Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ЗАДАЧЕ ОБ УСПОКОЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МИНИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье рассматривается задача о построении управления $u(t)$, приводящего линейную систему в состояние равновесия при условии минимума заданной интенсивности управления.

§ 1. Рассмотрим управляемую систему

$$dx / dt = Ax + Bu \tag{1.1}$$

Здесь x — n-вектор фазовых координат $\{x_i\}$ объекта, u — r-вектор управляющих сил $\{u_j\}$, A, B — $(n \times n)$ и $(n \times r)$ — матрицы $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$ соответственно. Пусть задано начальное состояние x° системы (1.1), указан отрезок времени $0 \leqslant t \leqslant T$ и выбраны класс U функций $u(t)$ и оценка качества управления $\xi[u(\tau)]$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$.

Задача состоит в выборе управления $u^\circ(t)$, которое переводит систему (1.1) из состояния $x(0) = x^\circ$ в состояние $x(T) = 0$ и удовлетворяет условию

$$\xi[u^\circ(\tau)] = \min_u \xi[u(\tau)] \quad \text{при } u \text{ из } U \tag{1.2}$$

Рассматриваемая задача относится к кругу проблем оптимального управления и ее можно решать одним из известных методов теории оптимальных процессов, которая для линейных систем (1.1) разработана достаточно полно. Заменой времени t на $-t$ условия задачи можно трансформировать так, что $x(0) = 0$, $x(T) = x^\circ$. Такую задачу и обсудим.

Пусть $f_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы $F(t)$ решений однородной системы (1.1). Координаты $x_i(T)$ движения (1.1)

$$x_i(T) = \int_0^T h^{(i)}(\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$h^{(i)}(\tau) = \left\{ h_j^{(i)}(\tau) = \sum_{k=1}^n f_{ik}(T-\tau)\, b_{kj} \right\} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

удобно трактовать как значения линейного функционала

$$\eta_u[h(\tau)] \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T) \qquad x_i(T) = \eta_u[h^{(i)}(\tau)] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

порожденного вектор-функцией

$$u(\tau) = \{u_j(\tau)\} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T, \ j = 1, \ldots, r)$$

Здесь символ $h(\tau) \cdot u(\tau)$ означает скалярное произведение векторов $\{h_j(\tau)\}$ и $\{u_j(\tau)\}$. Тогда задача об управлении сводится к задаче [1] о построении функционала η_u°, порожденного функцией $u^\circ(\tau)$ и удовлетворяющего условиям (1.2), (1.4). Эту задачу можно трактовать как проблему моментов, или как игру, или как проблему отделения множеств и т. д. [2]. Такой подход к задаче об управлении был предложен в статье [3]. Трактовка задач управления как проблем из функционального анализа встречалась в ряде работ в различных формах. Ниже также описывается одна из форм этого подхода к задаче; вводимый критерий оптимальности принципиально не новый по сравнению с [2], однако приведенная здесь форма критерия имеет некоторые полезные особенности.

Будем выбирать функции $u(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$ из таких классов U, которые порождают линейные функционалы

$$\eta_u [h(\tau)] = \int_0^T h(\tau)\cdot u(\tau)\, d\tau$$

на вектор-функциях $h(\tau)$ из какого-либо нормированного функционального пространства $\{h(\tau)\}$ с некоторой нормой $\rho[h(\tau)]$. Норму функционала $\eta_u[h(\tau)]$ будем обозначать символом $\rho^*[u]$. Оценка $\xi[u]$, выбранная в задаче об управлении, должна иметь смысл для функций $u(\tau)$ из U. Кроме того, будем предполагать, что выполняются следующие условия.

