Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ СПУТНИКА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

К. Г. Валеев, А. И. Лурье

(Ленинград)

Первые работы о движении спутника Земли использовали классическую теорию возмущений эллиптических элементов орбиты. В потенциале сил тяготения учитывался первый неочевидный член разложения потенциала по сферическим функциям [1, 2]. Учет следующих слагаемых проводился в работах [3, 4]. Был обнаружен новый качественный эффект, не появляющийся в первом приближении. Другое направление связано с приближенным представлением потенциала Земли выражением, которое допускает разделение переменных в уравнении Якоби — Гамильтона [5–8]. Большое внимание задаче о движении спутника уделено в [9].

В настоящей работе выводятся новые уравнения движения, форма которых удобна для применения методов осреднения и малого параметра. Использование сферических координат приводит к понижению порядка уравнений. Изучение элементов орбиты отодвинуто на второй план. Рассматриваются простейшие виды движений. При выводе уравнений используются работы [1] [10].

1. Вводные обозначения. Вводим неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в центре Земли и с координатными направлениями $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Ось z, вокруг которой вращается Земля, направлена к северному полюсу. Вводим сферическую систему координат r, ϑ, λ

$$x = r\sin\vartheta\cos\lambda, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\lambda, \qquad z = r\cos\vartheta \tag{1.1}$$

Координатный триедр сферической системы координат задается единичными векторами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\lambda$. Распределение массы в Земле предполагаем таким, чтобы потенциал поля сил тяготения не содержал λ и являлся четной функцией γ ($\gamma = \cos\vartheta$). Последнее предположение не существенно в большей части работы.

Материальная точка M с единичной массой (спутник) движется только под действием сил тяготения Земли; пренебрегаем влиянием атмосферы, Луны, Солнца и т. д.

Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M. Введем орбитальный триедр $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{e}_r$ параллелен и одинаково направлен с вектором $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r$. Вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}/dt$ и сонаправлен с $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt$. Вектор $\mathbf{e}_\varphi$ определяется равенством

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_r$$

---

[1] А. И. Лурье. Некоторые нелинейные задачи динамики космического полета. Доклад. Non-linear problems of Space flight. III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen. Berlin, 1964.

2. Исходные уравнения движения. Уравнения движения точки M имеют вид

$$d^2\mathbf{r} / dt^2 = -\operatorname{grad} \Pi \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение момент количества движения

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times d\mathbf{r} / dt, \qquad |\mathbf{k}| = k, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{n}k \tag{2.2}$$

После скалярного умножения на $\mathbf{e}_r$ уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$d\mathbf{k} / dt = -\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \Pi \tag{2.4}$$

Подставляя в (2.2) $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ и умножая векторно на $\mathbf{e}_r$, найдем уравнение для $\mathbf{e}_r$

$$d\mathbf{e}_r / dt = r^{-2}k\mathbf{n} \times \mathbf{e}_r \tag{2.5}$$

Подставив $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ в уравнение (2.4) и умножив его скалярно на $\mathbf{n}$, приходим к уравнению

$$dk / dt = -r\mathbf{e}_\varphi \cdot \operatorname{grad} \Pi \qquad (\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_r) \tag{2.6}$$

Умножая уравнение (2.4) дважды векторно на $\mathbf{n}$, найдем

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\frac{r}{k}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Pi)\, \mathbf{e}_r \times \mathbf{n} \tag{2.7}$$

Введем вектор

$$\boldsymbol{\omega}_1 = kr^{-2}\mathbf{n} - rk^{-1}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Pi)\, \mathbf{e}_r \tag{2.8}$$

Уравнения (2.5), (2.7) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_r, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{n} \tag{2.9}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ является вектором угловой скорости орбитального триедра $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{n}$.

Уравнения (2.9), (2.3), (2.5) образуют замкнутую систему уравнений движения девятого порядка [10] с тремя известными соотношениями

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1, \qquad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \tag{2.10}$$

3. Первая форма уравнений движения. Введем вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_2$ триедра $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\lambda$ сферической системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{i}_3\lambda^\cdot + \mathbf{e}_\lambda\vartheta^\cdot \qquad (\lambda^\cdot \equiv d\lambda/dt) \tag{3.1}$$

Обозначим через χ угол, составленный мгновенной плоскостью орбиты, содержащей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^\cdot$, и меридиональной плоскостью, содержащей $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{r}$. Триедры $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\lambda$ имеют общий вектор $\mathbf{e}_r$. Их угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ могут отличаться лишь слагаемым $\mathbf{e}_r\chi^\cdot$, т. е.

$$\frac{k}{r^2}\mathbf{n} - \frac{r}{k}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Pi)\, \mathbf{e}_r = \lambda^\cdot\mathbf{i}_3 + \vartheta^\cdot\mathbf{e}_\lambda + \chi^\cdot\mathbf{e}_r \tag{3.2}$$

Проектируя равенство (3.2) на $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\lambda$, приходим к скалярным равенствам

$$-\frac{r}{k}\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}\Pi = \lambda^\cdot\cos\vartheta + \chi^\cdot$$

$$-\frac{k}{r^2}\sin\chi = -\lambda^\cdot\sin\vartheta, \qquad \frac{k}{r^2}\cos\chi = \vartheta^\cdot \tag{3.3}$$

