Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Работа посвящена исследованию вопроса о возникновении синхронного одночастотного режима в системе динамических объектов с одной степенью свободы определенного типа под действием слабых взаимных связей. Сравниваются различные подходы к решению задачи о синхронизации и намечаются области их применимости. Для системы существенно нелинейных неодинаковых объектов формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости синхронного режима. В частном случае почти одинаковых объектов эти условия переходят в обобщенный интегральный критерий устойчивости [1,2]. Общая постановка задачи о синхронизации динамических систем, многочисленные примеры синхронизации в природе и технике, а также обширная библиография содержатся в работе И. И. Блехмана [1].

1. Рассмотрим систему n динамических объектов с одной степенью свободы, положение которых определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Будем полагать, что способ введения обобщенных координат не зависит от типа связей между объектами. В этом смысле обобщенную координату q_i надо рассматривать как обобщенную парциальную координату i-го объекта вне зависимости от наличия или отсутствия связи.

Далее предположим, что при рассмотрении взаимосвязанной системы удается эффективным образом ввести параметр связи μ, характеризующий степень искажений, вносимых связью в движение объекта. Не останавливаясь на обсуждении критерия малости параметра связи, будем полагать его достаточно малым.

Связи между объектами не вносят новых степеней свободы и в общем случае передают на объекты некоторое, внешнее по отношению к системе, периодическое воздействие частоты ν. Парциальные объекты, т. е. объекты при отсутствии взаимодействия, автономны и представляют собой системы материальных точек, подчиненные стационарным связям.

При указанных предположениях обобщенная функция Лагранжа взаимосвязанной системы имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i (q_i, q_i^{\cdot}) + \mu L_0 (q_1, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n, q_n^{\cdot}, \nu t) + \mu^2 \ldots \qquad (1.1)$$

В выражении (1.1) парциальный лагранжиан L_i в силу особенностей введения обобщенных координат не зависит от параметра связи, а лагранжиан связи L_0 есть функция только обобщенных парциальных координат и скоростей системы и безразмерного времени $\tau = \nu t$.

Наконец, предположим, что связи между объектами с точностью до величин порядка μ^2 носят чисто консервативный характер, и, кроме того, все непотенциальные силы в системе не зависят от времени явно.

При этом немалая часть обобщенной непотенциальной силы не зависит от параметра связи и носит парциальный характер: $Q_i = Q_i(q_i, q_i^{\cdot})$.

Обобщенная сила Q_i характеризует приток и убыль внешней энергии в объекте, сообщая ему автоколебательный характер. При отсутствии связей только она стабилизирует энергетический уровень, на котором происходит движение объекта. Обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} = \frac{\partial L_i}{\partial q_i^{\cdot}} + \mu \frac{\partial L_0}{\partial q_i^{\cdot}} + \mu^2 \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

вводимые посредством выражения для общей кинетической энергии системы, вообще зависят от типа связи. Эта зависимость пропадает (с точностью до величин порядка μ) лишь в случае потенциальных, или силовых, связей, когда $\partial L_0 / \partial q_i^{\cdot} \equiv 0$.

Поэтому обобщенные скорости, выраженные после обращения системы (1.2) через новые канонические переменные q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$, в общем случае представимы в виде рядов по малому параметру связи

$$q_i^{\cdot} = v_i(q_i, p_i) + \mu v_i^{(1)}(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n, \tau) + \mu^2 \ldots$$

$$p_i = \frac{\partial L_i(q_i, v_i)}{\partial v_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Подставим ряды (1.3) в выражение для обобщенной функции Гамильтона взаимосвязанной системы (1.4)

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^{\cdot} - L = \sum_{i=1}^{n} H_i(q_i, p_i) - \mu L_0(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, \tau) + \mu^2 \ldots$$

где парциальный гамильтониан i-го объекта

$$H_i = p_i v_i(q_i, p_i) - L_i(q_i, v_i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