(1) Оценка $\xi[u]$ положительна при $\rho^*[u] > 0$ и величины $\rho^*[u]$ равномерно ограничены

$$\rho^*[u] \leqslant N(\beta) \quad \text{при } \xi[u] = \beta \text{ для всех } \beta > 0 \ (\xi[0] = 0) \tag{1.5}$$

(2). Каково бы ни было число $\beta > 0$, если на элементах $h(\tau)$, удовлетворяющих условию

$$\eta_u [h(\tau)] \leqslant \beta \quad \text{при всех } u \text{ из } \xi[u] = \beta \tag{1.6}$$

выполняется соотношение

$$\sup_h (\eta_{u^*}[h(\tau)]) = \beta \tag{1.7}$$

то справедливо неравенство

$$\xi[u^*] \leqslant \beta \tag{1.8}$$

Для решения задачи (1.2), (1.4) следует рассмотреть множество E_β элементов $h(\tau)$ вида

$$h(\tau) = \sum_{i=1}^n l_i h^{(i)}(\tau) \tag{1.9}$$

которые удовлетворяют условию (1.6). Предположим, что величина $\alpha = l\cdot x^\circ$ при каждом β из интервала $0 < \beta < \beta_1$ при условиях (1.6), (1.9) имеет конечный положительный максимум

$$\alpha(\beta) = \max\, l\cdot x^\circ \tag{1.10}$$

Обозначим символом $h_\beta(\tau)$ элемент

$$h_\beta(\tau) = \sum_{i=1}^n l_i(\beta)\, h^{(i)}(\tau) \in E_\beta \tag{1.11}$$

на котором достигается этот максимум. Пусть число $\beta^\circ < \beta_1$ удовлетворяет равенству

$$\alpha(\beta^\circ) = \beta^\circ \tag{1.12}$$

причем

$$\alpha(\beta) > \beta \quad \text{при } 0 < \beta < \beta^\circ \tag{1.13}$$

Тогда существует оптимальное управление $u^\circ(\tau)$ и это управление удовлетворяет условию (1.14)

$$\eta_{u^\circ}[h^\circ(\tau)] = \max_u (\eta_u[h^\circ(\tau)]) = \beta^\circ \text{ при } \xi[u]=\beta^\circ \ (h^\circ(\tau)=h_{\beta^\circ}(\tau))$$

Действительно, рассмотрим в пространстве $\{h(\tau)\}$ выпуклые множества

$$H = \left\{\sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}(\tau) \quad \text{при} \quad x^\circ \cdot l = \beta^\circ\right\} \tag{1.15}$$

$$E = \{\eta_u[h(\tau)] \leqslant \beta^\circ \text{ при всех } u \text{ из } \xi[u]=\beta^\circ\} \tag{1.16}$$

Множество E вследствие (1.5) содержит ε-окрестность нулевого элемента $h(\tau) = 0$, где $\varepsilon < \beta^\circ / N(\beta^\circ)$. По смыслу чисел $\alpha(\beta)$ (1.10) и вследствие равенства (1.12) внутренние элементы $h(\tau)$ из E (1.16) не содержатся в H (1.15). Следовательно, множества H и E удовлетворяют условиям, при которых можно воспользоваться теоремой о разделимости подмножеств [1] (стр. 443—447). На основании этой теоремы существует линейный функционал

$$\eta_{u^\circ}[h(\tau)] = \int_0^T h(\tau)\cdot u^\circ(\tau)\,d\tau \tag{1.17}$$

который удовлетворяет условиям

$$\eta_{u^\circ}[h(\tau)] = \beta^\circ \quad \text{при} \quad h(\tau) \quad \text{из} \quad H \tag{1.18}$$

$$\eta_{u^\circ}[h(\tau)] \leqslant \beta^\circ \quad \text{при} \quad h(\tau) \quad \text{из} \quad E \tag{1.19}$$