Введем новую независимую переменную τ и зависимую переменную u по формулам

$$d\tau = kr^{-2}dt = ku^2dt, \qquad u = r^{-1} \tag{3.4}$$

В задаче о кеплеровском движении неголономной переменной τ соответствует угол истинной аномалии. Дифференцирование по τ будем обозначать штрихом. Из (3.3) имеем

$$\chi' = \Omega - \lambda'\cos\vartheta, \qquad \lambda'\sin\vartheta = \sin\chi, \qquad \vartheta' = \cos\chi \tag{3.5}$$

Здесь введено обозначение

$$\Omega = -\frac{r^3}{k^2}\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}\Pi = -\frac{r^3}{k^2}\mathbf{n}\cdot\left(\frac{\partial\Pi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\varphi\right) =$$
$$= -\frac{r^2}{k^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{k^2u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\sin\chi \tag{3.6}$$

Вводим новую переменную

$$\gamma = \cos\vartheta \tag{3.7}$$

Дифференцируя γ по τ, в силу (3.5), (3.6) найдем

$$\gamma' = -\sin\vartheta\cos\chi, \qquad 1 - \gamma^2 - \gamma'^2 = \sin^2\vartheta\sin^2\chi$$

$$\gamma'' = -\cos\vartheta + \sin\vartheta\sin\chi\Omega = -\gamma + \sin^2\vartheta\sin^2\chi\frac{1}{k^2u^2\sin\vartheta}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta} \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует дифференциальное уравнение для γ

$$\gamma'' + \gamma = -(1 - \gamma^2 - \gamma'^2)\frac{1}{hu^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} \qquad (h = k^2) \tag{3.9}$$

В уравнении (2.3) совершим замену (3.4) и получим

$$u'' + u = -\frac{1}{h}\frac{\partial\Pi}{\partial u} - \frac{1}{2h}u'h' \tag{3.10}$$

Из (2.6), (3.4) находим

$$h' = \frac{dk^2}{dt}\frac{r^2}{k} = -2r^3\mathbf{e}_\varphi\cdot\operatorname{grad}\Pi = -2r^2\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\cos\chi \tag{3.11}$$

Из (3.7), (3.8) имеем окончательно

$$h' = -\frac{2r^2}{\sin\vartheta}\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\chi = -\frac{2}{u^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\gamma' \tag{3.12}$$

Уравнения (3.12), (3.9) имеют интеграл, выражающий постоянство проекции момента количества движения на ось z

$$h(1 - \gamma^2 - \gamma'^2) = \sigma \qquad (\sigma = \mathrm{const}) \tag{3.13}$$

Исключая из (3.9), (3.10) величину h при помощи (3.12), (3.13) получим

$$u'' + u = -\frac{1-\gamma^2-\gamma'^2}{\sigma}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial u} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}u'\gamma'\right)$$

$$\gamma'' + \gamma = -\frac{1}{\sigma u^2}(1-\gamma^2-\gamma'^2)^2\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} \tag{3.14}$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии

$$\sigma(u^2+u'^2) = 2(E-\Pi)(1-\gamma^2-\gamma'^2) \qquad (E=\text{const}) \tag{3.15}$$

Исключив независимую переменную τ (это можно сделать при помощи принципа наименьшего действия в форме Якоби ([11], стр. 712)), приходим к одному уравнению второго порядка. Это, по-видимому, не облегчает исследования.

В данном пункте более подробно изложен вывод уравнений (3.14), предложенный в упомянутом выше докладе А. И. Лурье.

4. Вторая форма уравнений движения. Уравнение (2.6) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -r\mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \Pi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta\right) = \mathbf{e}_\lambda \sin\vartheta\,\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} \tag{4.1}$$

В уравнениях (4.1), (2.5), (2.3) перейдем к новой независимой переменной φ и зависимой переменной u

$$d\varphi = r^{-2}dt = u^2dt, \qquad u = r^{-1} \tag{4.2}$$

Получим уравнения

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\varphi} = \frac{\sin\vartheta}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}\mathbf{e}_\lambda, \qquad \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = \mathbf{k}\times\mathbf{e}_r \tag{4.3}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + hu = -\frac{\partial \Pi}{\partial u}, \qquad h = k^2 \tag{4.4}$$

Выразим векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_r$ через проекции на неподвижные оси прямоугольных координат x, y, z

$$\begin{gathered}\mathbf{k} = k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{e}_r = \gamma_1\mathbf{i}_1 + \gamma_2\mathbf{i}_2 + \gamma\mathbf{i}_3 \\ \gamma_1 = \sin\vartheta\cos\lambda, \qquad \gamma_2 = \sin\vartheta\sin\lambda, \qquad \gamma = \cos\vartheta\end{gathered} \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.3), приходим к скалярным уравнениям

$$\frac{dk_1}{d\varphi} = -\frac{\gamma_2}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \qquad \frac{dk_2}{d\varphi} = \frac{\gamma_1}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \qquad \frac{dk_3}{d\varphi} = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{d\gamma_1}{d\varphi} = k_2\gamma - k_3\gamma_2, \qquad \frac{d\gamma_2}{d\varphi} = k_3\gamma_1 - k_1\gamma, \qquad \frac{d\gamma}{d\varphi} = k_1\gamma_2 - k_2\gamma_1 \tag{4.7}$$

Система восьмого порядка, состоящая из уравнений (4.4), (4.6), (4.7), описывает движение точки M. Для нее известны два очевидных соотношения

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad \gamma_1k_1 + \gamma_2k_2 + \gamma k_3 = 0 \tag{4.8}$$

