_y x_1 + x_4 \qquad (x_1 = \delta x,\ x_2 = \delta y) \\ x_3^{\bullet} = -\omega_y x_4 - \mu x_1 / r^3 + \Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r \\ x_4^{\bullet} = \omega_y x_3 + 2\mu x_2 / r^3 + \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$x_5^{\bullet} = x_6, \ x_6^{\bullet} = -\mu x_5 / r^3 + \Delta n_y + 2\Delta m_x r^{\bullet} + \Delta m_x^{\bullet} r - \omega_y \Delta m_z r \qquad (x_5 = \delta z) \tag{1.12}$$

Элементы матриц A и B образуют системы линейно независимых частных решений однородных систем (1.11), (1.12), так как определители матриц A и B являются определителями Вронского этих решений [4] и отличны от нуля

$$|A| = -\nu^2 / 2, \ |B| = \nu\sqrt{1-e^2}$$

Общее решение однородных систем (1.12), (1.13) может быть представлено теперь в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{4} A_{ij} C_j \quad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad x_i = \sum_{j=1}^{2} B_{ij} C_{4+j} \quad (i = 5, 6) \tag{1.13}$$

После этого решение неоднородного уравнения получается методом вариаций произвольных постоянных. Вводя матрицы $D = A^{-1}$, $G = B^{-1}$ и переходя от x_1, x_2, x_5 снова к δx, δy, δz, приходим к следующим выражениям для проекций δx, δy, δz вектора $\delta \mathbf{r}$ на оси орбитального триэдра:

$$\delta x = \sum_{i=1}^{4} A_{1i} \left[\int_0^t [(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^\bullet - \Delta m_y{}^\bullet r) D_{i3} + (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) D_{i4}]\, dt + \sum_{j=1}^{4} D_{ij}{}^\circ x_j{}^\circ\right] \qquad (1.14)$$

$$\delta z = \sum_{i=1}^{4} A_{2i} \left[\int_0^t [(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^\bullet - \Delta m_y{}^\bullet r) D_{i3} + (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) D_{i4}]\, dt + \sum_{j=1}^{4} D_{ij}{}^\circ x_j{}^\circ\right]$$

$$\delta y = \sum_{i=1}^{2} B_{1i} \left[\int_0^t (\Delta n_y + 2\Delta m_x r^\bullet + \Delta m_x{}^\bullet r - \omega_y \Delta m_z r) G_{i2} dt + \sum_{j=1}^{2} G_{ij}{}^\circ \overset{\circ}{x}_{j+4}\right]$$

Входящие в (1.14) элементы матриц A, B и D, G вычислены в работе [4]. С учетом (1.7) они имеют вид (1.15)

$$A_{11} = \frac{-3\nu t\,(1+e\cos v)}{2\sqrt{1-e^2}}, \qquad A_{12} = \frac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\sin v$$

$$A_{13} = \frac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\cos v, \qquad A_{14} = \frac{r}{a}$$

$$A_{21} = \frac{r}{a} - \frac{3\nu t e \sin v}{2\sqrt{1-e^2}}, \qquad A_{22} = -\cos v, \qquad A_{23} = \sin v, \qquad A_{24} = 0$$

$$B_{11} = \frac{r}{a}\cos v, \qquad B_{12} = \frac{r}{a}\sin v$$

$$D_{13} = \frac{2(1+e\cos v)}{\nu\sqrt{1-e^2}}, \qquad D_{23} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\nu}\,\frac{e+2\cos v+e\cos^2 v}{1+e\cos v}$$

$$D_{33} = \frac{1}{\nu}\left[-\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos v}(2+e\cos v)\sin v + \frac{3\nu t}{1-e^2}(1+e\cos v)\, e\right]$$

$$D_{43} = \frac{1}{\nu}\left[-e\sin v\,\frac{2+e\cos v}{\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos v)} + \frac{3\nu t}{(1-e^2)^2}(1+e\cos v)\right]$$

$$D_{14} = \frac{2e\sin v}{\nu\sqrt{1-e^2}}, \qquad D_{24} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\nu}\sin v$$

$$D_{34} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{3\nu t}{1-e^2}e^2\sin v - \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos v}(2e-\cos v - e\cos v)\right]$$

$$D_{44} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{3\nu t}{(1-e^2)^2}e\sin v + \frac{e\cos v + e^2\cos^2 v - 2}{\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos v)}\right]$$

$$G_{12} = -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{\nu(1+e\cos v)}, \qquad G_{22} = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos v}{\nu(1+e\cos v)}$$

Для C_i°, C_4° получаются выражения

$$C_i^\circ = \sum_{j=1}^{4} D_{ij}^\circ x_j^\circ, \qquad C_{i+4}^\circ = \sum_{j=1}^{2} G_{ij}^\circ x^\circ{}_{i+4} \tag{1.16}$$