Функция $u^\circ(\tau)$ в (1.17) и является оптимальным управлением. В самом деле, из (1.15) и (1.18) следует, что

$$\eta_{u^\circ}[h^{(i)}(\tau)] = x_i^\circ \quad (i = 1, \ldots, n)$$

т. е. выполнено условие (1.4). Кроме того, из (1.6) — (1.8), (1.10) — (1.12), (1.15), (1.16), (1.18) и (1.19) следует

$$\xi[u^\circ] \leqslant \beta^\circ = \alpha(\beta^\circ) \tag{1.20}$$

Не может быть управления $u^*(\tau)$, которое решало бы задачу об управлении при $\xi[u^*] = \beta^* < \beta^\circ$. Действительно, если предположить противное, то из (1.4), (1.10), (1.11) следует

$$\eta_{u^*}[h^*(\tau)] = \alpha(\beta^*) \quad (h^* = h_{\beta^*}) \tag{1.21}$$

Но $h^*(\tau)$ содержится в E_{β^*} и, следовательно, по (1.6), должно быть $\eta_{u^*}[h^*(\tau)] \leqslant \xi[u^*] = \beta^*$. Это неравенство и равенство (1.21) противоречат (1.13). Теперь из (1.15), (1.16), (1.18), (1.19) и (1.20), по определению $h^\circ(\tau)$, следует (1.14).

Итак, построенное управление $u^\circ(t)$ действительно является оптимальным и удовлетворяет условиям (1.14).

Примечание 1.1. Анализ рассуждений, приведенных выше, показывает, что для справедливости данного критерия оптимальности достаточно, чтобы условие (1.5) выполнялось лишь при $\beta = \beta^\circ$, так как это условие требовалось лишь для того, чтобы множество E (1.16) содержало ε-окрестность нулевого элемента $h(\tau) = 0$.

§ 2. Описанная в § 1 форма критерия оптимальности полезна по следующей причине. Здесь не требуется заранее подбирать основное нормированное пространство $\{h(\tau)\}$ так, чтобы величина $\xi[u]$ определяла норму линейного функционала $\eta_u[h(\tau)]$ на этом именно пространстве, но нужно лишь найти множества E_β элементов $h(\tau)$ вида (1.9), удовлетворяющих условию (1.6). т. е. условию

$$\int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}(\tau)\Big)\cdot u(\tau)\,d\tau \leqslant \xi\,[u] \quad \text{при} \quad \xi\,[u]=\beta \tag{2.1}$$

Это можно сделать подчас из более простых соображений, чем построение исходного пространства $\{h(\tau)\}$ с нормой $\rho\,[h]$, обеспечивающей условие $\rho^*\,[u] = \xi\,[u]$. Рассмотрим это на примере.

Пусть требуется привести к равновесию систему

$$dx\,/\,dt = Ax + bu \tag{2.2}$$

где x — n-вектор, u — скаляр, при условии

$$\xi\,[u(\tau)] = \max\Big[\max_\tau \varphi(\tau, |u(\tau)|),\ \int\limits_0^T \psi(\tau)\,|u(\tau)|\,d\tau\Big] = \min \tag{2.3}$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(t, y)$ — заданные функции, положительные при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $y > 0$. Будем предполагать, что функции $\psi(t)$ и $\varphi(t, y)$ непрерывны при каждом t, функция $\varphi(t, y)$ монотонно возрастает по y и $\lim \varphi(t, y) = \infty$ при $y \to \infty$, $\varphi(t, 0) = 0$.

Примечание 2.1. Предположение о непрерывности функций $\varphi(t, y)$ и $\psi(t)$ не является необходимым для проведения рассуждений по описанному ниже плану. Функции $\varphi(t, y)$ и $\psi(t)$ могут быть разрывными. Важно лишь, чтобы рассматриваемая ниже функция $\omega(t, \beta)$ обладала нужными свойствами меры на отрезке $[0, T]$.