Дифференцируя (4.7) по φ, в силу (4.6) — (4.8) найдем

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\varphi^2} + \left(h - \frac{\gamma}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}\right)\gamma_1 = 0, \qquad \frac{d^2\gamma_2}{d\varphi^2} + \left(h - \frac{\gamma}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}\right)\gamma_2 = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} + h\gamma = (\gamma^2 - 1)\, u^{-2}\, \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \qquad h = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \tag{4.10}$$

Дифференцируя h по φ, в силу (4.6), (4.7) получим

$$\frac{dh}{d\varphi} = -\frac{2}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{d\varphi} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.4), (4.10), (4.11) образуют замкнутую систему пятого порядка; порядок можно понизить до второго, пользуясь автономностью и двумя известными интегралами, соответствующими (3.13), (3.15)

$$h(1 - \gamma^2) - \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2 = \sigma \qquad (\sigma = \mathrm{const})$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + hu^2 = 2\,(E - \Pi) \qquad (E = \mathrm{const}) \tag{4.12}$$

Заменой переменной φ на τ ($d\tau = \sqrt{h}\, d\varphi$) можно от уравнений (4.4), (4.10), (4.11) перейти к уравнениям (3.9) — (3.11). Можно воспользоваться символической формулой для γ и u

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} = h\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{d\tau}\frac{d}{d\tau} \tag{4.13}$$

Если перейти к независимой переменной u, то найдем

$$\frac{dq}{du} = \frac{2}{u}(2\Pi - 2E + q) - 2\frac{\partial \Pi}{\partial u} \qquad \left(q = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right)$$

$$q\left(\frac{d\gamma}{du}\right)^2 = -\sigma - \frac{1}{u^2}(1 - \gamma^2)(2\Pi - 2E + q) \qquad (E, \sigma = \mathrm{const}) \tag{4.14}$$

Система второго порядка (4.14) замкнута. Она пригодна для изучения частей траекторий, на которых монотонно меняется радиус r.

5. Об уравнениях Лагранжа. В уравнениях Лагранжа второго рода ([11], стр. 283) независимой переменной t предполагается время. Пусть q_s ($s = 1, \ldots, n$) — обобщенные координаты, T — выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k, m=1}^{n} A_{km}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_k \dot{q}_m \tag{5.1}$$

Точкой здесь обозначено дифференцирование по времени. Введем новую независимую переменную φ по формуле

$$d\varphi = \delta(q_1, \ldots, q_n)\, dt \tag{5.2}$$

Дифференцирование по φ в этом и следующем пункте будем обозначать штрихом. Пусть

$$T_* = \frac{1}{2}\sum_{k, m=1}^{n} A_{km}(q_1, \ldots, q_n)\, q_k' q_m' \tag{5.3}$$

Можно доказать, что уравнения движения принимают вид

$$\delta\frac{d}{d\varphi}\left(\delta\frac{\partial T_*}{\partial q_s'}\right) - \delta^2\frac{\partial T_*}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

Здесь Q_s — обобщенная сила, соответствующая координате q_s.

6. Другой вывод уравнений движения. Уравнения (5.4) можно использовать для более короткого, но мало наглядного вывода уравнений (4.4), (4.10), (4.11), а следовательно и (3.14). Кинетическая энергия точки M в сферической системе координат имеет вид

$$T = {}^1/_2\,[r^{\cdot 2} + r^2\vartheta^{\cdot 2} + r^2\sin^2\vartheta\lambda^{\cdot 2}] \tag{6.1}$$

Полагая в (6.1)

$$r = u^{-1}, \qquad \cos\vartheta = \gamma \tag{6.2}$$

найдем для T_* (5.3) выражение

$$T_* = \frac{1}{2}\left(\frac{u'^2}{u^4} + \frac{\gamma'^2}{u^2(1-\gamma^2)} + \frac{1-\gamma^2}{u^2}\lambda'^2\right) \tag{6.3}$$

Введем независимую переменную φ

$$d\varphi = u^2\,dt \tag{6.4}$$

Дифференцирование по φ обозначаем штрихом. Уравнения (5.4) принимают вид

$$u^2\frac{d}{d\varphi}\frac{u'}{u^2} + 2\frac{u'^2}{u} + \frac{u\gamma'^2}{1-\gamma^2} + u(1-\gamma^2)\lambda'^2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial u} \tag{6.5}$$

$$u^2\frac{d}{d\varphi}\frac{\gamma'}{1-\gamma^2} - \frac{\gamma'^2\gamma u^2}{(1-\gamma^2)^2} + \gamma\lambda'^2u^2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma} \tag{6.6}$$

$$u^2\frac{d}{d\varphi}(\lambda'(1-\gamma^2)) = 0 \tag{6.7}$$

Вводим вспомогательную величину

$$h = \gamma'^2(1-\gamma^2)^{-1} + (1-\gamma^2)\lambda'^2 \tag{6.8}$$

После элементарных преобразований уравнение (6.5) принимает вид (4.4), а уравнение (6.6) переходит в (4.10). Дифференцируя h (6.8) по φ, приходим в силу (6.7) к уравнению (4.11).