Итак, уравнения движения взаимосвязанной системы объектов в канонической форме имеют вид

$$q_i^{\cdot} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i} = -\mu \frac{\partial L_0}{\partial p_i} + \mu^2 \ldots, \qquad p_i^{\cdot} + \frac{\partial H_i}{\partial q_i} - Q_i = \mu \frac{\partial L_0}{\partial q_i} + \mu^2 \ldots$$

$$(i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

2. Движение изолированных объектов ($\mu = 0$) в случае отсутствия непотенциальных воздействий Q_i описывается системой уравнений, распадающейся на n независимых чисто консервативных подсистем

$$q_i^{\circ\cdot} = \frac{\partial H_i(q_i^{\circ}, p_i^{\circ})}{\partial p_i^{\circ}}, \qquad p_i^{\circ\cdot} = -\frac{\partial H_i(q_i^{\circ}, p_i^{\circ})}{\partial q_i^{\circ}} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Каждая из подсистем (2.1) в некоторой области G_i парциальной фазовой плоскости (q, p) допускает общее решение

$$q_i^{\circ} = x_i(\psi_i, s_i), \qquad p_i^{\circ} = y_i(\psi_i, s_i) \tag{2.2}$$

либрационного или ротационного типа, 2π-периодическое по собственной быстро вращающейся фазе

$$\psi_i = \omega_i(s_i)\, t + \alpha_i \tag{2.3}$$

в том смысле, что

$$x_i(\psi_i + 2\pi, s_i) = x_i(\psi_i, s_i) + \gamma_i, \qquad y_i(\psi_i + 2\pi, s_i) = y_i(\psi_i, s_i) \tag{2.4}$$

При этом γ_i не зависят от значения s_i, а функция Гамильтона парциального объекта $H_i(q_i, p_i)$, как нетрудно показать, γ_i — периодична по q_i при $\gamma_i \neq 0$.

Общее решение (2.2) внутри области G_i непрерывным образом зависит от произвольного фазового сдвига α_i и энергетического параметра — интеграла действия s_i, вводимого соотношением

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_i(\psi_i, s_i) \frac{\partial x_i(\psi_i, s_i)}{\partial \psi_i} d\psi_i \qquad (2.5)$$

Интеграл действия взаимно однозначно и непрерывно внутри G_i связан с интегралом энергии $H_i(x_i, y_i) = h_i(s_i)$.

Частота (угловая скорость) движения объекта, вводимая соотношением

$$\omega_i(s_i) = \frac{dh_i(s_i)}{ds_i} \qquad (2.6)$$

в общем случае устанавливается в зависимости от энергетического уровня и может меняться внутри G_i в некотором конечном (или бесконечном) интервале (частотном диапазоне) $\omega_i^{(1)} < \omega_i < \omega_i^{(2)}$.

Переходя к исследованию основной системы (1.6), описывающей движение взаимосвязанных объектов, будем полагать, что непотенциальные функции $Q_i(q_i, v_i)$, лагранжиан связи $L_0(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, \tau)$, равно как и все слагаемые порядка μ^2 и выше, ограничены, аналитичны по всем своим аргументам, γ_i-периодичны по переменным q_i и 2π-периодичны по τ внутри такой области $2n$-мерного фазового пространства системы, которая определяется тем, что пары (q_i, p_i) лежат внутри G_i.

3. Произведем в системе (1.6) каноническую замену переменных по формулам

$$q_i = x_i(\varphi_i, J_i) \qquad p_i = y_i(\varphi_i, J_i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

что возможно, поскольку вследствие (2.5)

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i}\frac{\partial y_i}{\partial J_i} - \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_i}\frac{\partial x_i}{\partial J_i} = 1 \qquad (3.2)$$

