Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАМЕНЕ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Ю. М. Репин

(Свердловск)

В работе рассматривается вопрос о приближенной замене системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценки, полученные в работе, показывают, что такая замена может быть осуществлена с любой степенью точности за счет повышения порядка системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказаны также некоторые теоремы об устойчивости тривиальных решений рассматриваемых систем.

§ 1. Приближение элемента запаздывания системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем описывать состояние элемента запаздывания [1] в любой момент времени t функцией $x_t(\sigma)$, определенной на отрезке $[-\tau, 0]$, где $\tau > 0$ — постоянное время запаздывания. Состояние элемента в любой момент t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ будет определено, если задать его начальное состояние $x_{t_0}(\sigma)$ и входную функцию $x(t)$ при $t_0 < t \leqslant t_1$. В этом случае $x_t(\sigma) = x(t + \sigma)$, причем здесь и в дальнейшем функция $x(t)$ предполагается продолженной на отрезок $[t_0 - \tau, t_0]$ при помощи функции $x_{t_0}(\sigma)$, так что $x(t) = x_{t_0}(t - t_0)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$.

Выходная функция $y(t)$ элемента запаздывания определяется как $x_t(-\tau)$ и, таким образом, может быть получена из продолженной входной функции при помощи уравнения $y(t) = x(t - \tau)$. Заметим еще, что хотя значения $x(t)$ на промежутке $(t_1 - \tau, t_1]$ и не влияют на выходную функцию $(t \leqslant t_1)$, тем не менее, они необходимы для определения состояний элемента запаздывания при $t_1 - \tau < t \leqslant t_1$.

В дальнейшем продолженная входная функция $x(t)$ предполагается непрерывной на отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$.

Рассмотрим наряду с элементом запаздывания апериодическое звено, описываемое уравнением $\tau z^\cdot + z = x(t)$, где постоянная времени τ совпадает с временем запаздывания элемента запаздывания, а $x(t)$ — входная функция элемента запаздывания $t \geqslant t_0$.

Для того чтобы установить некоторое соответствие между начальными состояниями элемента запаздывания и апериодического звена, положим

$$z(t_0) = x_{t_0}(-\tau) = y(t_0)$$

Попытаемся теперь оценить разность $\varepsilon(t) = z(t) - y(t)$ между выходными функциями апериодического звена и элемента запаздывания. Заметим, что $\varepsilon(t_0) = 0$. Предположим, что $x(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет непрерывную производную. Тогда

$$\varepsilon^\cdot(t) = z^\cdot(t) - y^\cdot(t) = \tau^{-1}[x(t) - z(t)] - x^\cdot(t - \tau) = -\tau^{-1}\varepsilon(t) + \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \tau^{-1}[x(t) - x(t - \tau)] - x^\cdot(t - \tau)$$

Если теперь $x^{\cdot}(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной K_2, то $|\varphi(t)| \leqslant K_2\tau$. Если же существует $x^{\cdot\cdot}(t)$, причем $|x^{\cdot\cdot}(t)| \leqslant M_2$, то $|\varphi(t)| \leqslant {}^1/_2 M_2\tau$. Нетрудно видеть, что в первом случае $|\varepsilon(t)| \leqslant K_2\tau^2$, а во втором случае $|\varepsilon(t)| \leqslant {}^1/_2 M_2\tau^2$.

Рассмотрим цепочку m элементов запаздывания [2] с постоянными времени запаздывания τ/m, последовательно соединенных между собой (т. е. соединенных таким образом, что входной функцией каждого следующего элемента служит выходная функция предыдущего элемента). Построим начальные состояния элементов цепочки из начального состояния рассмотренного выше элемента запаздывания по правилу

$$x_{jt_0}(\rho) = x_{t_0}\left(\rho - \frac{(j-1)\tau}{m}\right) \qquad \left(-\frac{\tau}{m} \leqslant \rho \leqslant 0;\ j = 1, \ldots, m\right) \quad (1.1)$$