Значения D_{i3}°, D_{i4}°, G_{12}°, G_{22}° находятся из (1.15), если в последних положить $t = 0$, $v = 0$. Величины D_{i1}°, D_{i2}°, G_{i1}° равны [4]

$$D_{11}^\circ = D_{21}^\circ = 0, \qquad D_{31}^\circ = 1, \qquad D_{41}^\circ = -(1-e^2)^{-1/2}$$

$$D_{12}^\circ = 2/(1-e^2), \qquad D_{22}^\circ = (1+e)/(1-e), \qquad D_{32}^\circ = D_{42}^\circ = 0$$

$$G_{11}^\circ = 1/(1+e), \qquad G_{21}^\circ = 0 \tag{1.17}$$

В (1.16), в соответствии с (1.11), (1.12), (1.10),

$$x_1^\circ = \delta x^\circ, \qquad x_2^\circ = \delta z^\circ, \qquad x_3^\circ = \delta x^{\circ\bullet} + \nu(1-e^2)^{-1/2}\delta z^\circ$$

$$x_4^\circ = \delta z^{\circ\bullet} - \nu(1-e^2)^{-1/2}\,\delta x^\circ, \qquad x_5^\circ = \delta y^\circ, \qquad x_6^\circ = \delta y^{\circ\bullet} \tag{1.18}$$

где δx°, δy°, δz°, $\delta x^{\circ\bullet}$, $\delta y^{\circ\bullet}$, $\delta z^{\circ\bullet}$ — начальные значения перечисленных переменных.

При $e = 0$, т. е. для круговой орбиты,

$$r = a, \qquad r^\bullet = 0, \qquad \nu = \omega_0, \qquad v = \omega_0 t, \qquad \omega_y = \omega_0, \qquad \omega_y^\bullet = 0$$

и формулы (1.14) переходят в полученные в работе [6].

2. Решение второго уравнения (1.1) очевидно

$$\theta_1 = \int_0^t \Delta\mathrm{m}\,dt + \theta_1^\circ \tag{2.1}$$

В проекциях на оси xyz оно принимает вид [7]

$$\theta_{1x} = -\sin\sigma\left[\int_0^t(-\Delta m_x\sin\sigma + \Delta m_z\cos\sigma)\,dt + \theta_{1z}^\circ\right] + \\ + \cos\sigma\left[\int_0^t(\Delta m_x\cos\sigma + \Delta m_z\sin\sigma)\,dt + \theta_{1x}^\circ\right]$$

$$\theta_{1y} = \int_0^t \Delta m_y dt + \theta_{1y}^\circ \tag{2.2}$$

$$\theta_{1z} = \cos\sigma\left[\int_0^t(-\Delta m_x\sin\sigma + \Delta m_z\cos\sigma)\,dt + \theta_{1z}^\circ\right] + \\ + \sin\sigma\left[\int_0^t(\Delta m_x\cos\sigma + \Delta m_z\sin\sigma)\,dt + \theta_{1x}^\circ\right]$$

Формулы (2.2) определяют ошибки ориентации относительно трехгранника $\xi\eta\zeta$. Ошибки ориентации относительно орбитального трехгранника находятся из равенств

$$\theta_x = r^{-1}\delta y, \qquad \theta_y = -r^{-1}\delta x, \qquad \theta_z = \theta_{1z} \tag{2.3}$$

где δx и δy заданы (1.14).

3. В пп. 1,2 получены решения для δx, δy, δz, θ_{1x}, θ_{1y}, θ_{1z} в квадратурах. Для орбит малого эксцентриситета и при постоянных Δn_x, Δn_y, Δn_z, Δm_x, Δm_y, Δm_z можно легко получить первые члены разложений решений первого и второго уравнений (1.1) по степеням эксцентриситета e.

Из последнего равенства (1.4) с точностью до членов первой степени e

$$\sin E = \sin \nu t\,(1 + e\cos \nu t), \qquad \cos E = \cos \nu t - e\sin^2 \nu t \tag{3.1}$$

а из пятого и шестого равенств (1.10) с учетом (1.7) (3.2)

$$r = a\,(1 - e\cos \nu t), \qquad \omega_y = \nu\,(1 + 2e\cos \nu t), \qquad \sigma = v = \nu t + 2e\sin \nu t$$

$$\sin \sigma = \sin v = \sin \nu t + e\sin 2\nu t, \qquad \cos \sigma = \cos v = \cos \nu t - 2e\sin^2 \nu t$$

Используя (3.1), (3.2), приходим к таким выражениям для элементов первых двух строк матрицы A и двух последних столбцов матрицы D:

$$\begin{aligned}
&A_{11} = -{}^3/_2\nu t\,(1 + e\cos \nu t), \qquad A_{12} = 2\sin \nu t + {}^3/_2 e\sin 2\nu t\\
&A_{13} = 2\cos \nu t - e\,(1 + 3\sin^2 \nu t), \qquad A_{14} = 1 - e\cos \nu t\\
&A_{21} = 1 - e\,(\cos \nu t + {}^3/_2\nu t\sin \nu t), \qquad A_{22} = -\cos \nu t + 2e\sin^2 \nu t\\
&A_{23} = \sin \nu t + e\sin 2\nu t. \qquad A_{24} = 0\\
&D_{13} = 2\nu^{-1}(1 + e\cos \nu t), \qquad D_{14} = 2e\nu^{-1}\sin \nu t\\
&D_{23} = \nu^{-1}(2\cos \nu t - 3e\sin^2 \nu t), \quad D_{24} = \nu^{-1}(\sin \nu t + e\sin 2\nu t)\\
&D_{33} = \nu^{-1}[-2\sin \nu t + e\,(3\nu t - {}^3/_2\sin 2\nu t)]\\
&D_{34} = \nu^{-1}[\cos \nu t + e\,(\cos \nu t - 3 - \sin^2 \nu t)],\\
&D_{43} = \nu^{-1}[3\nu t + e\,(3\nu t\cos \nu t - 2\sin \nu t)]\\
&D_{44} = \nu^{-1}[-2 + 3e\,(\nu t\sin \nu t + \cos \nu t)]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&B_{11} = \cos \nu t - e\,(1 + \sin^2 \nu t), \qquad B_{12} = \sin \nu t + {}^1/_2\, e\sin 2\nu t\\
&G_{12} = -\nu^{-1}(\sin \nu t + {}^1/_2 e\sin 2\nu t), \qquad G_{22} = \nu^{-1}[\cos \nu t - e\,(1 + \sin^2 \nu t)]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Подставим (3.3), (3.4), (1.19) вместе с начальными значениями D_{ij}°, G_{ij}° элементов матриц D и G в формулы (1.14). При постоянных Δn_x, Δn_y, Δn_z, Δm_x, Δm_y, Δm_z после интегрирования и упрощений приходим к таким выражениям для δx, δy, δz:

$$\begin{aligned}
\delta x = {} & \delta x^\circ + \nu^{-1}\delta x^{\circ\cdot}(4\sin \nu t - 3\nu t) + 6\delta z^\circ(\sin \nu t - \nu t) + 2\nu^{-1}\delta z^{\circ\cdot}(\cos \nu t - 1) + \\
& + \nu^{-2}\Delta n_x[-{}^3/_2(\nu t)^2 + 4\,(1 - \cos \nu t)] + 4\nu^{-1}a\Delta m_y(\sin \nu t - \nu t) + 2\nu^{-2}\Delta n_z(\sin \nu t - \nu t) + \\
& + e\,[\Delta n_x\nu^{-2}(-{}^3/_2\nu^2t^2\cos \nu t - 5\nu t\sin \nu t + \cos \nu t - 1 + 6\sin^2 \nu t) + \\
& + \Delta n_z\nu^{-2}(-3\nu t - 5\nu t\cos \nu t + {}^7/_2\sin \nu t + {}^5/_2\sin 2\nu t - {}^1/_2\sin \nu t\cos 2\nu t) + \\
& + 2\Delta m_y a\nu^{-1}(-6\nu t - 6\nu t\cos \nu t + {}^{15}/_2\sin \nu t + {}^5/_2\sin 2\nu t - {}^1/_2\sin \nu t\cos 2\nu t) + \\
& + \delta x^\circ(1 - \cos \nu t) - 3\nu^{-1}\delta x^{\circ\cdot}(\nu t + \nu t\cos \nu t - \sin 2\nu t) - 3\delta z^\circ(5\nu t + 2\nu t\cos \nu t - \\
& - {}^3/_2\sin 2\nu t - 4\sin \nu t) + \nu^{-1}\delta z^{\circ\cdot}(1 + \cos^2 \nu t - 2\cos \nu t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta y = {} & \nu^{-2}(\Delta n_y - a\nu\Delta m_z)(1 - \cos \nu t) + \delta y^\circ\cos \nu t + \nu^{-1}\delta y^{\circ\cdot}\sin \nu t + \\
& + e\,[\nu^{-2}\Delta n_y(1 - \cos \nu t + \sin^2 \nu t - {}^3/_2\nu t\sin \nu t) + \nu^{-1}a\Delta m_z(\cos \nu t - 1 - \sin^2 \nu t + \\
& + \nu t\sin \nu t) + \nu^{-1}a\Delta m_x(\nu t\cos \nu t - \sin \nu t) + \delta y^\circ(\cos \nu t - 1 - \sin^2 \nu t) + \\
& + \nu^{-1}\delta y^{\circ\cdot}(-\sin \nu t + \sin \nu t\cos \nu t)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\delta z = 2\nu^{-1}(\delta x^\circ + a\Delta m_y)(1-\cos\nu t) + \delta z^\circ(4-3\cos\nu t) + \nu^{-1}\delta z^{\circ\cdot}\sin\nu t +$$
$$+ 2\nu^{-2}\Delta n_x(\nu t - \sin\nu t) + \nu^{-2}\Delta n_z(1-\cos\nu t) + e\,[\Delta n_x\nu^{-2}(-{}^3/_2\nu^2t^2\sin\nu t -$$
$$- {}^1/_2\nu t\cos\nu t + {}^9/_2\sin\nu t - 2\sin 2\nu t) + \Delta n_z\nu^{-2}(-{}^7/_2\nu t\sin\nu t + 3\sin^2\nu t -$$
$$- 2 - 2\cos\nu t - {}^1/_2\sin^2\nu t\cos\nu t) + 2a\Delta m_y\nu^{-1}(-4\nu t\sin\nu t + 4 - {}^{21}/_4\cos\nu t +$$
$$+ 3\sin^2\nu t + {}^5/_4\cos\nu t\cos 2\nu t) + 2\nu^{-1}\delta x^{\circ\cdot}(1-\cos\nu t - {}^3/_2\nu t\sin\nu t) +$$
$$+ \delta z^\circ(-6\nu t\sin\nu t + 10 - 10\cos\nu t + 6\sin^2\nu t) + \nu^{-1}\delta z^{\circ\cdot}(\sin 2\nu t - 2\sin\nu t)]$$