В результате придем к следующей специфической системе относительно новых канонических переменных «действие — угол»

$$J_i^{\cdot} - \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} Q_i = \mu \frac{\partial L_0}{\partial \varphi_i} + \mu^2 \ldots, \qquad \varphi_i^{\cdot} - \omega_i(J_i) + \frac{\partial x_i}{\partial J_i} Q_i = -\mu \frac{\partial L_0}{\partial J_i} + \mu^2 \ldots$$
$$(i = 1, \ldots, n) \qquad (3.3)$$

При исследовании системы (3.3) необходимо иметь в виду, что вследствие слабости связей синхронный режим в системе оказывается возможным, если в системе изолированных друг от друга парциальных объектов возможны движения, качественно и количественно близкие к искомым синхронным на конечном, но достаточно большом промежутке времени. Но тогда порождающая система всегда может быть выбрана так, чтобы она действительно допускала синхронное решение требуемого вида [1].

[1] Говоря здесь о порождающей системе, имеем в виду, что из левых частей системы (3.3) могут быть выделены дополнительно слагаемые порядка μ.

Пусть частотные диапазоны объектов малы,

$$\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)} = 0\,(\mu) \quad \text{или} \quad \omega_i\,(J_i) = \lambda_i + \mu\,\omega_i'\,(J_i) \tag{3.4}$$

тогда системе, получающейся из (3.3) при $\mu = 0$, в общем случае отвечает многочастотный режим, характеризуемый парциальными частотами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, стабилизация энергетического уровня которого происходит вследствие действия непотенциальных сил $Q_1, \ldots, Q_n$. В этом случае синхронное порождающее решение может иметь место лишь при условии

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \nu \tag{3.5}$$

Если частотные диапазоны объектов немалы, то непотенциальные силы в парциальных объектах начинают играть роль стабилизаторов частоты, и для существования синхронного решения порождающей системы на них необходимо наложить некоторые жесткие ограничения.

Синхронизация в системе существенно различных объектов возможна, если стабилизирующее действие непотенциальных сил не сказывается в порождающем приближении, т. е. если оно мало и, следовательно, не превосходит синхронизирующих воздействий, передаваемых связью. Отсюда естественно допущение об общей слабости притока и убыли энергии в парциальном объекте

$$Q_i\,(q_i, q_i^{\cdot}) = \mu F_i\,(q_i, q_i^{\cdot}) \tag{3.6}$$

При этом порождающая система уравнений (3.3) совпадает с (2.1) и поэтому допускает синхронное решение, если пересечение частотных диапазонов отдельных порождающих объектов

$$(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) = \bigcap_{i=1}^{n} (\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}) \tag{3.7}$$

непусто и включает в себя частоту внешнего возмущения ν.

Последний случай весьма важен, ибо при этом, принципиально говоря, методами теории возмущений можно проследить дрейф частот движений отдельных объектов в процессе становления синхронного режима, в то время как рассмотрение изохронного порождающего приближения, например при вырожденной квазилинейной постановке, приводит, по существу, к проблеме становления фазовых сдвигов, амплитуд и т. п.

Разнообразные частные случаи задачи о взаимодействии автоколебательных систем посредством слабых взаимных связей, связанные с рассмотрением изохронного, обычно линейного, порождающего приближения, уже рассмотрены в литературе [3,4]. При этом, разумеется, всегда для случая существенно различных парциальных частот фиксировался факт отсутствия синхронного режима в системе.

Рассмотрим задачу о взаимодействии существенно нелинейных объектов, когда система может настраиваться на частоту внешнего возмущения в достаточно широком диапазоне, определяемом равенством (3.7). В основу исследования положим уравнения движения взаимосвязанной системы объектов относительно новых переменных «фаза - частота», которая вследствие (3.6) имеет вид

$$\omega_i^{\cdot} = \frac{\mu}{k_i\,(\omega_i)} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} F_i + \frac{\partial L_0}{\partial \varphi_i}\right) + \mu^2 \ldots$$

$$\varphi_i^{\cdot} - \omega_i = -\frac{\mu}{k_i\,(\omega_i)} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \omega_i} F_i + \frac{\partial L_0}{\partial \omega_i}\right) \mu^2 \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Переход к переменным «фаза-частота», более характерным для задач о синхронизации, не содержит особенностей, так как везде в области фазового пространства системы

$$k_i(\omega_i) = \frac{dJ_i(\omega_i)}{d\omega_i} = \frac{1}{\omega_i}\frac{dh_i(\omega_i)}{d\omega_i} = O(1) \tag{3.9}$$