Если в качестве входной функции $x(t)$ первого элемента цепочки взять входную функцию рассмотренного выше элемента запаздывания, то соотношения (1.1) будут выполняться в любой момент времени t, а выходные функции элементов цепочки будут определяться равенствами

$$\begin{aligned} &y_1(t) = x(t - \tau/m) \\ &y_2(t) = y_1(t - \tau/m) = x(t - 2\tau/m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_m(t) = y_{m-1}(t - \tau/m) = x(t - \tau) = y(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $x(t)$ — продолженная входная функция элемента запаздывания, $y(t)$ — его выходная функция. Составим цепочку последовательно соединенных апериодических звеньев, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений, с начальными условиями

$$\begin{aligned} &\tau m^{-1} z_1^{\cdot} + z_1 = x(t), \quad && z_1(t_0) = y_1(t_0) = x(t_0 - \tau/m) = x_{1t_0}(-\tau/m) \\ &\tau m^{-1} z_2^{\cdot} + z_2 = z_1(t), && z_2(t_0) = y_2(t_0) = x(t_0 - 2\tau/m) = x_{2t_0}(-\tau/m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \qquad\qquad (1.3) \\ &\tau m^{-1} z_m^{\cdot} + z_m = z_{m-1}(t), && z_m(t_0) = y_m(t_0) = x(t_0 - \tau) = x_{mt_0}(-\tau/m) \end{aligned}$$

Оценки разностей $\varepsilon_j(t) = z_j(t) - y_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$, а также некоторые свойства системы (1.3) приводятся ниже.

В силу полученной ранее оценки $|\varepsilon_1(t)| \leqslant A(\tau/m)^2$, где A совпадает с K_2 или ${}^1/_2 M_2$ в зависимости от предположений относительно $x(t)$. На вход второго элемента запаздывания поступает $y_1(t)$, а на вход второго апериодического звена поступает $z_1(t) = y_1(t) + \varepsilon_1(t)$. Функцию $z_2(t)$ можно представить в виде суммы $z_2^{(1)}(t) + z_2^{(2)}(t)$, где $z_2^{(1)}(t)$ и $z_2^{(2)}(t)$ решения задач

$$(\tau/m)\, z_2^{(1)\cdot} + z_2^{(1)} = y_1(t), z_2^{(1)}(t_0) = y_2(t_0)$$

$$(\tau/m)\, z_2^{(2)\cdot} + z_2^{(2)} = \varepsilon_1(t), \quad z_2^{(2)}(t_0) = 0$$

Теперь легко получаем

$$|\varepsilon_2(t)| = |z_2(t) - y_2(t)| \leqslant |z_2^{(1)}(t) - y_2(t)| + |z_2^{(2)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant A(\tau/m)^2 + A(\tau/m)^2 = 2A(\tau/m)^2$$

Продолжая таким же образом, получим

$$|\varepsilon_j(t)| \leqslant jA(\tau/m)^2$$

Заменив в правой части неравенства j его наибольшим значением, получим

$$|\varepsilon_j(t)| \leqslant Am^{-1}\tau^2 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что $z_m(t) \to y(t)$ равномерно на отрезке $[t_0, t_1]$ при $m \to \infty$.

Отметим еще следующее свойство системы (1.3): если $|z_j(t_0)| \leqslant \varepsilon$ $(j=1, \ldots, m)$ и $|x(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то $|z_j(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Ослабим предположения относительно $x(t)$, положив, что она удовлетворяет условию Липшица с константой K_1 (либо имеет первую производную, ограниченную постоянной M_1). Рассмотрим сглаженную входную функцию

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(\xi)\, d\xi \qquad (t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_1)$$

(функцию $x(t)$ на отрезок $[t_1, t_1 + h]$ продолжаем по непрерывности как постоянную).

Ее первая производная $x^{(1)\cdot} = [x(t+h) - x(t)]/h$ удовлетворяет условию Липшица с константой $2K_1/h$ (либо имеет производную, ограниченную постоянной $2M_1/h$).

Оценим функцию $x^{(2)}(t) = x(t) - x^{(1)}(t)$. Если $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$|x^{(2)}(t)| = \left| x(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(\xi)\, d\xi \right| = |x(t) - x(\theta)| \qquad (t \leqslant \theta \leqslant t + h)$$

Таким образом, в этом случае $|x^{(2)}(t)| \leqslant K_1 h$.

Если $x(t)$ имеет ограниченную первую производную, то

$$|x^{(2)}(t)| = \left| x(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} [x(t) + (\xi - t)\, x^{\cdot}(\theta(\xi))]\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (\xi - t)\, M_1 d\xi = \frac{M_1 h}{2}$$

В силу линейности систем (1.2) и (1.3) их выходные функции $y(t)$ и $z_m(t)$, отвечающие продолженной входной функции $x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$, будут суммами выходных функций этих систем, отвечающих продолженным функциям $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$.