Таким образом, рассматривается задача об управлении при условии минимальности и максимального значения управляющей силы $u(t)$ и импульса этой силы, измеренных в масштабах $\varphi(t, |u|)$ и $\psi(t)$. В качестве исходного пространства $\{h(\tau)\}$ выберем пространство функций $h(\tau)$, интегрируемых по Лебегу на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$. В качестве пространства U функций $u(\tau)$ выберем множество измеримых, почти всюду ограниченных на $[0, T]$ функций $u(\tau)$, так как именно такие функции порождают функционалы $\eta_u\,[h(\tau)]$ на функциях $h(\tau)$ из выбранного пространства $\{h(\tau)\}$.

При этом [1]

$$\rho\,[h] = \int\limits_0^T |h(\tau)|\,d\tau \tag{2.4}$$

$$\rho^*\,[u] = \text{vrai sup}\,(|u(\tau)| \quad \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant T) \tag{2.5}$$

Величина $\xi\,[u]$ (2.3) для выбранного класса U функций $u(\tau)$ (2.5) имеет смысл, если только величину $\max_\tau$ в левой части (2.3) понимать в смысле [1] (стр. 115) vrai sup_τ. Оценка $\xi\,[u]$ удовлетворяет условиям (1), (2). Действительно, выполнение условий $\xi\,[u] > 0$ при $\rho^*\,[u] > 0$ и (1.5) обеспечивается свойствами функций $\varphi(t, |u|)$ и $\psi(t)$. Проверим выполнение условий (1.6)—(1.8). Пусть $u^*(\tau)$ функция из U, удовлетворяющая условию (1.8) при $\xi\,[u]$ (2.3) и при $\beta = \beta^*$. Это означает, что

$$\text{vrai sup}_\tau\, \varphi(\tau, |u^*(\tau)|) = \beta^*, \qquad \int\limits_0^T \psi(\tau)\,|u^*(\tau)|\,d\tau \leqslant \beta^* \tag{2.6}$$

или

$$\int\limits_0^T \psi(\tau)\,|u^*(\tau)|\,d\tau = \beta^*, \qquad \text{vrai sup}_\tau\, \varphi(\tau, |u^*(\tau)|) < \beta^* \tag{2.7}$$

Функция $\varphi(t, y) = \beta$ при наших предположениях имеет для $\beta > 0$ обратную непрерывную функцию $y = \omega(t, \beta)$, т. е.

$$\varphi(t, \omega(t, \beta)) = \beta \tag{2.8}$$

причем при каждом $t \in [0, T]$ функция $\omega(t, \beta)$ является монотонно возрастающей функцией β. Обозначим символом $\mu(t, \beta)$ функцию

$$\mu(t, \beta) = \frac{1}{\omega(t, \beta)} \tag{2.9}$$

Эта функция положительна и непрерывна при $\beta\quad 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть функция $u^*(t)$ удовлетворяет условию (2.6). При условии (2.6) для любого малого $\delta > 0$ на отрезке $[0, T]$ есть множество Δ_δ с мерой $\mu(\Delta_\delta) > 0$, где $\varphi(\tau, |u^*(\tau)|) > \beta^* - \delta$. На этом множестве функция $|u^*(\tau)| = \omega(\tau, \varphi)$ удовлетворяет условию $\omega(\tau, \varphi) > \omega(\tau, \beta^*) - \varepsilon$, причем по непрерывности рассматриваемых функций $\varepsilon \to 0$ при $\delta \to 0$. Построим функцию $h^\varepsilon(\tau) = \beta\mu(\tau, \beta) \operatorname{sign} u^* : \mu(\Delta_\delta)$ при τ из Δ_δ и $h^\varepsilon(\tau) = 0$ при τ вне Δ_δ. Функция $h^\varepsilon(\tau)$ содержится в множестве E_β, так как какова бы ни была функция $u(\tau)$ с $\operatorname{vrai\,sup}_\tau \varphi(\tau, |u(\tau)|) \leqslant \beta$, т. е. функция $u(\tau)$ с $\operatorname{vrai\,sup}_\tau (|u(\tau)| / \omega(\tau, \beta)) \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\int_0^T h^\varepsilon(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \leqslant \int_{\Delta_\delta} [\beta\mu(\tau, \beta)\, \omega(\tau, \beta) / \mu(\Delta_\delta)]\, d\tau \leqslant \beta \tag{2.10}$$