4. Прежде всего, несколько обобщив задачу, рассмотрим взаимодействие существенно нелинейных почти консервативных объектов, описываемых следующей системой с многомерной быстро вращающейся фазой:

$$\omega_i^{\bullet} = \mu Y_i(\varphi, \omega, \tau) + \mu^2 \ldots, \qquad \varphi_i^{\bullet} = \omega_i + \mu X_i(\varphi, \omega, \tau) + \mu^2 \ldots \tag{4.1}$$

Здесь

$$Y_i(\varphi, \omega, \tau) = Y_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \omega_1, \ldots, \omega_n; \tau)$$

$$X_i(\varphi, \omega, \tau) = X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \omega_1, \ldots, \omega_n; \tau) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

аналитичны в некоторой области G фазового пространства системы, 2π-периодичны по быстро вращающимся фазам φ_i ($i = 1, \ldots, n$) и безразмерному времени $\tau = \nu t$.

Исследование системы (4.1) принципиально возможно на основе обобщенного метода усреднения, развитого за последнее время в работах В. М. Волосова [5]. Однако при этом возникают трудности математического характера. Поэтому ограничимся исследованием синхронного режима в системе и его малых окрестностей при достаточно малом μ при помощи метода Пуанкаре.

Порождающая система

$$\omega_i^{\circ\bullet} = 0, \qquad \varphi_i^{\circ\bullet} = \omega_i^{\circ} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

имеет общее решение

$$\omega_i^{\circ} = \nu_i, \qquad \varphi_i^{\circ} = \nu_i t + \alpha_i \tag{4.4}$$

зависящее от $2n$ произвольных постоянных ν_i и α_i.

Порождающее решение характеризуется тем, что

$$\nu_1 = \ldots = \nu_n = \nu \tag{4.5}$$

а фазовые сдвиги являются простыми корнями системы [6]

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_i[\tau + \alpha_1, \ldots, \tau + \alpha_n; \nu_1, \ldots, \nu_n; \tau]\, d\tau = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

Выполнение условий (4.5) и (4.6) гарантирует существование $2\pi/\nu$ — периодического по t решения системы (4.1), последовательные периодические приближения к которому можно искать в виде рядов

$$\omega_i = \nu + \mu\omega_i^{(1)} + \mu^2 \ldots, \qquad \varphi_i = \tau + \alpha_i + \mu\varphi_i^{(1)} + \mu^2 \ldots \tag{4.7}$$

Переходя к исследованию устойчивости в малом синхронного движения (4.7), выпишем уравнения в вариациях исходной системы (4.1)

$$\frac{dU_i}{dt} = \mu \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varphi_j}\right)V_j + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega_j}\right)U_j\right] + \mu^2 \ldots$$

$$\frac{dV_i}{dt} = U_i + \mu \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega_j}\right)V_j + \left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega_j}\right)U_j\right] + \mu^2 \ldots \tag{4.8}$$

Здесь круглые скобки означают, что соответствующая величина вычислена для порождающего приближения. Введем новые переменные

$$U_i = e^{a(\mu)t}u_i, \qquad V_i = e^{a(\mu)t}v_i \tag{4.9}$$

где $a(\mu)$ — характеристический показатель, который в данном случае [7] представим в виде ряда

$$a(\mu) = a_1\mu^{1/2} + a_2\mu + a_3\mu^{3/2} + \mu^2 \ldots \tag{4.10}$$

и тем самым сведем задачу к нахождению условий существования периодического решения системы

$$\frac{du_i}{dt} = -\mu^{1/2}a_1u_i + \mu\left\{-a_2u_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\varphi_j}\right)v_j + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial\omega_j}\right)u_j\right]\right\} - \mu^{3/2}a_3u_i + \mu^2 \ldots$$

$$\frac{dv_i}{dt} = u_i - \mu^{1/2}a_1v_i + \mu\left\{-a_2v_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial\varphi_j}\right)v_j + \left(\frac{\partial X_i}{\partial\omega l}\right)u_j\right]\right\} - \mu^{3/2}a_3v_i + \mu^2 \ldots \tag{4.11}$$