7. Третья форма уравнений движения. В уравнениях (3.9), (3.10), (3.12) совершим замену, положив

$$w = \frac{hu}{\mu} - 1, \qquad v = -\frac{h}{\mu}\frac{du}{d\tau} \qquad (\mu = \mathrm{const}) \tag{7.1}$$

Уравнения для w и v принимают вид

$$\frac{dw}{d\tau} = -v - \frac{2}{u\mu}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau}, \qquad \frac{dv}{d\tau} = w + \left(1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial\Pi}{\partial u}\right) + \frac{1}{u^2\mu}\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau}\frac{du}{d\tau} \tag{7.2}$$

Предполагая, что потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = -\mu u + \mu\Pi_*, \qquad |\Pi_*| \ll u \leqslant u_0 \tag{7.3}$$

и исключая u и $du/d\tau$ при помощи (7.1), приходим к уравнениям движения

$$\frac{dw}{d\tau} = -v - \frac{2p}{1+w}\frac{\partial\Pi_*}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau}, \qquad \frac{dv}{d\tau} = w + \frac{\partial\Pi_*}{\partial u} - \frac{vp}{(1+w)^2}\frac{\partial\Pi_*}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau} \tag{7.4}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{2p^2}{(1+w)^2}\frac{\partial\Pi_*}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\tau} \qquad \left(p \equiv \frac{h}{\mu}\right) \tag{7.5}$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + \gamma = -\frac{p}{(1+w)^2}\left[1 - \gamma^2 - \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2\right]\frac{\partial\Pi_*}{\partial\gamma} \tag{7.6}$$

Предполагаем, что после дифференцирования Π_* переменная u заменяется посредством

$$u = (1 + w)\, p^{-1} \tag{7.7}$$

Если положить в (7.4) — (7.6) величину $\Pi_* \equiv 0$, то уравнения (7.4) — (7.6) имеют очевидное решение

$$p = \text{const}, \qquad w = e \cos(\tau - \tau_1),$$
$$v = e \sin(\tau - \tau_1), \qquad \gamma = m \sin(\tau - \tau_2) \tag{7.8}$$

которое соответствует кеплеровскому движению

$$r = u^{-1} = p\,(1 + e\cos(\tau - \tau_1))^{-1} \tag{7.9}$$

Угол наклона орбиты i найдем из равенства

$$\sin i = m \tag{7.10}$$

Поэтому переменную p можно считать фокальным параметром, а величину

$$e^2 = w^2 + v^2 \tag{7.11}$$

квадратом эксцентриситета оскулирующего эллипса.

Уравнения (7.4) — (7.6) удобны для исследования орбит, близких к круговым. Они имеют два интеграла, которые соответствуют интегралам (3.13), (3.15).

$$p\,[1 - \gamma^2 - (d\gamma/d\tau)^2] = c_1 \qquad (c_1 = \text{const}) \tag{7.12}$$

$$w^2 + v^2 = 1 - 2p\,(c_2 + \Pi_*) \qquad (c_2 = \text{const}) \tag{7.13}$$

Если i — угол наклона орбиты оскулирующего эллипса, то из (3.8) следует

$$\cos^2 i = (\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{n})^2 = \sin^2\chi \sin^2\vartheta = 1 - \gamma^2 - (d\gamma/d\tau)^2 \tag{7.14}$$

Интегралы (7.12), (7.13) можно переписать в виде

$$p\cos^2 i = c_1, \qquad 1 - e^2 = 2p\,(c_2 + \Pi_*) \tag{7.15}$$

Если фокальный параметр орбиты p близок к постоянной величине, то и угол наклона орбиты i, и эксцентриситет e оскулирующего эллипса близки к постоянным величинам.

Замечание. Из (7.15) следует неравенство

$$0 \leqslant \cos^2 i = \frac{2c_1(c_2 + \Pi_*)}{1 - e^2} \leqslant 1 \tag{7.16}$$

Если величина Π_* во время движения удовлетворяет условию

$$|\Pi_* - \Pi_0| \leqslant \delta, \qquad \Pi_0 = \text{const} \tag{7.17}$$

то из интегралов (7.15) и (7.16) следуют ограничения на траекторию спутника с начальными значениями параметров i_0, e_0, r_0

$$0 < e_0 < 1, \qquad 0 < i_0 < {}^1/_2\pi, \qquad 0 < r_0 < \infty \tag{7.18}$$

Во все время движения выполняются неравенства

$$e^2 \leqslant 1 - (1 - e_0^2)\cos^2 i_0\,(1 - e - 2r_0\delta)\,(1 + e + 2r_0\delta)^{-1} \tag{7.19}$$

$$1 > \cos^2 i \geqslant \cos^2 i_0\,(1 - e_0^2)\,(1 - e - 2r_0\delta)\,(1 + e + 2r_0\delta)^{-1} \tag{7.20}$$

$$r_0 \frac{1 - e}{1 + (e + 4r_0\delta)} \leqslant r \leqslant r_0 \frac{1 + e}{1 - (e + 4r_0\delta)} \tag{7.21}$$

Условие (7.16) должно быть выполнено при (7.20), (7.21). Для Земли величина δ имеет оценку

$$\delta \approx 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \tag{7.22}$$

При движении спутник находится внутри некоторого тороидального тела, ось симметрии которого совпадает с полярной осью (осью z).

Грубые оценки (7.19) — (7.21) можно существенно уточнить для орбит, близких к экваториальным.