Аналогично, из (2.2)

$$\theta_{1x} = \theta_{1x}{}^\circ\cos\nu t - \theta_{1z}{}^\circ\sin\nu t + \nu^{-1}\Delta m_x\sin\nu t - \nu^{-1}\Delta m_z(1-\cos\nu t) +$$
$$+ e\,[-2\theta_{1x}{}^\circ\sin^2\nu t - \theta_{1z}{}^\circ\sin 2\nu t + \nu^{-1}\Delta m_x(\nu t + {}^1/_2\sin 2\nu t) - {}^1/_2\nu^{-1}\Delta m_z(1-\cos 2\nu t)]$$

$$\theta_{1y} = \theta_{1y}{}^\circ + \Delta m_y t \qquad (3.6)$$

$$\theta_{1z} = \theta_{1x}{}^\circ\sin\nu t + \theta_{1z}{}^\circ\cos\nu t + \nu^{-1}\Delta m_x(1-\cos\nu t) + \nu^{-1}\Delta m_z\sin\nu t +$$
$$+ e\,[\theta_{1x}{}^\circ\sin 2\nu t - 2\theta_{1z}{}^\circ\sin^2\nu t + {}^1/_2\nu^{-1}\Delta m_x(1-\cos 2\nu t) + \nu^{-1}\Delta m_z(\nu t + {}^1/_2\sin 2\nu t)]$$

При $e = 0$, т. е. для круговой орбиты, соотношения (3.5), (3.6) превращаются в полученные для этого случая в работе [6].

Из двух последних уравнений (1.1) находятся теперь проекции вектора δr_2 полной ошибки определения координат на оси xyz

$$\delta x_2 = \delta x + \theta_{1y}r, \qquad \delta y_2 = \delta y - \theta_{1x}r, \qquad \delta z_2 = \delta z \qquad (3.7)$$

а из (2.3) — ошибки ориентации объекта по отношению к орбитальному трехграннику.

4. Предшествующее рассмотрение относилось к автономной инерциальной системе с тремя ньютонометрами. Рассмотрим теперь случай, когда в инерциальной системе используется поступающая из стороннего источника информация о величине r расстояния объекта от центра Земли. Интересны два варианта использования этой информации [2].

В первом из них в системе сохраняются все три ньютонометра, но величина μ / r^3 в уравнениях невозмущенного функционирования формируется по r, поступающему из дополнительного источника информации. С точки зрения уравнений ошибок, этот вариант отличается от рассмотренного в пп. 1—3 тем, что изменяется первое уравнение (1.1), которое приобретает вид

$$\frac{d^2\delta\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu\delta\mathbf{r}}{r^3} = \Delta\mathbf{n} - 2\Delta\mathbf{m}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\times\frac{d\Delta\mathbf{m}}{dt} + \frac{3\mu\mathbf{r}\Delta r}{r^4} \qquad (4.1)$$

В уравнении (4.1) через Δr обозначена погрешность, с которой величина r поступает в инерциальную систему.

Во втором варианте в системе используются лишь два ньютонометра. Величина r, дополнительно поступающая в систему, служит для исключения одной из переменных уравнений невозмущенного функционирования. Если трехгранник инерциальной системы, по осям которого расположены ньютонометры, в невозмущенном положении совпадает с орбитальным трехгранником xyz, то в системе будет отсутствовать ньютонометр n_z вдоль оси z. Из трех скалярных уравнений второго порядка, соответствующих первому уравнению (1.1), останутся тогда лишь два, получающиеся проектированием на оси x и y (4.2)

$$\delta x^{\bullet\bullet} + (\mu / r^3 - \omega_y^2)\,\delta x = \Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r - \omega_y^{\bullet}\,\Delta r - 2\omega_y \Delta r^{\bullet}$$

$$\delta y^{\bullet\bullet} + (\mu / r^3)\,\delta y = \Delta n_y + 2\Delta m_x r^{\bullet} + \Delta m_x^{\bullet} r - \omega_y \Delta m_z r$$

Однородные уравнения, соответствующие (4.1), (4.2), имеют, как и уравнение (1.1), переменные коэффициенты. В то же время уравнения (4.1), (4.2) не будут, как это было с уравнением (1.1), уравнениями в вариациях кеплерова движения (1.2). Для отыскания решений уравнений (4.1), (4.2) нельзя поэтому воспользоваться теоремой Пуанкаре. Однако общее решение этих уравнений все же удается построить.