Таким образом

$$|z_m(t) - y(t)| = |z_m^{(1)}(t) + z_m^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |z_m^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)| + |z_m^{(2)}(t)| + |y^{(2)}(t)|$$

Очевидно, что $|y^{(2)}(t)| = |x^{(2)}(t - \tau)| \leqslant K_1 h$ (соответственно $M_1 h/2$). То же самое неравенство справедливо для $|z_m^{(2)}(t)|$ в силу отмеченного выше свойства цепочки звеньев. Для оценки величины $|z_m^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)|$ можно применить неравенство (1.4), так как $x^{(1)}(t)$ — уже достаточно гладкая функция. Следовательно,

$$|z_m(t) - y(t)| \leqslant 2K_1\tau^2/hm + 2K_1 h \qquad (\text{соответственно } M_1\tau^2/hm + M_1 h)$$

Если положить $h = \tau\sqrt{m}$, то получается следующая теорема.

Теорема 1.1. Если продолженная входная функция, общая для элемента запаздывания и соответствующей цепочки m апериодических звеньев, удовлетворяет условию Липшица с константой K_1 (или имеет ограниченную числом M_1 первую производную), то выходные функции элемента запаздывания и цепочки апериодических звеньев удовлетворяют неравенству

$$|z_m(t) - y(t)| \leqslant 4K_1\tau/\sqrt{m} \quad \text{или} \quad 2M_1\tau/\sqrt{m} \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Очевидно, справедливы также неравенства

$$|z_j(t) - y_j(t)| \leqslant 4K_1\tau/\sqrt{m} \quad (\text{или } 2M_1\tau/\sqrt{m}) \qquad (j = 1, \ldots, m-1) \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Аналогично легко доказать сходимость $z_m(t)$ к $y(t)$ при $m \to \infty$ для входной функции $x(t)$, удовлетворяющей только требованию непрерывности.

§ 2. Приближение системы с запаздывающим аргументом системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с одним постоянным запаздыванием

$$dx_i / dt = X_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

В дальнейшем для краткости будем ее записывать в векторном виде

$$dx / dt = X(t, x, x(t-\tau)) \tag{2.1}$$

Функции $X_i(t, x, y)$ предполагаем определенными и непрерывными по совокупности аргументов

$$|x_1| + \ldots + |x_n| < H, \quad |y_1| + \ldots + |y_n| < H \quad \text{при } t \geqslant A$$

Предполагается, кроме того, что $X_i(t, 0, 0) \equiv 0$ и что функции $X_i(t, x, y)$ удовлетворяют условию Липшица по аргументам x, y (равномерно относительно t)

$$|X_i(t, x, y) - X_i(t, x^\circ, y^\circ)| \leqslant L_1 \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_k^\circ| +$$

$$+ L_2 \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_k^\circ| \quad \text{при } t \geqslant A \tag{2.2}$$

Заменив входящие в систему элементы запаздывания цепочками m апериодических звеньев, получим приближающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n(m+1)$

$$\frac{dz_0}{dt} = X(t, z_0, z_m), \qquad z_j = (z_{1j}, \ldots, z_{nj}) \tag{2.3}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_0 - z_1), \ldots, \frac{dz_m}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{m-1} - z_m) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

Установим некоторые свойства решений системы (2.3), аналогичные свойствам решений системы (2.1). Нетрудно установить [3], что возможная скорость роста решений системы (2.1) определяется постоянными Липшица функций $X_i(t, x, y)$. Заметим, что последнее остается справедливым равномерно относительно m и для системы (2.3), несмотря на то, что постоянные Липшица остальных ее правых частей (для $j = 1, \ldots, m$) растут с ростом m как m / τ.

Пусть начальные условия для системы (2.3) удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}^\circ| < \delta, \qquad (j = 0, \ldots, m)$$

Пусть далее

$$M(t) = \max\left[\delta, \sum_{i=1}^{n} |z_{i0}(\xi)|\right] \qquad \text{при } t_0 \leqslant \xi \leqslant t$$

Из векторного уравнения $dz_1 / dt = m(z_0 - z_1) / \tau$ получим

$$z_{i1}(t) = z_{i1}{}^\circ \exp\frac{-m(t-t_0)}{\tau} + \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t} z_{i0}(\xi)\exp\frac{m(\xi-t)}{\tau}\,d\xi$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{i1}(t)| \leqslant \delta\exp\frac{-m(t-t_0)}{\tau} + \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t} M(\xi)\exp\frac{m(\xi-t)}{\tau}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M(t)\left[\exp\frac{-m(t-t_0)}{\tau} + \frac{m}{\tau}\int_{t_0}^{t}\exp\frac{m(\xi-t)}{\tau}\,d\xi\right] = M(t)$$