и при этом, если $\beta^* > \beta$, то

$$\int_0^T h^\varepsilon(\tau)\, u^*(\tau)\, d\tau \geqslant \int_{\Delta_\delta} [\beta\mu(\tau, \beta^*)\, [\omega(\tau, \beta^*) - \varepsilon] / \mu(\Delta_\delta)]\, d\tau \geqslant \beta_1 - \varkappa \tag{2.11}$$

Так как при $\varepsilon \to 0$ имеем $\varkappa \to 0$ и $\beta_1 > \beta$, то из (2.10) и (2.11) заключаем что при $\beta^* > \beta$ (1.7) не выполняется.

Пусть теперь выполняется условие (2.7). Любая функция $h(\tau)$, удовлетворяющая условию

$$|h(\tau)| = \psi(\tau)$$

содержится в E_β, так как тогда

$$\left|\int_0^T h(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \int_0^T \psi(\tau)\, |u(\tau)|\, d\tau \leqslant \beta \quad \text{при} \int_0^T \psi(\tau)\, |u(\tau)|\, d\tau \leqslant \beta$$

Но при $h(\tau) = \psi(\tau) \operatorname{sign} u^*(\tau)$ и при выполнении условия (2.7) имеем

$$\int_0^T \psi(\tau)\, u^*(\tau)\, [\operatorname{sign} u^*(\tau)]\, d\tau = \int_0^T \psi(\tau)\, |u^*(\tau)|\, d\tau = \beta^* \tag{2.12}$$

Откуда снова следует невыполнение (1.7). Итак, оценка $\xi[u]$ (2.3) действительно удовлетворяет условиям (1) и (2).

Будем предполагать, что система (2.4) вполне управляема [4]. Тогда задача будет иметь решение.

Согласно § 1, следует рассмотреть множество функций $h(\tau)$ вида (1.8), удовлетворяющих условию (2.1), и при $\beta > 0$ найти такие значения $l_i(\beta)$, при которых реализуется (1.10). Условию (2.1) будут удовлетворять такие и только такие функции $h(\tau)$ (1.8), которые удовлетворяют условию

$$\int_\Delta \frac{\omega(\tau, \beta)}{\beta}\, |h(\tau)|\, d\tau \leqslant 1 \tag{2.13}$$

при измеримых подмножествах Δ из $[0, T]$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Delta} \frac{\omega(\tau, \beta)}{\beta} \psi(\tau)\, d\tau = 1 \tag{2.14}$$

в случае, если эти подмножества содержатся в отрезке $[0, T]$.

Если же выполняется неравенство

$$\int\limits_{0}^{T} \frac{\omega(\tau, \beta)\, \psi(\tau)}{\beta}\, d\tau \leqslant 1 \tag{2.15}$$

то Δ в (2.13) означает отрезок $[0, T]$.

Отсюда следует, что числа $\alpha(\beta)$ (1.10) можно определять из условий

$$\alpha(\beta) = \frac{1}{\gamma(\beta)} \tag{2.16}$$

$$\gamma(\beta) = \min_l \max_{\Delta} \left[\int\limits_{\Delta} \frac{\omega(\tau, \beta)}{\beta} \left|\sum_{i=1}^{n} l_i h^{(i)}(\tau)\right| d\tau\right] \quad \text{при } l \cdot x^{\circ} = 1$$