8. Псевдопериодические траектории спутника. Будем называть траекторию спутника псевдопериодической, если ей соответствует периодическое решение системы уравнений (3.14), или (4.4), (4.10), (4.11), или (7.4) — (7.6). Возьмем периодическое решение системы (3.14) с периодом, близким к 2π. Рассмотрим отрезки соответствующей псевдопериодической траектории, заключенные между последовательными пересечениями экваториальной плоскости с юга на север. По предположению, выражение для потенциальной энергии не зависит от λ. Поэтому все отрезки траектории будут одинаковыми. Они полностью совпадают при определенном повороте вокруг оси z. Псевдопериодические траектории — наиболее простые при движении спутника. Найдем необходимые условия существования псевдопериодической траектории. Пусть потенциальная энергия в поле сил тяготения имеет выражение

$$\Pi(u, \gamma) = -\mu u - \frac{\varepsilon}{3} u^3 (1 - 3\gamma^2) - \frac{\varepsilon^2 \nu}{5} u^5 (3 - 30\gamma^2 + 35\gamma^4) + \ldots \tag{8.1}$$

Здесь ε — малый параметр, величины μ, ε, ν известные, (см., например, [9, 12], стр. 75, 77). Для отыскания периодических решений используем систему уравнений (4.4), (4.10), (4.11), которая принимает вид для (8.1)

$$\begin{gathered} d^2u / d\varphi + hu = \mu + \varepsilon u^2 (1 - 3\gamma^2) + \varepsilon^2 \nu u^4 (3 - 30\gamma^2 + 35\gamma^4) + \ldots \\ d^2\gamma / d\varphi^2 + h\gamma = (\gamma^2 - 1)\,[2\varepsilon u\gamma + \varepsilon^2 \nu u^3 (12\gamma - 28\gamma^3)] + \ldots \\ dh / d\varphi = -2\,[2\varepsilon u\gamma + \varepsilon^2 \nu u^3 (12\gamma - 28\gamma^3)]\, d\gamma / d\varphi + \ldots \end{gathered} \tag{8.2}$$

За начальный возьмем момент пересечения спутником плоскости экватора, когда $\gamma = 0$, $h = h_0$. Введем новые параметры и переменные

$$\begin{gathered} \beta = \varepsilon \mu h_0^{-2}, \qquad \nu_1 = \mu \nu, \qquad z = u h_0 \mu^{-1} \\ s = \varphi\,[h_0 (1 + \alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta^2 + \ldots)],^{1/2} \qquad q = h h_0^{-1} \end{gathered} \tag{8.3}$$

Ищем периодическое решение в виде рядов по степеням β [13]

$$\begin{gathered} z = z_0 + \beta z_1 + \beta^2 z_2 + \ldots, \qquad \gamma = \gamma_0 + \beta \gamma_1 + \beta^2 \gamma_2 + \ldots \\ q = q_0 + \beta q_1 + \beta^2 q_2 + \ldots \end{gathered} \tag{8.4}$$

Для слагаемых, входящих в (8.4), находим уравнения

$$\frac{d^2 z_0}{ds^2} + z_0 = 1, \qquad \frac{d^2 \gamma_0}{ds^2} + \gamma_0 = 0, \qquad \frac{dq_0}{ds} = 0 \tag{8.5}$$

Для первого приближения имеем уравнения

$$\frac{d^2z_1}{ds^2}+z_1+\alpha_1\frac{d^2z_0}{ds^2}+q_1z_0=z_0^2(1-3\gamma_0^2)$$
$$\frac{d^2\gamma_1}{ds^2}+\gamma_1+\alpha_1\frac{d^2\gamma_0}{ds^2}+q_1\gamma_0=2z_0(\gamma_0^3-\gamma_0) \qquad (8.6)$$
$$\frac{dq_1}{ds}=-4z_0\gamma_0\frac{d\gamma_0}{ds}$$

Для второго приближения найдем уравнения

$$\frac{d^2z_2}{ds^2}+z_2=-\alpha_1\frac{d^2z_1}{ds^2}-\alpha_2\frac{d^2z_0}{ds^2}-q_1z_1-q_2z_0-6z_0^2\gamma_0\gamma_1+$$
$$+2z_0z_1(1-3\gamma_0^2)+\nu_1z_0^4(3-30\gamma_0^2+35\gamma_0^4)$$
$$\frac{d^2\gamma_2}{ds^2}+\gamma_2=-\alpha_1\frac{d^2\gamma_1}{ds^2}-\alpha_2\frac{d^2\gamma_0}{ds^2}-q_1\gamma_1-q_2\gamma_0+ \qquad (8.7)$$
$$+2z_0\gamma_1(3\gamma_0^2-1)+2z_1(\gamma_0^3-\gamma_0)+\nu_1z_0^3(-28\gamma_0^5+40\gamma_0^4-12\gamma_0)$$
$$\frac{dq_2}{ds}=-4z_0\gamma_0\frac{d\gamma_1}{ds}-4z_0\gamma_1\frac{d\gamma_0}{ds}-4z_1\gamma_0\frac{d\gamma_0}{ds}-$$
$$-2\nu_1z_0^3(12\gamma_0-28\gamma_0^3)\frac{d\gamma_0}{ds}$$

За порождающее решение возьмем

$$z_0=1+e\cos(s-s_0),\qquad \gamma_0=m\sin s,\qquad q_0=1 \qquad (8.8)$$

Из последнего уравнения (8.6) найдем

$$q_1=m^2\left[\cos 2s+{}^1/_3e\cos(3s-s_0)+e\cos(s+s_0)\right] \qquad (8.9)$$

Условия периодичности z_1, γ_1 приводят к равенствам

$$e(\alpha_1+2-3m^2)=0,\qquad m(\alpha_1+2m^2-2)=0 \qquad (8.10)$$

Их можно удовлетворить в трех случаях.