Продолжая таким же образом, получим

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{i2}(t)| \leqslant M(t), \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n}|z_{im}(t)| \leqslant M(t)$$

В силу первого уравнения (2.3)

$$z_{i0}(t) = z_{i0}{}^\circ + \int_{t_0}^{t} X_i(\xi, z_0(\xi), z_m(\xi))\,d\xi \qquad (i=1,\ldots, n)$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{i0}(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|z_{i0}{}^\circ| + \int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|X_i(\xi, z_0(\xi), z_m(\xi))|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \delta + n\int_{t_0}^{t}\left[L_1\sum_{k=1}^{n}|z_{k0}(\xi)| + L_2\sum_{k=1}^{n}|z_{km}(\xi)|\right]d\xi \leqslant \delta + n(L_1+L_2)\int_{t_0}^{t} M(\xi)\,d\xi$$

Отсюда легко [3] получается неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ij}(t)| \leqslant M(t) \leqslant \delta\exp[n(L_1+L_2)(t-t_0)] \qquad (j=0,\ldots,m) \qquad (2.4)$$

Для решения системы (2.1) справедливо следующее свойство: если некоторое множество начальных функций и соответствующих им решений $x_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ ограничено при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ числом δ, то множество $x_i^{\cdot}(t)$ ограничено при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ числом $A\delta$, где A — некоторая постоянная.

Аналогичное свойство справедливо равномерно по m и для системы (2.3), причем роль производных играют разделенные разности

$$\frac{z_{i,j-1} - z_{ij}}{\tau / m} \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$$

вычисленные при $t = t_0 + (1+\beta)\tau$ $(\beta > 0)$

Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ij}(t)| \leqslant \delta \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + (1+\beta)\tau \quad (j=0, 1, \ldots, m)$$

В силу системы (2.3) справедливы равенства

$$\frac{z_{i,j-1} - z_{ij}}{\tau / m} = z_{ij}^{\cdot} \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$$

Представим z_{ij} $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$ в виде суммы $z_{ij}^{(1)} + z_{ij}^{(2)}$, где $z_{ij}^{(1)}$ и

$z_{ij}^{(2)}$ удовлетворяют системам уравнений с начальными условиями (2.5)

$$\frac{\tau}{m} \dot z_{i2}^{(1)} + z_{i1}^{(1)} = z_{i0},\ z_{i1}^{(1)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i0}; \qquad \frac{\tau}{m} \dot z_{i1}^{(2)} + z_{i1}^{(2)} = 0,\ z_{i1}^{(2)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i1} - \overset{\circ}{z}_{i0}$$

$$\frac{\tau}{m} \dot z_{i2}^{(1)} + z_{i2}^{(1)} = z_{i1}^{(1)},\ z_{i2}^{(1)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i0}; \qquad \frac{\tau}{m} \dot z_{i2}^{(2)} + z_{i2}^{(2)} = z_{i1}^{(2)},\ z_{i2}^{(2)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i2} - \overset{\circ}{z}_{i0}$$

. . . .

$$\frac{\tau}{m} \dot z_{im}^{(1)} + z_{im}^{(1)} = z_{i,m-1}^{(1)},\ z_{im}^{(1)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i0}; \quad \frac{\tau}{m} \dot z_{im}^{(2)} + z_{im}^{(2)} = z_{im-1}^{(2)},\ z_{im}^{(2)}(t_0) = z_{im}^{(0)} - \overset{\circ}{z}_{i0}$$

Введем обозначения $\dot z_{ij}^{(1)} = u_{ij}$, $\dot z_{ij}^{(2)} = v_{ij}$. Тогда u_{ij} и v_{ij} удовлетворяют системам уравнений с начальными условиями (2.6)

$$\frac{\tau}{m} \dot u_{i1} + u_{i1} = \dot{\overset{\circ}{z}}_{i0},\quad u_{i1}(t_0) = 0; \qquad \frac{\tau}{m} \dot v_{i1} + v_{i1} = 0,\quad v_{i1}(t_0) = \frac{\overset{\circ}{z}_{i0} - \overset{\circ}{z}_{i1}}{\tau / m}$$

$$\frac{\tau}{m} \dot u_{i2} + u_{i2} = u_{i1},\quad u_{i2}(t_0) = 0; \qquad \frac{\tau}{m} \dot v_{i2} + v_{i2} = v_{i1},\quad v_{i2}(t_0) = \frac{\overset{\circ}{z}_{i1} - \overset{\circ}{z}_{i2}}{\tau / m}$$