Последовательные периодические приближения к решению системы (4.11) будем разыскивать в виде рядов

$$u_i = u_i^\circ + \mu^{1/2}u_i^{(1)} + \mu u_i^{(2)} + \mu^{3/2} \ldots$$
$$v_i = v_i^\circ + \mu^{1/2}v_i^{(1)} + \mu v_i^{(2)} + \mu^{3/2} \ldots \tag{4.12}$$

Общее периодическое решение уравнений нулевого приближения

$$du_i^\circ / dt = 0, \qquad dv_i^\circ / dt = u_i^\circ \tag{4.13}$$

зависит от n произвольных постоянных M_i и имеет вид

$$u_i^\circ = 0, \qquad v_i^\circ = M_i \tag{4.14}$$

Уравнения первого приближения

$$du_i^{(1)} / dt = 0, \qquad dv_i^{(1)} / dt = u_i^{(1)} - a_1M_i \tag{4.15}$$

всегда допускают периодическое решение

$$u_i^{(1)} = a_1M_i, \qquad v_i^{(1)} = N_i \tag{4.16}$$

зависящее уже от $2n$ постоянных M_i и N_i.

Периодическое решение уравнений второго приближения (4.17)

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\varphi_j}\right) - a_1^2\delta_{ij}\right]M_j \qquad \frac{dv_i^{(2)}}{dt} = u_i^{(2)} - a_1N_i + \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial\varphi_j}\right) - a_2\delta_{ij}\right]M_j$$

существует, если

$$\sum_{j=1}^{n} M_j\left(\frac{\partial P_i}{\partial\alpha_j} - a_1^2\delta_{ij}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.18}$$

и имеет вид

$$u_i^{(2)} = a_1N_i + a_2M_i + D_i - a_1^2M_it + \sum_{j=1}^{n} M_j\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\int_0^t (Y_i)\,dt$$
$$v_i^{(2)} = C_i + D_it - a_1^2M_i\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} M_j\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\int_0^t\left[(X_i) + \int_0^t (Y_i)\,dt\right]dt \tag{4.19}$$

В равенстве (6.10) постоянные C_i произвольны, а

$$D_i = a_1^2 \frac{\pi}{\nu} M_i - \sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_0^{2\pi/\nu} \left[(X_i) + \int_0^t (Y_i)\, dt \right] dt \tag{4.20}$$

Условие нетривиальности решений системы (4.18)

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} - a_1^2 \delta_{ij} \right| = 0 \tag{4.21}$$

послужит для определения первых приближений к истинным характеристическим показателям.

Условие существования периодического решения первой группы уравнений третьего приближения

$$\frac{du_i^{(3)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varphi_j} \right) - a_1^2 \delta_{ij} \right] N_j - 2a_1 a_2 M_i -$$

$$- a_1^2 M_i \left(\frac{\pi}{\nu} - t \right) + a_1 \sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_0^{2\pi/\nu} \left[(X_i) + \int_0^t (Y_i)\, dt \right] dt - \tag{4.22}$$

$$- a_1 \sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_0^t (Y_j)\, dt + a_1 \sum_{j=0}^{n} M_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega_j} \right)$$

может быть приведено к виду

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} - a_1^2 \delta_{ij} \right) N_j = a_1 \left[2a_2 M_i - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} \right) M_j \right] \tag{4.23}$$

Здесь

$$R_i (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_i \, [\tau + \alpha_1, \ldots \tau + \alpha_n; \nu_1, \ldots, \nu_n; \tau]\, d\tau \tag{4.24}$$

Наличие периодического решения второй группы уравнений третьего приближения обеспечивается выбором постоянных, возникающих при интегрировании системы (4.22).