Рассмотрим уравнения (4.2). Второе уравнение совпадает с системой (1.12), и его решением будут последняя формула (1.14) и вторая формула (3.5).

Чтобы построить решение первого уравнения, заметим, что среди частных решений системы (1.11) имеется решение $\delta x = r / a$, $\delta z = 0$. Сравнивая первое уравнение (4.2) с проекцией на ось x первого уравнения (1.1), приходим к выводу, что

$$\delta x = r / a \tag{4.3}$$

будет частным решением однородного уравнения (4.2), в чем можно убедиться и прямой подстановкой.

Для отыскания второго частного решения теперь можно воспользоваться формулой Остроградского — Лиувилля, что дает

$$\delta x = \frac{r}{a} \int_0^t \frac{a^2}{r^2}\,dt \tag{4.4}$$

Из пятого равенства (1.10) имеем $a^2 / r^2 = v^{\bullet} / (\nu\sqrt{1 - e^2})$. С учетом этого равенство (4.4) принимает вид

$$\delta x = \frac{rv}{a\nu\sqrt{1-e^2}} \tag{4.5}$$

Решения (4.3), (4.5) линейно независимы. Определитель Вронского этих решений равен единице. Таким образом, общее решение однородного уравнения, соответствующего первому из уравнений (4.2), имеет вид

$$\delta x = C_1 \frac{r}{a} + C_2 \frac{rv}{a\nu\sqrt{1-e^2}} \tag{4.6}$$

Общее решение неоднородного уравнения получается теперь варьированием постоянных C_1, C_2. С учетом начальных условий (1.18) находим его в виде

$$\begin{aligned}\delta x = \frac{r}{a}\Big[-\frac{1}{a\nu\sqrt{1-e^2}}\int_0^t rv\,(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r - \omega^{\bullet}{}_y \Delta r - \\ - 2\omega_y \Delta r^{\bullet})\,dt + \frac{\delta x^{\circ}}{1-e}\Big] + \frac{rv}{a\nu\sqrt{1-e^2}}\Big[\frac{1}{a}\int_0^t r\,(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \\ - \Delta m_y^{\bullet} r - \omega_y^{\bullet}\Delta r - 2\omega_y \Delta r^{\bullet})\,dt + (1-e)\,\delta x^{\circ\bullet}\Big]\end{aligned} \tag{4.7}$$

При постоянных значениях инструментальных погрешностей для орбит малого эксцентриситета получаем из (4.7), аналогично тому, как получены формулы (3.5), приближенное равенство

$$\delta x = {}^1/_2 \Delta n_x t^2 + \delta x^\circ + \delta x^{\circ\cdot} t + e\,[\Delta n_x \nu^{-2} (-\nu^2 t^2 \cos \nu t + 2\nu t \sin \nu t + 3 \cos \nu t - 3) + 2\nu^{-1} (a \Delta m_y - \nu \Delta r)(\sin \nu t - \nu t) + \delta x^\circ (1 - \cos \nu t) + \nu^{-1} \delta x^{\circ\cdot} (2 \sin \nu t - \nu t - \nu t \cos \nu t)] \qquad (4.8)$$

При $e = 0$ формула (4.8) превращается в полученную для этого случая в работе [6].

5. Несколько более сложной задачей является интегрирование уравнения (4.1), которое в проекциях на оси xyz приводит к системе

$$\delta x^{\cdot\cdot} + (\mu / r^3 - \omega_y^2)\,\delta x + \omega_y^\cdot\,\delta z + 2\omega_y \delta z^\cdot = \Delta n_x - 2\Delta m_y r^\cdot - \Delta m_y^\cdot r$$
$$\delta z^{\cdot\cdot} + (\mu / r^3 - \omega_y^2)\,\delta z - \omega_y^\cdot \delta x - 2\omega_y \delta x^\cdot = \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y + 3\mu \Delta r / r^3 \qquad (5.1)$$

и уравнению

$$\delta y^{\cdot\cdot} + \mu r^{-3} \delta y = \Delta n_y + 2\Delta m_x r^\cdot + \Delta m_x^\cdot r - \omega_y \Delta m_z r \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) совпадает со вторым уравнением (4.2), и дело сводится, таким образом, к решению системы (5.1).

Однородная система уравнений (5.1) имеет два частных решения

$$\delta x = r / a, \quad \delta z = 0, \qquad \delta x = 0, \quad \delta z = r / a \qquad (5.3)$$

Это позволяет понизить ее порядок до второго путем замены переменных

$$\delta x = \frac{r}{a} \int p\,dt, \qquad \delta z = \frac{r}{a} \int q\,dt \qquad (5.4)$$

Уравнения для p и q имеют вид

$$p^\cdot + 2\frac{r^\cdot}{r} p + 2\omega_y q = 0, \qquad q^\cdot + 2\frac{r^\cdot}{r} q - 2\omega_y p = 0 \qquad (5.5)$$

Введя комплексную переменную $u = p + iq$, приходим к уравнению первого порядка относительно u

$$u^\cdot + 2u\left(\frac{r^\cdot}{r} - i\omega_y\right) = 0 \qquad (5.6)$$

которое немедленно интегрируется. Общим решением этого уравнения оказывается функция

$$u = \frac{C}{r^2} (\cos 2v + i \sin 2v) \qquad (5.7)$$

где C — некоторая комплексная постоянная.