где множества Δ удовлетворяют условию (2.14) (или совпадают с отрезком $[0, T]$, если выполняется условие (2.15)). Если система вполне управляема, то величина $\gamma(\beta)$ зависит от β непрерывно. Из (2.16) следует по свойствам функции $\omega(\tau, \beta)$, что при достаточно малых значениях β величина $\beta\gamma(\beta)$ произвольно мала. Но это означает, что при достаточно малых значениях β выполняется неравенство $\alpha(\beta) > \beta$. Напротив, при достаточно больших значениях β величина $\beta\gamma(\beta)$ становится произвольно большой. Действительно, предположив противное, можно получить последовательности $\beta_k \to \infty$, Δ_k и $\{l_i(\beta_k)\}$, для которых выполнялось бы:

$$\overline{\lim} \int\limits_{\Delta_k} \omega(\tau, \beta_k) \left|\sum_{i=1}^{n} l_i(\beta_k)\, h^{(i)}(\tau)\right| d\tau = N < \infty \quad \text{при } k \to \infty \tag{2.17}$$

Если мера $\mu(\Delta_k)$ не стремится к нулю при $k \to \infty$, то соотношение (2.17) невозможно вследствие $\min_\tau \omega(\tau, \beta_k) \to \infty$ и по той причине, что при условиях полной управляемости

$$\min \int\limits_{\Delta} \left|\sum_{i=1}^{n} l_i(\beta_k)\, h^{(i)}(\tau)\right| d\tau > \varepsilon(\varkappa) > 0 \quad \text{при } l \cdot x^{\circ} = 1$$

равномерно по всем Δ из $[0, T]$, удовлетворяющим условию $\mu(\Delta) > \varkappa > 0$. Если же $\mu(\Delta_k) \to 0$, то при выполнении (2.14) неравенство (2.17) снова выполняться не может, так как оно означало бы, что

$$\min_l \max_\tau \left\{\left|\sum_{i=1}^{n} l_i(\beta_k)\, h^{(i)}(\tau)\right| \Big/ \psi(\tau)\right\} = 0 \quad \text{при } l \cdot x^{\circ} = 1 \tag{2.18}$$

но (2.18) при условиях полной управляемости системы (2.1) выполняться не может. Следовательно, при больших значениях β выполняется неравенство $\alpha(\beta) < \beta$. Но это означает, что существует число β°, удовлетворяющее условиям (1.12) и (1.13). Следовательно, для рассматриваемой за дачи существует оптимальное управление $u^\circ(t)$, которое определяется так:

$$u^\circ(t) = \omega\ (t, \beta^\circ) \operatorname{sign}\Big(\sum_{i=1}^{n} l_i^\circ h^{(i)}\ (t)\Big) \quad \text{при } t \text{ из } \Delta^\circ$$
$$u^\circ(t) = 0\,. \quad \text{при } t \text{ вне } \Delta^\circ \tag{2.19}$$

Здесь l_i° и Δ° — решения задачи (2.16) при значении $\beta = \beta^\circ$, удовлетворяющем условиям (1.12) и (1.13).

Задача (2.16) может решаться численно спуском по величинам $\{l_i\}$, так как в широком классе случаев множества Δ (2.14) имеют простую структуру и состоят из небольшого числа отрезков на $[0, T]$.

§ 3. Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера задачу об успокоении линейного осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varkappa^2 x = u \qquad (\varkappa = \text{const}) \tag{3.1}$$

за время T одного периода его собственных колебаний $T = 2\pi / \varkappa$. Пусть при этом требуется минимизировать величину

$$\max \Big[\max_\tau u^2\ (\tau),\ \nu \int_0^T |\, u\ (\tau)\,|\, d\tau\Big] = \min_u \qquad (\nu > 0 = \text{const}) \tag{3.2}$$

Примечание 3.1. Как и выше, рассмотрим здесь, вместо задачи об успокоении системы (3.2) из положения $x\ (0) = x^\circ$ в положение $x\ (T) = 0$, задачу разгона системы (3.2) из состояния равновесия $x\ (0) = 0$ в состояние $x\ (T) = x^\circ$. Оптимальное управление $u^\circ\ (\vartheta)$ исходной задачи получается из решения вспомогательной проблемы $u^\circ\ (t)$ преобразованием отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$ в отрезок $0 \leqslant \vartheta \leqslant T$ заменой $\vartheta = T - t$.