. . . .

$$\frac{\tau}{m} \dot u_{im} + u_{im} = u_{i,m-1},\quad u_{im}(t_0) = 0; \quad \frac{\tau}{m} \dot v_{im} + v_{im} = v_{i,m-1},\quad v_{im}(t_0) = \frac{\overset{\circ}{z}_{i,m-1} - \overset{\circ}{z}_{im}}{\tau / m}$$

Так как $\dot{\overset{\circ}{z}}_{i0} = X_i(t, z_0(t), z_m(t))$, то

$$|\dot{\overset{\circ}{z}}_{i0}(t)| \leqslant (L_1 + L_2)\,\delta \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + (1 + \beta)\,\tau$$

В силу системы (2.6) имеем

$$|u_{ij}(t)| \leqslant (L_1 + L_2)\,\delta \qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m),\ (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau(1 + \beta)) \tag{2.7}$$

Из системы (2.6) находим, что (2.8)

$$v_{ij}(t) = \left(v_{ij}(t_0) + \frac{v_{i,j-1}(t_0)\, m\,(t - t_0)}{1!\,\tau} + \ldots + \frac{v_{i1}(t_0)\,(m\,(t - t_0))^{j-1}}{(j - 1)!\,\tau^{j-1}}\right) \exp \frac{-m\,(t - t_0)}{\tau}$$

Отсюда получаем ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$) (2.9)

$$|v_{ij}(t_0 + \tau(1 + \beta))| \leqslant \frac{2m\delta}{\tau}\left(1 + m\,(1 + \beta) + \ldots + \frac{[m\,(1 + \beta)]^{m-1}}{(m - 1)!}\right) e^{-m(1+\beta)}$$

Выражение $(1 + m\,(1 + \beta) + \ldots + [m\,(1 + \beta)]^{m-1} / (m - 1)!)$ можно оценить сверху суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $[m\,(1 + \beta)]^{m-1} / (m - 1)!$ и знаменателем $1 / (1 + \beta)$. Поэтому

$$|v_{ij}(t_0 + \tau(1 + \beta))| \leqslant \frac{2\delta\,[m\,(1 + \beta)]^m}{\beta\tau\,(m - 1)!}\, e^{-m(1+\beta)}$$

Применяя формулу Стирлинга, окончательно получаем

$$|v_{ij}(t_0 + \tau(1 + \beta))| \leqslant \frac{2\delta\,\sqrt{m}}{\beta\tau\,\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1 + \beta}{e^{\beta}}\right)^m \leqslant \delta C_\beta \qquad \binom{i = 1, \ldots, n}{j = 1, \ldots, m} \tag{2.10}$$

Объединяя (2.7) и (2.10), получим равномерно по m

$$\left|\frac{z_{i,j-1} - z_{ij}}{\tau / m}\right| \leqslant \delta\,(C_\beta + L_1 + L_2) \qquad \binom{i = 1, \ldots, n}{j = 1, \ldots, m}, \quad t = t_0 + (1 + \beta)\,\tau \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь вопрос о близости решений систем (2.1) и (2.3), предполагая, что начальные условия z_{ij}° системы (2.3) строятся по начальным условиям системы (2.1) следующим образом:

$$z_{ij}(t_0) = z_{ij}^\circ = x_i(t_0 - j\tau / m) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m) \tag{2.12}$$

Предположим, что функции $x_i(\xi)$ $(t_0 - \tau \leqslant \xi \leqslant t)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $K_1(t)$, общей для всех функций $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть

$$N_j(t) = \max \sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(\xi) - x_i(\xi - j\tau / m)| \qquad (t_0 \leqslant \xi \leqslant t)$$

Представим z_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ в виде суммы $z_{ij}^{(1)} + z_{ij}^{(2)}$, где $z_{ij}^{(1)}$ и $z_{ij}^{(2)}$ удовлетворяют системам уравнений с начальными условиями

$$(\tau / m)\, \dot z_{i1}^{(1)} + z_{i1}^{(1)} = x_i(t), \qquad z_{i1}^{(1)}(t_0) = z_{i1}^{(0)} = x_i(t_0 - \tau / m)$$

$$(\tau / m)\, \dot z_{i2}^{(1)} + z_{i2}^{(1)} = z_{i1}^{(1)}, \qquad z_{i2}^{(1)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{i2} = x_i(t_0 - 2\tau / m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\tau / m)\, \dot z_{im}^{(1)} + z_{im}^{(1)} = z_{i,m-1}^{(1)}, \qquad z_{im}^{(1)}(t_0) = \overset{\circ}{z}_{im} = x_i(t_0 - m\tau / m)$$