1. При $e=0$. Порождающая орбита будет круговой.

2. При $m=0$. Порождающая орбита лежит в экваториальной плоскости. В этом случае уравнения (8.2) интегрируются.

3. При $5m^2-4=0$. Порождающая орбита имеет угол наклона

$$i=\arccos(0.2\sqrt{5})\approx 63°28'$$

При выполнении (8.10) находим z_1, γ_1

$$z_1=(1+{}^1/_2e^2)(1-{}^3/_2m^2)-{}^1/_8m^2e^2\cos 2s_0-{}^1/_{36}m^2(6+e^2)\cos 2s-$$
$$-{}^1/_{12}e^2(2-3m^2)\cos(2s-2s_0)-{}^1/_{12}m^2e\cos(3s-s_0)-$$
$$-{}^1/_{72}m^2e^2\cos(4s-2s_0) \qquad (8.11)$$

$$\gamma_1={}^1/_4me(5m^2-4)\sin s_0-{}^1/_{36}me(11m^2-12)\sin(2s-s_0)+$$
$$+{}^1/_4m^3e\sin(2s+s_0)+{}^1/_8m^3\sin 3s+{}^1/_{36}m^3e\sin(4s-s_0) \qquad (8.12)$$

В следующих пунктах рассмотрены условия, при которых существует периодическое решение системы (8.7).

9. Порождающая орбита с углом наклона 63°28′. Предполагая, что $0 < e < 1$ и $5m^2 = 4$, найдем $< q_2$

$$q_2 = {}^2/_{75}e^2 (5 - 18\nu_1) s \sin 2s_0 + \ldots \tag{9.1}$$

Многоточием обозначены периодические члены. Из данных [12] (стр. 77) находим значение $\nu_1 = 0.562$. Из (9.1) следует, что для псевдопериодической траектории порождающая эллиптическая орбита должна иметь перигей и апогей расположенными или в экваториальной плоскости, или в наиболее северной и южной точках. При этом

$$\sin 2s_0 = 0 \tag{9.2}$$

Полагая в (8.8) величина $s_0 = 0$, находим условия для периодичности z_2, γ_2

$$e \left[\alpha_2 - {}^8/_{25} - {}^{173}/_{450}e^2 + \nu_1 ({}^2/_{25} - {}^{13}/_5 e^2)\right] = 0 \tag{9.3}$$

$$\alpha_2 - {}^{14}/_{75} + {}^{67}/_{450}e^2 + \nu_1 ({}^{24}/_{25} - {}^3/_{25} e^2) = 0 \tag{9.4}$$

Условия (9.3), (9.4) не могут быть выполнены, если $e \neq 0$. После исключения α_2 и подстановки ν_1 приходим к невыполнимому условию

$$0.38 + 1.83e^2 = 0 \tag{9.5}$$

Полагая в (8.8) величина $s_0 = 0.5\pi$, находим условия для периодичности z_2, γ_2

$$e \left[-\alpha_2 + {}^4/_{75} - {}^{11}/_{90}e^2 + \nu_1 ({}^{72}/_{25} + 3e^2)\right] = 0 \tag{9.6}$$

$$-\alpha_2 + {}^{14}/_{75} + {}^{31}/_{90}e^2 + \nu_1 (-{}^{24}/_{25} - 3e^2) = 0 \tag{9.7}$$

После исключения α_2 и подстановки ν_1 приходим к невыполнимому условию

$$2.03 + 2.91e^2 = 0 \tag{9.8}$$

Случаи $s_0 = \pi$, $s_0 = 1.5\pi$ получаются из рассмотренных заменой e на $-e$.

Окончательно получили, что псевдопериодические траектории не могут существовать, если порождающая эллиптическая орбита имеет угол наклона $i = 63°28'$ и эксцентриситет $e > 0$.

10. Случай круговой порождающей орбиты. Покажем, что в рассматриваемом случае существует целое семейство псевдопериодических траекторий спутника, т. е. семейство периодических решений системы (8.2). Предположим, что потенциальная энергия имеет выражение

$$\Pi (u, \gamma) = -\mu u - \varepsilon u^3 \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon) \tag{10.1}$$

где ε — малый параметр, $\Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)$ — степенной ряд по всем переменным, сходящийся при

$$|u| < u_{10}, \qquad |\gamma| \leqslant 1, \qquad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1 \tag{10.2}$$

Уравнения (4.4), (4.10), (4.11) принимают вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + hu = \mu + 3\varepsilon u^2 \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon) + 2\varepsilon u^4 \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{\partial u^2} \qquad (h > 0)$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\varphi^2} + h\gamma = 2\varepsilon (1 - \gamma^2) u\gamma \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{d\gamma^2}, \qquad \frac{dh}{d\varphi} = 2\varepsilon u \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{d\gamma^2} \frac{d\gamma^2}{d\varphi} \tag{10.3}$$

Пусть при $\varphi = \varphi_0$ имеем $\gamma = 0$, $h = h_0$. Совершим замену независимого переменного

$$s = [h_0 (1 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots)]^{1/2} (\varphi - \varphi_0) \qquad (10.4)$$

Ищем периодическое решение системы (10.3) в виде рядов

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \quad \gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots,$$
$$h = h_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \ldots) \qquad (10.5)$$