Уравнение (3.1) в форме системы (2.1) имеет вид

$$dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_2 / dt = -\varkappa^2 x_1 + u \tag{3.3}$$

Фундаментальная матрица $F\ (t)$ системы (3.3) определяется равенством

$$F\ (t) = \{f_{ij}\ (t)\} = \begin{pmatrix} \cos \varkappa t & \varkappa^{-1} \sin \varkappa t \\ -\varkappa \sin \varkappa t & \cos \varkappa t \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Функция $\omega\ (t, \beta)$ имеет в данном случае вид

$$\omega\ (t, \beta) = \omega\ (\beta) = \sqrt{\beta} \tag{3.5}$$

Поэтому задача (2.16) в данном случае сводится к задаче

$$\gamma\ (\beta) = \min_l \max_\Delta \Big[\int_\Delta \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Big| -\frac{l_1}{\varkappa} \sin \varkappa\tau + l_2 \cos \varkappa\tau \Big| d\tau\Big] \quad \text{при } l_1 x_{10} + l_2 x_{20} = 1$$
$$\mu\ (\Delta) = \min\Big(\frac{\sqrt{\beta}}{\nu}, \frac{2\pi}{\varkappa}\Big) \tag{3.6}$$

Минимум в левой части (3.6) достигается при условии

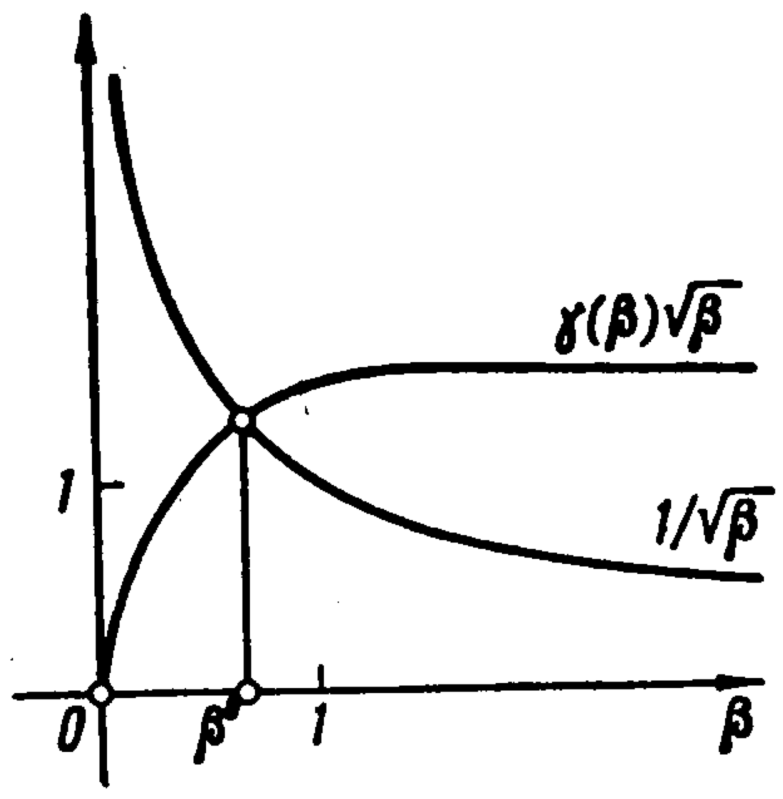
$$\Big(\frac{l_1}{\varkappa}\Big)^2 + l_2^2 = \min \quad \text{при} \quad l_1 x_{10} + l_2 x_{20} = 1$$

т. е. при

$$l_1\,(\beta) = \frac{\varkappa^2 x_{10}}{\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2} \qquad l_2\,(\beta) = \frac{x_{20}}{\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2} \tag{3.7}$$

$$\Delta(\beta) = \{\Delta_1(\beta),\ \Delta_2(\beta)\}, \quad \text{если} \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\nu} < \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{3.8}$$

$$\Delta(\beta) = \left[0,\ \frac{2\pi}{\varkappa}\right] \quad \text{если} \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\nu} \geqslant \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{3.9}$$