Переходя теперь снова к переменным δx, δz и используя при этом (4.6), получаем два таких частных решения системы (5.1):

$$\delta x = \frac{r}{a} \sin 2v, \qquad \delta z = \frac{r}{a} \cos 2v$$
$$\delta x = -\frac{r}{a} \cos 2v, \qquad \delta z = \frac{r}{a} \sin 2v \qquad (5.8)$$

Выражения (5.8) вместе с (5.3) составляют систему четырех частных решений уравнений (5.1) [1].

Образуем из частных решений (5.3), (5.8) и их производных, взятых с учетом пятого и седьмого равенств (1.10), матрицу α.

Ее элементами будут (5.9)

$$\alpha_{11} = \frac{r}{a}, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = \frac{r}{a}\sin 2v, \quad \alpha_{14} = \frac{r}{a}\cos 2v$$

$$\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = \frac{r}{a}, \quad \alpha_{23} = -\frac{r}{a}\cos 2v, \quad \alpha_{24} = \frac{r}{a}\sin 2v$$

$$\alpha_{31} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v, \quad \alpha_{33} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v \sin 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r}\cos 2v$$

$$\alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{34} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v\cos 2v - \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r}\sin 2v$$

$$\alpha_{41} = 0, \quad \alpha_{43} = -\frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v\cos 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r}\sin 2v$$

$$\alpha_{42} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v \quad \alpha_{44} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}}\sin v\sin 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r}\cos 2v$$

Определитель этой матрицы есть определитель Вронского полученной системы частных решений.

Если привести однородную систему (5.1) к форме Коши, то матрица коэффициентов правых частей не будет содержать, как и в случае уравнений (1.11), диагональных элементов. Поэтому, в силу известной теоремы Остроградского — Лиувилля, определитель Вронского постоянен. Достаточно вычислить его значение при $t = 0$. Замечая, что при этом $v = 0$, сразу получаем из (5.9), что $|\alpha| = 4\nu^2(1-e^2) \neq 0$.

---

[1] Частные решения (5.3) уравнений (5.1) выбраны путем сравнения систем (5.1) и (1.11) из частных решений последней. А. И. Лурье при просмотре рукописи настоящей статьи указал автору прямой путь получения общего решения векторного однородного уравнения (4.1).

Из (1.2) и однородного уравнения (4.1) следует (Здесь точкой обозначены полные производные по времени)

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot}\times\delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}^{\cdot\cdot}\times\mathbf{r} = (\mathbf{r}^{\cdot}\times\delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}^{\cdot}\times\mathbf{r})^{\cdot} = 0$$

$$\mathbf{r}^{\cdot}\times\delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}^{\cdot}\times\mathbf{r} = \mathbf{a} \qquad (\mathbf{a}\text{ — постоянный вектор})$$

Отсюда получается

$$\delta\mathbf{r}^{\cdot}\mathbf{r}^2 - \delta\mathbf{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{r}\delta\mathbf{r}^{\cdot}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} - \mathbf{r}^{\cdot}\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r} \tag{1}$$

Далее, из (1.2), (4.1)

$$\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r}^{\cdot\cdot} - \mathbf{r}^{\cdot\cdot}\cdot\delta\mathbf{r} = 0, \qquad \mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r}^{\cdot} - \mathbf{r}^{\cdot}\cdot\delta\mathbf{r} = c = \mathrm{const}$$

Подстановка в (1) дает (заметим, что $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}^{\cdot} = rr^{\cdot}$)

$$\delta\mathbf{r}^{\cdot}r^2 - \delta\mathbf{r}rr^{\cdot} = \delta\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{r}^{\cdot}) + c\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{a}$$

Но $\mathbf{r}\times\mathbf{r}^{\cdot} = r^2 v^{\cdot}\mathbf{y}$. Поэтому приходим к уравнению

$$\delta\mathbf{r}^{\cdot} - \delta\mathbf{r}r^{\cdot}/r + v^{\cdot}\mathbf{y}\times\delta\mathbf{r} = (c\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{a})/r^2$$

которое равносильно уравнениям

$$(\delta z^{\cdot} + i\delta x^{\cdot}) - (r^{\cdot}/r - 2iv^{\cdot})(\delta z + i\delta x) = (c - ia_y)/r, \qquad \delta y^{\cdot} - \delta y r^{\cdot}/r = a_x/r$$

Их интегрирование дает

$$\delta z + i\delta x = (c_1 + ic_2)\, re^{-2iv} + (c - ia_y)/2ir^2v^{\cdot}, \qquad \delta y = c_3 r + a_x v/rv^{\cdot}$$

Найденное решение содержит все шесть постоянных (c, a_y, a_x, c_1, c_2, c_3).