Из (10.3) находим порождающее решение, которое соответствует круговой орбите спутника

$$u_0 = \mu h_0^{-1}, \qquad \gamma_0 = m \sin s \qquad (m = \mathrm{const},\ m \neq 0), \qquad q_0 = 1 \qquad (10.6)$$

Введем в рассмотрение классы тригонометрических многочленов (сходящихся рядов) вида

$$C_1 = \sum_n a_{1n} \cos (2n + 1)\, s, \qquad C_2 = \sum_n a_{2n} \cos 2ns$$
$$S_1 = \sum_n b_{1n} \sin (2n + 1)\, s, \qquad S_2 = \sum_n b_{2n} \sin 2ns \qquad (10.7)$$

Классы функций (10.7) образуют коммутативную полугруппу с законом умножения, при котором произведение, определяемое табличкой

	C_1	C_2	S_1	S_2
C_1	C_2	C_1	S_2	S_1
C_2	C_1	C_2	S_1	S_2
S_1	S_2	S_1	C_2	C_1
S_2	S_1	S_2	C_1	C_2

(10.8)

дает равенства, например $C_1 S_1 = S_2$; эти равенства понимаются в следующем смысле. Для любых тригонометрических многочленов $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ таких, что $\chi_1 \in C_1$, $\chi_2 \in S_1$, их произведение $\chi_1\chi_2 \in S_2$. Аналогично понимаются символические равенства

$$\frac{dC_1}{ds} = S_1, \qquad \frac{dC_2}{ds} = S_2, \qquad \int S_2 ds = C_2, \qquad \frac{d^2C_2}{ds^2} = C_2, \ldots$$

Введем функции $\Phi_j (u, \gamma, \varepsilon)$

$$\Phi_1 (u, \gamma, \varepsilon) \equiv \left[\mu + 3\varepsilon u \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon) + 2\varepsilon u^4 \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{\partial u^2}\right] \frac{1}{h_0}$$
$$\Phi_2 (u, \gamma, \varepsilon) \equiv 2\varepsilon (1 - \gamma^2)\, u\gamma \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{\partial \gamma^2} \frac{1}{h_0} \qquad (10.9)$$
$$\Phi_3 (u, \gamma, \varepsilon) \equiv 2\varepsilon u \frac{\partial \Pi_1 (u^2, \gamma^2, \varepsilon)}{\partial \gamma^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial s} \frac{1}{h_0}$$

Докажем теперь, что функции u_j, γ_j, q_j можно всегда выбрать периодическими функциями s так, чтобы

$$u_j \in C_2, \qquad \gamma_j \in S_1, \qquad q_j \in C_2 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (10.10)$$

Из (10.6) следует (10.10) при $j = 0$.

Пусть (10.10) выполнены при $(j = 0, 1, \ldots, \quad n - 1)$. Введем обозначения

$$u_n^* = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j u_j, \qquad \gamma_n^* = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j \gamma_j, \qquad q_n^* = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^i q_j \qquad (10.11)$$

Из (10.8) — (10.10) следуют соотношения

$$\Phi_1 (u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon) \in C_2, \qquad \Phi_2 (u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon) \in S_1, \qquad \Phi_3 (u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon) \in S_2 \qquad (10.12)$$

Дифференцирование $\Phi_j (y_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon)$ по ε не меняет класса, к которому относится функция.

Дифференциальные уравнения для отыскания u_n, γ_n, q_n имеют вид

$$\frac{d^2u_n}{ds^2} + u_n = -\sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_{n-j}\frac{d^2u_j}{ds^2} + q_{n-j}u_j\right) + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\Phi_1(u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon)}{\partial\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} \tag{10.13}$$

$$\frac{d^2\gamma_n}{ds^2} + \gamma_n = -\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{n-j}\frac{d^2\gamma_j}{ds^2} - \sum_{j=0}^{n-1} q_{n-j}\gamma_{j-1} - \alpha_n m \sin s + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\Phi_2(u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon)}{\partial\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0}$$

$$\frac{dq_n}{ds} = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\Phi_3(u_n^*, \gamma_n^*, \varepsilon)}{\partial\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} \tag{10.14}$$

Из (10.12) следует, что правая часть в уравнении (10.15) относится к классу S_2, поэтому $q_n \in C_2$. Правая часть (10.14) относится к классу S_1. Считая постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ уже известными, выберем α_n так, чтобы правая часть не содержала в своем разложении в ряд Фурье члена с $\sin s$. При $m \neq 0$ ($m = \sin i$) постоянная α_n выбирается однозначно. Функцию γ_n всегда можно выбрать относящейся к классу S_1. Выбор будет единственный, если γ_n не содержит в своем разложении $\sin s$. Правая часть уравнения (10.13) относится к классу C_2, поэтому функцию u_n всегда и единственным образом можно выбрать так, чтобы $u_n \in C_2$. Справедливость соотношений (10.10) доказана при всех n. Если наложить дополнительные условия

$$q_n = 0, \qquad s = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10.15}$$

то выбор функций u_n, γ_n, q_n будет единственный.

При указанном выше выборе функций можно доказать сходимость рядов (10.4), (10.5), если величина h_0 достаточно велика, а величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала. При исследовании сходимости удобно использовать нормированное пространство $C\,[0, 2\pi]$ функций от s непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ с нормой

$$\| u \| = \max | u(s) |, \qquad s \in [0, 2\pi] \tag{10.16}$$

Доказательство сходимости громоздко и здесь не приводится. Из него следует существование семейства периодических решений системы уравнений (10.3), которое зависит от трех произвольных параметров: h_0, m, φ_0.