Здесь

$$\Delta_1 = \left[t_* + \frac{\pi}{2\varkappa} - \frac{\sqrt{\beta}}{4\nu},\ t_* + \frac{\pi}{2\varkappa} + \frac{\sqrt{\beta}}{4\nu}\right]$$

$$\Delta_2 = \left[t_* + \frac{\pi 3}{2\varkappa} - \frac{\sqrt{\beta}}{4\nu},\ t_* + \frac{3\pi}{2\varkappa} + \frac{\sqrt{\beta}}{4\nu}\right]$$

$$t_* = -\frac{\xi}{\varkappa}, \quad \cos\xi = -\frac{\varkappa x_{10}}{(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)^{1/2}}, \quad \sin\xi = \frac{x_{20}}{(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)^{1/2}}$$

Этот минимум $\gamma(\beta)$ определяется равенствами

$$\gamma(\beta) = 4\int_0^{\sqrt{\beta}/4\nu} \frac{\cos\varkappa\tau\, d\tau}{\sqrt{\beta(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)}} = \frac{4\sin[\varkappa\sqrt{\beta}/4\nu]}{\varkappa\sqrt{\beta(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)}} \quad \text{если} \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\nu} \leqslant \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{3.10}$$

$$\gamma(\beta) = 4\int_0^{\pi/2\varkappa} \frac{\cos\varkappa\tau\, d\tau}{\sqrt{\beta(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)}} = \frac{4}{\varkappa\sqrt{\beta(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)}} \quad \text{если} \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\nu} \geqslant \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{3.11}$$

Число β°, удовлетворяющее условиям (1.12) и (1.13), определяется, следовательно, как наименьший корень уравнения

$$\beta\,\gamma(\beta) = 1 \tag{3.12}$$

где функция $\gamma(\beta)$ определена равенствами (3.10) и (3.11). Графическое решение уравнения (3.12) изображено на фигуре.

Таким образом, оптимальное управление $u^\circ(t)$ задачи имеет вид

$$u^\circ(t) = \sqrt{\beta^\circ}\,\mathrm{sign}\,[\sin\varkappa(t - t_*)] \quad \text{при} \quad \left\{\begin{array}{l} \left| t - t_* - \frac{\pi}{2\varkappa}\right| < \min\left[\frac{\sqrt{\beta^\circ}}{4\nu},\ \frac{2\pi}{\varkappa}\right] \\ \left| t - t_* - \frac{3\pi}{2\varkappa}\right| < \min\left[\frac{\sqrt{\beta^\circ}}{4\nu},\ \frac{2\pi}{\varkappa}\right] \end{array}\right.$$

$$u^\circ(t) = 0 \quad \text{при других } t$$

Здесь число t определено равенством

$$t_* = -\frac{\zeta}{\varkappa}, \quad \cos\zeta = -\frac{\varkappa x_{10}}{(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)^{1/2}}, \quad \sin\zeta = \frac{x_{20}}{(\varkappa^2 x_{10}^2 + x_{20}^2)^{1/2}}$$

Примечание 3.2. Если в случае (3.8) точка $\tau = 0$ попадает внутрь отрезка $\Delta_1(\beta)$, то часть этого отрезка, соответствующая значениям $\tau < 0$, переносится вправо внутрь $[0, T]$ на величину периода T, если же в случае (3.8) внутрь $\Delta_2(\beta)$ попадает точка $\tau = T$, то часть $\Delta_2(\beta)$, соответствующая значениям $\tau < T$, переносится влево внутрь отрезка $[0, T]$ на величину периода T.

Поступила 19 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Изд. иностр. лит., 1962.
2. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
4. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления: Тр. I Конгресса ИФАК, т. I, Изд-во АН СССР, 1961.