$$(\tau / m)\, \dot z_{i1}^{(2)} + z_{i1}^{(2)} = z_{i0}(t) - x_i(t), \qquad z_{i1}^{(2)}(t_0) = 0$$

$$(\tau / m)\, \dot z_{i2}^{(2)} + z_{i2}^{(2)} = z_{i2}^{(2)}, \qquad z_{i2}^{(2)}(t_0) = 0 \tag{2.13}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\tau / m)\, \dot z_{im}^{(2)} + z_{im}^{(2)} = z_{i,m-1}^{(2)}, \qquad z_{im}^{(2)}(t_0) = 0$$

Из (2.13), (1.2), (1.5), (1.6) следует (2.14)

$$|z_{ij}^{(1)}(t) - x_i(t - j\tau / m)| \leqslant \frac{4K_1(t)\,\tau}{\sqrt{m}}, \qquad \sum_{i=1}^{n} |z_{ij}^{(2)}(t)| \leqslant N_c(t)| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Из (2.14), получаем

$$N_j(t) \leqslant N_0(t) + \frac{4nK_1(t)\,\tau}{\sqrt{m}} \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.15}$$

В силу (2.1) и (2.3) имеем для $x_i = x_i(t)$ и $x_{i0} = x_{i0}(t)$

$$x_i = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_i(\xi, x(\xi), x(\xi - \tau))\, d\xi, \qquad z_{i0} = x_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_i(\xi, z_0(\xi), z_m(\xi))\, d\xi$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{i0}(t) - x_i(t)| \leqslant n \int_{t_0}^{t} [L_1 N_0(\xi) + L_2 N_m(\xi)]\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant n \int_{t_0}^{t} \left[(L_1 + L_2) N_0(\xi) + \frac{4nK_1(\xi) L_2 \tau}{\sqrt{m}} \right] d\xi$$

Отсюда

$$N_0(t) \leqslant n \int_{t_0}^{t} \left[(L_1 + L_2) N_0(\xi) + \frac{4nK_1(\xi) L_2 \tau}{m^{1/2}} \right] d\xi \tag{2.16}$$

§ 3. Сохранение устойчивости при переходе к приближающей системе и обратно. Рассмотрим системы (2.1) и (2.3).

Теорема 3.1. Пусть тривиальное решение системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво, причем существуют постоянные $\alpha > 0$, $B \geqslant 1$ такие, что для всех достаточно малых δ из неравенства

$$|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| \leqslant \delta \qquad (t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0)$$

следует неравенство

$$|x_1(t)| + \ldots + |x_n(t)| \leqslant B\delta e^{-\alpha(t - t_0)} \qquad (t \geqslant t_0) \tag{3.1}$$

Тогда при достаточно большом m тривиальное решение системы (2.3) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим, что начальные данные для системы (2.3) удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}^{\circ}| \leqslant \delta \quad (j = 0, \ldots, m) \qquad \left| \frac{\overset{\circ}{z}_{i,j-1} - \overset{\circ}{z}_{ij}}{\tau / m} \right| \leqslant M \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Определим начальные функции $x_i(t)$ $(t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0)$ для системы (2.1), положив их в точках $t_0 - j\tau / m$ равными z_{ij}°, а между этими точками — меняющимися линейно. В силу (3.1), при $t \geqslant t_0$ компоненты решения $x_i(t)$ системы (2.1) удовлетворяют условию Липшица с постоянной $(L_1 + L_2) B\delta$, поэтому функции $x_i(t)$ при $t \geqslant t_0 - \tau$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной $K_1 = \max [M, (L_1 + L_2) B\delta]$. Из неравенств (2.15) и (2.18) теперь получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \left| z_{ij}(t) - x_i\left(t - j\frac{\tau}{m}\right) \right| \leqslant \frac{4nK_1\tau}{(L_1 + L_2)\sqrt{m}} \left(L_2 e^{n(L_1+L_2)(t-t_0)} + L_1\right) \quad \text{при } t \geqslant t_0$$
$$(j = 0, \ldots, m) \qquad (3.3)$$

Пусть теперь

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}^\circ| < \frac{\varepsilon}{2B \exp [n(L_1 + L_2)(1 + \beta)\tau]}$$