Через каждую точку пространства около Земли проходит одно параметрическое семейство псевдопериодических траекторий, близких к круговым.

11. Влияние грушевидной формы Земли. Порождающая орбита с углом наклона 63°28′. Изучение движения спутников доказало существование третьей гармоники, связанной с грушевидной формой Земли [12] (стр. 75). Пусть потенциальная энергия имеет выражение, отличное от (8.1)

$$\Pi(u, \gamma) = -\mu u - {}^1/_3\,\varepsilon u^3 (1 - 3\gamma^2) - \varepsilon^2\xi u^4 (3\gamma - 5\gamma^3) -$$
$$- {}^1/_5\,\varepsilon^2\nu u^5 (3 - 30\gamma^2 + 35\gamma^4) + \ldots \tag{11.1}$$

Повторяя выкладки п.п. 8 и 9, находим для порождающего решения (8.8) при $m = 0.4\sqrt{5}$, $s_0 = 0$ из условий периодичности z_2, γ_2 условие $e\xi = 0$, дополнительное к условиям (9.3), (9.4).

Случай $s_0 = 0.5\pi$ более интересен.

Условия (9.6), (9.7) изменяют свой вид. После исключения α_2 приходим к равенству

$$ {}^2/_{15} + {}^{21}/_{45}\, e^2 + 3me\xi h_0 + \nu_1 \left[- {}^{96}/_{25} - 6e^2\right] = 0 \tag{11.2}$$

Выполнение (11.3) необходимо для существования псевдопериодической траектории. Из данных [12] (стр. 79) находим значение постоянных

$$\nu_1 = 0.40 \pm 0.02, \qquad \xi h_0 = (0.45 \pm 0.05)\, p_0 R^{-1} \tag{11.3}$$

Здесь p_0 — фокальный параметр порождающей орбиты, R — радиус Земли. Перигей орбиты должен быть расположен вне Земли, поэтому необходимо выполнение неравенства

$$p_0 > R\,(1 + e) \tag{11.4}$$

Равенство (11.2) принимает вид

$$e^2 - 0.63\, e\eta + 0.73 = 0, \qquad \eta \equiv p_0 R^{-1} > 0 \tag{11.5}$$

Условие (11.4) принимает вид

$$e^2 + 0.73 > (1 + e)\, 0.63\, e \tag{11.6}$$

и всегда выполняется. Условие (11.2), не выполнимое при $\xi = 0$, может быть удовлетворено выбором h_0, или выбором η в (11.6). Так как $e > 0$, $s_0 = 0.5\pi$, то порождающая орбита, соответствующая (8.8), вытянута к югу. Она имеет перигей в наиболее северной точке, а апогей в наиболее южной точке. Увеличение размеров орбиты увеличивает относительное влияние третьей гармоники в (11.1) по сравнению с четвертой. Наименьшее значение фокального параметра $p_0 \approx 2.7R$ достигается при $e \approx 0.85$.

Основной вывод. Вследствие грушевидной формы Земли могут существовать псевдопериодические траектории (с точностью до малых ε^3), для которых порождающая эллиптическая орбита имеет угол наклона $i \approx 63°28'$, вытянута к югу и имеет перигей в наиболее северной точке. Эксцентриситет e и фокальный параметр p_0 должны быть связаны приближенным равенством (11.5). Чем меньше эксцентриситет e, тем больше фокальный параметр p_0.

12. Влияние грушевидной формы Земли на близкие к круговым псевдопериодические траектории. Доказательство возможности построения псевдопериодических траекторий, использованное в п. 10, не пригодно для потенциальной энергии $\Pi(u, \gamma)$ вида (11.1). Наличие третьей гармоники налагает дополнительные условия на параметры порождающего решения (10.6).

Из условия периодичности u_2 следует равенство

$$4 - 5m^2 = 0 \tag{12.1}$$

Угол наклона порождающей орбиты должен быть равен $\approx 63°28'$.

Практический вывод. Наименьшее влияние нецентральность поля тяготения Земли оказывает на близкие к круговым траектории спутника с углом наклона $63°28'$.

Поступила 3 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. Е., Таратынова Г. П. Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. Успехи физ. наук., 1957, т. 63, № 1а (33).
2. Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В. Возмущения первого порядка в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. Искусственные спутники Земли, 1959, № 3.
3. Struble R. A. A rigorous theory of satellite motion. Доклад на X Международном конгрессе по прикладной механике в Стрезе (Италия), 1960 (русск. перев.: сб. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Изд. иностр. лит., 1961, т. 4, * 68).
4. Garfinkel B. On the motion of a satellite of an oblate planet. Astron. J., 1958, vol. 63, No. 1257.
5. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд. «Наука». М., 1964.
6. Vinti J. P., New method of solutions for unretarded satellite orbits. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1959, No. 2, 63 B (Русск. перев.: Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Изд. иностр. лит., 1961, вып. 6, *70.
7. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. Искусственные спутники Земли, 1960, № 4.
8. Кислик М. Д. Анализ интегралов движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. Искусственные спутники Земли, 1962, 13.
9. Штерн Т. Введение в небесную механику. Изд. «Мир», 1964.
10. Валеев К. Г. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения материальной точки под действием ньютоновой силы и дополнительных возмущающих сил. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
12. Космические траектории. Библиотека сб. «Механика», Изд. иностр. лит., М., 1963
13. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.