Таким образом, построенные частные решения системы однородных уравнений (5.1) линейно независимы; общее решение однородной системы будет

$$\delta x = \sum_{i=1}^{4} C_i \alpha_{1i}, \qquad \delta z = \sum_{i=1}^{4} C_i \alpha_{2i} \tag{5.10}$$

Общее решение неоднородной системы найдем методом вариаций произвольных постоянных. Полагая C_i функциями времени, получим для их определения уравнения

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{4} C_i^{\bullet}(t)\,\alpha_{1i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{4} C_i^{\bullet}(t)\,\alpha_{2i} = 0\\ \sum_{i=1}^{4} C_i^{\bullet}(t)\,\alpha_{3i} = \Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r\\ \sum_{i=1}^{4} C_i^{\bullet}(t)\,\alpha_{4i} = \Delta n_z + 2r\Delta m_y\omega_y + 3\mu\frac{\Delta r}{r^3}\end{gathered} \tag{5.11}$$

Построив матрицу $\beta = \alpha^{-1}$, получим для ее элементов значения

$$\beta_{11} = \frac{a}{r}, \quad \beta_{12} = \frac{e\sin v}{2(1-e^2)}, \quad \beta_{13} = 0, \quad \beta_{14} = -\frac{r}{a}\frac{1}{2\nu\sqrt{1-e^2}}$$

$$\beta_{21} = -\frac{e\sin v}{2(1-e^2)}, \quad \beta_{22} = \frac{a}{r}, \quad \beta_{23} = \frac{r}{a}\frac{1}{2\nu\sqrt{1-e^2}}, \quad \beta_{24} = 0$$

$$\beta_{31} = -\frac{e\sin v\cos 2v}{2(1-e^2)}, \quad \beta_{32} = -\frac{e\sin v\sin 2v}{2(1-e^2)}, \quad \beta_{33} = \frac{r}{a}\frac{\cos 2v}{2\nu\sqrt{1-e^2}}$$

$$\beta_{34} = \frac{r}{a}\frac{\sin 2v}{2\nu\sqrt{1-e^2}}, \quad \beta_{41} = \frac{e\sin v\sin 2v}{2(1-e^2)}, \quad \beta_{42} = -\frac{e\sin v\cos 2v}{2(1-e^2)}$$

$$\beta_{43} = -\frac{r}{a}\frac{\sin 2v}{2\nu\sqrt{1-e^2}}, \qquad \beta_{44} = \frac{r}{a}\frac{\cos 2v}{2\nu\sqrt{1-e^2}} \tag{5.12}$$

При помощи матрицы β выражения для $C_i(t)$ получаются в виде

$$C_i(t) = \int_0^t [\beta_{i3}(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r) + \beta_{i4}(\Delta n_z + 2r\omega_y\Delta m_y + 3\mu\Delta r / r^3)]\,dt + C_i^{\circ} \tag{5.13}$$

Чтобы получить решение уравнений (5.1), осталось подставить (5.13) в (5.10), определив предварительно C_i° в соответствии с начальными условиями. Таким образом,

$$\begin{gathered}\delta x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{1i}\left\{\int_0^t [\beta_{i3}(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r) + \beta_{i4}(\Delta n_z + 2r\omega_y\Delta m_y + 3\mu\Delta r / r^3)]\,dt + C_i^{\circ}\right\}\\ \delta z = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{2i}\left\{\int_0^t [\beta_{i3}(\Delta n_x - 2\Delta m_y r^{\bullet} - \Delta m_y^{\bullet} r) +\right.\end{gathered} \tag{5.14}$$

$$+ \beta_{i4} (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y + 3\mu \Delta r / r^3)] \, dt + C_i^\circ \Big\}$$

где

$$C_1^\circ = \frac{\delta x^\circ}{1-e} - \frac{\delta z^{\circ\prime}(1-e)}{2\nu\sqrt{1-e^2}}, \qquad C_2^\circ = \frac{\delta z^\circ}{1-e} + \frac{\delta x^{\circ\prime}(1-e)}{2\nu\sqrt{1-e^2}}$$

$$C_3^\circ = \frac{\delta x^{\circ\prime}(1-e)}{2\nu\sqrt{1-e^2}}, \qquad C_4^\circ = \frac{\delta z^{\circ\prime}(1-e)}{2\nu\sqrt{1-e^2}} \tag{5.15}$$

Для орбит малого эксцентриситета, используя (3.2), получим с точностью до членов порядка e