где ε достаточно мало. Пусть $T = \alpha^{-1} \ln 4B$ и m настолько велико, что

$$\frac{4nC\tau}{(L_1 + L_2)\sqrt{m}} \left(L_2 e^{n(L_1+L_2)(T+\tau(2+\beta))} + L_1\right) < {}^1/_4$$
$$C = \max [(L_1 + L_2) B, \; C_\beta + L_1 + L_2]$$

Докажем, что справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{на отрезке } [t_0, t_0 + \tau(1 + \beta)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{на отрезке } [t_0 + \tau(1 + \beta), \; t_0 + T + \tau(3 + 2\beta)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4B} \quad \text{на отрезке } [t_0 + T + \tau(2 + \beta), \; t_0 + T + \tau(3 + 2\beta)]$$

Первая система неравенств получается непосредственно из (2.4). В силу (2.11)

$$\left| \frac{z_{i,j-1} - z_{ij}}{\tau / m} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B} (C_\beta + L_1 + L_2) \qquad \text{при } t = t_0 + (1 + \beta)\tau$$

Если определить начальные функции для системы (2.1), как выше — при выводе неравенств (3.3), но для начального момента $t_0 + (1 + \beta)\tau$, то при $t \in [t_0 + \tau(1 + \beta), \; t_0 + T + \tau(3 + 2\beta)]$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left| z_{ij}(t) - x_i\left(t - j\frac{\tau}{m}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B} \frac{4nC\tau}{(L_1 + L_2)\sqrt{m}} \left(L_2 \exp[n(L_1+L_2)(t - t_0 - \tau(1+\beta))] + L_1\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{8B}$$

На отрезке $[t_0 + \tau(1 + \beta), \; t_0 + T + \tau(3 + 2\beta]$ имеем теперь

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| x_i\left(t - j\frac{\tau}{m}\right) \right| + \frac{\varepsilon}{8B} \quad (j = 0, \ldots, m) \qquad (3.4)$$

Первое слагаемое в правой части (3.4) при $t \geqslant t_0 + \tau(1 + \beta)$, в силу (3.1), не превосходит ${}^1/_2\varepsilon$, а при $t \geqslant t_0 + T + \tau(2 + \beta)$, в силу выбора T, не превосходит ${}^1/_8\varepsilon / B$. Отсюда и следует утверждение о поведении величины $|z_{1j}(t)| + \ldots + |z_{nj}(t)|$.

Определим теперь опять начальные функции для системы (2.1) по значениям $z_{ij}(t)$ при $t \in [t_0 + T + \tau(2 + 2\beta),\ t_0 + T + \tau(3 + 2\beta)]$.

Тем же методом получим

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{при } t \in [t_0 + T + \tau(3 + 2\beta),\ t_0 + 2T + \tau(5 + 3\beta)]$$

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{8B} \qquad \text{при } t \in [t_0 + 2T + \tau(4 + 2\beta),\ t_0 + 2T + \tau(5 + 3\beta)]$$

Повторяя и далее такие шаги (временной длины $T + \tau(2 + \beta)$), приходим к выводу, что на отрезке

$$[t_0 + kT + \tau(2k + 1 + (k + 1)\beta),\ t_0 + (k + 1)T + \tau(2k + 3 + (k + 2)\beta)]$$

имеют место неравенства $(j = 0, 1, \ldots m)$

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t)| < \frac{\varepsilon}{2^k}, \qquad \text{если} \qquad \sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2B \exp[n(L_1 + L_2)(1 + \beta)\tau]}$$

Отсюда и следует заключение теоремы о равномерной асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2.3).

Замечание 3.1. Из доказательства теоремы нетрудно установить, что существуют постоянные $B_1 \geqslant 1$, $\alpha_1 > 0$ одни и те же для всех достаточно больших m и такие, что из неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t_0)| < \delta \qquad \text{следуют} \qquad \sum_{i=1}^{n} |z_{ij}(t) < B_1 \delta e^{-\alpha_1(t - t_0)} \qquad (j = 0, \ldots, m,\ t \geqslant t_0)$$

Теорема 3.2. Пусть тривиальное решение системы (2.3) равномерно асимптотически устойчиво, причем существуют постоянные $\alpha_1 > 0$, $B_1 \geqslant 1$ такие, что для всех достаточно малых δ из неравенств

$$|z_{1j}(t_0)| + \ldots + |z_{nj}(t_0)| < \delta \qquad (j = 0, \ldots, m)$$

следуют неравенства

$$|z_{1j}(t_0)| + \ldots + |z_{nj}(t_0)| < B_1 \delta e^{-\alpha_1(t - t_0)} \qquad (j = 0, \ldots, m;\ t \geqslant t_0)$$

Тогда тривиальное решение системы (2.1) также равномерно асимптотически устойчиво, если только m больше некоторой величины, зависящей от α_1, B_1, n, τ, L_1, L_2.