$$\alpha_{11} = 1 - e\cos\nu t, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = \sin 2\nu t + e \sin \nu t \, (3\cos 2\nu t - 1)$$
$$\alpha_{14} = \cos 2\nu t - e\,(3 \sin\nu t \, \sin 2\nu t + \cos\nu t), \quad \alpha_{21} = 0$$
$$\alpha_{22} = 1 - e\cos\nu t, \quad \alpha_{23} = -\cos 2\nu t + e\,(3\sin\nu t \sin 2\nu t + \cos\nu t)$$
$$\alpha_{24} = \sin 2\nu t + e\sin\nu t\,(3\cos 2\nu t - 1)$$
$$\beta_{13} = 0, \quad \beta_{14} = -{}^1/_2\nu^{-1}(1 - e\cos\nu t), \quad \beta_{23} = \nu^{-1}(1 - e\cos\nu t), \quad \beta_{24} = 0$$
$$\beta_{33} = {}^1/_2\nu^{-1}[\cos 2\nu t - e\,(3\sin\nu t \sin 2\nu t + \cos\nu t)] \tag{5.16}$$
$$\beta_{34} = {}^1/_2\nu^{-1}[\sin 2\nu t + e\sin\nu t\,(3\cos 2\nu t - 1)]$$
$$\beta_{43} = -{}^1/_2\nu^{-1}[\sin 2\nu t + e\sin\nu t\,(3\cos 2\nu t - 1)]$$
$$\beta_{44} = {}^1/_2\nu^{-1}[\cos 2\nu t - e\,(3\sin\nu t\sin 2\nu t + \cos\nu t)]$$
$$C_1^\circ = (1+e)\,\delta x^\circ - {}^1/_2\nu^{-1}(1-e)\,\delta z^{\circ\prime}, \quad C_2^\circ = (1+e)\,\delta z^\circ + {}^1/_2\nu^{-1}(1-e)\,\delta x^{\circ\prime}$$
$$C_3^\circ = {}^1/_2\nu^{-1}(1-e)\,\delta x^{\circ\prime}, \quad C_4^\circ = {}^1/_2\nu^{-1}(1-e)\,\delta z^{\circ\prime}$$

Если принять инструментальные погрешности постоянными, то, подставив (5.16) в (5.14) и проинтегрировав, приходим к таким выражениям для δx, δz:

$$\delta x = {}^1/_4\nu^{-2}\Delta n_x (1 - \cos 2\nu t) + ({}^1/_4\nu^{-2}\Delta n_z + {}^3/_2\Delta r)(\sin 2\nu t - 2\nu t) +$$
$$+ \delta x^\circ + {}^1/_2\nu^{-1}\delta x^{\circ\prime}\sin 2\nu t + {}^1/_2\nu^{-1}\delta z^{\circ\prime}(\cos 2\nu t - 1) + e\,[{}^1/_2\nu^{-2}\Delta n_x(-{}^5/_4\cos\nu t +$$
$$+ 2\cos 2\nu t - {}^3/_4\cos 3\nu t) + {}^1/_2\nu^{-2}\Delta n_z(\nu t\cos\nu t + {}^3/_4\sin\nu t - 2\sin 2\nu t + {}^3/_4\sin 3\nu t) +$$
$$+ {}^5/_3\nu^{-1}a\,\Delta m_y(-2\sin\nu t + \sin 2\nu t) + \Delta r\,({}^3/_2\nu t\cos\nu t - {}^{39}/_8\sin\nu t + {}^9/_8\sin 3\nu t) +$$
$$+ \delta x^\circ(1 - \cos\nu t) + {}^1/_2\nu^{-1}\delta z^{\circ\prime}(1 - \cos 2\nu t - 3\sin\nu t\sin 2\nu t) +$$
$$+ {}^1/_2\nu^{-1}\delta x^{\circ\prime}(-\sin\nu t - \sin 2\nu t + 3\sin\nu t\cos 2\nu t)]$$

$$\delta z = {}^1/_4\nu^{-2}\Delta n_x(2\nu t - \sin 2\nu t) + ({}^1/_4\nu^{-2}\Delta n_z + {}^3/_4\Delta r)(1 - \cos 2\nu t) + \delta z^\circ +$$
$$+ {}^1/_2\nu^{-1}\delta x^{\circ\prime}(1 - \cos 2\nu t) + {}^1/_2\nu^{-1}\delta z^{\circ\prime}\sin 2\nu t + e\,[{}^1/_2\nu^{-2}\Delta n_x(-\nu t\cos\nu t - {}^3/_4\sin\nu t +$$
$$+ 2\sin 2\nu t - {}^3/_4\sin 3\nu t) + {}^1/_2\nu^{-2}\Delta n_z(-{}^5/_4\cos\nu t + 2\cos 2\nu t - {}^3/_4\cos 3\nu t) +$$
$$+ \nu^{-1}a\,\Delta m_y(-1 + {}^5/_3\cos\nu t - {}^5/_6\cos 2\nu t + {}^1/_6\cos 3\nu t) + {}^9/_8\Delta r(\cos\nu t - \cos 3\nu t) +$$
$$+ \delta z^\circ(1 - \cos\nu t) + {}^1/_2\nu^{-1}\delta x^{\circ\prime}(-1 + \cos 2\nu t + 3\sin\nu t\sin 2\nu t) +$$
$$+ {}^1/_2\nu^{-1}\delta z^{\circ\prime}(-\sin 2\nu t - \sin\nu t + 3\sin\nu t\cos 2\nu t)]$$

Автор благодарен А. И. Лурье за просмотр рукописи работы и полезные замечания.

Поступила 19 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
2. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
3. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 2. Гостехиздат, 1964.
4. Лурье А. И. Свободное падение материальной точки в кабине спутника. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
5. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Физматгиз, 1963.
6. Андреев В. Д. Об ошибках систем инерциальной навигации. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 2.
7. Андреев В. Д. О второй группе ошибок систем инерциальной навигации. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 3.