Доказательство. Пусть начальные функции для системы (2.1) удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{2B \exp[n(L_1 + L_2)\tau]} \qquad (t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число. Тогда [8]

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{2B} \qquad \text{при } t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$$

Определим начальные условия для системы (2.3) в момент $t_0 + \tau$, положив $z_{ij}(t_0 + \tau) = x_i(t_0 + \tau - j\tau / m)$. Пусть

$$N_0(t) = \max_{\xi} \sum_{i=1}^{n} |z_{i0}(\xi) - x_i(\xi)| \qquad (t_0 + \tau \leqslant \xi \leqslant t)$$

Очевидно, $N_0(t_0 + \tau) = 0$, положим по определению $N_0(t) = 0$ при $t < t_0 + \tau$. Пусть $F(t) = \max_\xi \sum_{i=1}^{n} |x_i(\xi)| \qquad (t_0 - \tau \leqslant \xi \leqslant t)$

Имеем $F(t) < \varepsilon / 2B_1$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_{i0}(t)| + \sum_{i=1}^{n} |z_{i0}(t) - x_i(t)| \leqslant B_1 \frac{\varepsilon}{2B_1} + N_0(t) \qquad \text{при } t > t_0 + \tau$$

Таким образом, $F(t) \leqslant {}^1/_2\varepsilon + N_0(t)$ при $t \geqslant t_0 - \tau$.

При $t \geqslant t_0$ функции $x_i(t)$ имеют непрерывные первые производные $x_i^{\cdot}(t) = X_i(t, x(t), x(t - \tau))$. При этом справедливы неравенства $|x_i^{\cdot}(t)| \leqslant (L_1 + L_2) F(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из (2.18) (заменяя коэффициент 4 на 2 в силу непрерывной дифференцируемости $x_i(t)$) получаем

$$N_0(t) \leqslant n \int_{t_0+\tau}^{t} \left[(L_1 + L_2) N_0(\xi) + \frac{2n(L_1 + L_2)(\varepsilon/2 + N_0(\xi)) L_2\tau}{m^{1/2}}\right] d\xi =$$

$$= n \int_{t_0+\tau}^{t} \left[(L_1 + L_2)\left(1 + \frac{2n\tau L_2}{m^{1/2}}\right) N_0(\xi) + \frac{n\varepsilon L_2 (L_1 + L_2)\tau}{m^{1/2}}\right] d\xi$$

Отсюда

$$N_0(t) \leqslant \frac{n\varepsilon L_2\tau}{m^{1/2} + 2n\tau L_2} \left[\exp\left[n(L_1 + L_2)\left(1 + \frac{2n\tau L_2}{\sqrt{m}}\right)(t - t_0 - \tau)\right] - 1\right]$$

Пусть $T = \alpha_1^{-1} \ln 4B_1$ и m настолько велико, что

$$\frac{nL_2\tau}{m^{1/2} + 2n\tau L_2} \exp\left[n(L_1 + L_2)\left(1 + \frac{2n\tau L_2}{\sqrt{m}}\right)(T + 2\tau)\right] - 1 < \frac{1}{8B_1}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N_0(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8B_1} < \varepsilon \qquad \text{на отрезке } [t_0 + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqslant B_1 \frac{\varepsilon}{2B_1} \exp\left[-\alpha_1(t - t_0 - \tau)\right] + \frac{\varepsilon}{8B_1} < \frac{\varepsilon}{4B_1} \qquad [t_0 + T + \tau,\ t_0 + T + 3\tau]$$

Доказательство завершается таким же образом, как и раньше.

Замечание 3.2. Если системы (2.3), приближающие систему (2.1), при всех достаточно больших m удовлетворяют условиям теоремы 3.2, причем постоянные B_1 и α_1 не зависят от m, то тривиальное решение системы (2.1), как следует из теоремы 3.2, равномерно асимптотически устойчиво. Из замечания к теореме 3.1 следует, кроме того, что устойчивость тривиального решения системы с запаздыванием, удовлетворяющей условиям теоремы 3.1, всегда может быть установлена при помощи достаточно точной оценки постоянных B_1 и α_1 приближающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений при достаточно большом m и применения теоремы 3.2.

Поступила 19 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
3. Репин Ю. М., Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.