Вторые приближения к характеристическим показателям определяются из условия разрешимости неоднородной системы (4.23) относительно неизвестных N_j

$$a_2 = \left(2 \sum_{i=1}^{n} M_i M_i^* \right)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial P_i}{\partial \nu_j} \right) M_j M_i^* \tag{4.25}$$

Числа M_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ являются решением системы, сопряжённой с системой (4.18)

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^* \left(\frac{\partial P_j}{\partial \alpha_i} - a_1^2 \delta_{ij} \right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.26}$$

Асимптотическая устойчивость синхронного режима в системе имеет место, если

$$\operatorname{Re} a_1 = 0, \quad \operatorname{Re} a_2 < 0$$

5. Непосредственно применяя результаты, полученные в предыдущем параграфе, при исследовании синхронных решений системы (3.8), запишем основные уравнения для определения порождающих фазовых сдвигов в виде

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{k_i(\nu)}\left(f_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (F_i)\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} d\varphi_i, \qquad \Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (L_0)\, d\tau \tag{5.2}$$

— средняя за период работа непотенциальной силы парциального объекта и интеграл действия связи в порождающем приближении.

Определитель системы для определения первых приближений к характеристическим показателям

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{l_{ij}}{k_i(\nu)} - a_1^2\delta_{ij}\right)M_j = 0 \qquad \left(l_{ij} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right) \tag{5.3}$$

может быть записан в следующем симметричном виде:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} k_i(\nu)\right)^{-1} |\, l_{ij} - k_i(\nu)\, a_1^2\delta_{ij}\,| = 0 \tag{5.4}$$

Для вещественности корней определителя (5.4) ($\operatorname{Im} a_1^2 = 0$) достаточно, но, разумеется, не необходимо, чтобы хотя бы одна из квадратичных форм, соответствующих матрице

$$\| l_{ij} \|$$

или $\operatorname{diag}(k_1(\nu), \ldots, k_n(\nu))$, была знакоопределенной положительной или отрицательной. Наличие комплексного корня возможно при одновременной знакопеременности этих форм и характеризуется тождественным обращением в ноль величины

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(\nu)\, |M_i|^2$$

вычисленной для данного корня.

Для случая одинаковых чисто консервативных объектов ($k_1(\nu) = \ldots$ $\ldots = k_n(\nu) = k$) необходимое условие устойчивости $a_1^2 < 0$ сводится к требованию экстремума (максимума или минимума в зависимости от знака k) для интеграла действия связи Λ, и приходим к формулировке обобщенного интегрального критерия устойчивости. Интегральный критерий может быть обобщен и на случай внутренней синхронизации в системе почти одинаковых объектов исследуемого типа [2].

Решения системы, сопряженной с (5.3),

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{l_{ij}}{k_j(\nu)} - a_1^2\delta_{ij}\right)M_j^* = 0 \tag{5.5}$$

очевидно, выражаются через решения системы (5.3) следующим образом:

$$M_j^* = k_j(\nu)\, M_j \tag{5.6}$$

Если, кроме того, учесть, что

$$R_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -\frac{1}{k_i(\nu)}\left(f_i^* + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nu_i}\right) \tag{5.7}$$

где величины f_i^* не зависят от порождающих фазовых сдвигов, то выражения для вторых приближений к характеристическим показателям примут вид

$$a_2 = \left(2\sum_{i=1}^{n} k_i(\nu) M_i^2\right)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n}\left[-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha_i\partial\nu_j} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha_j\partial\nu_i} + \frac{\partial f_i}{\partial\nu_i}\delta_{ij}\right] M_i M_j$$

или

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i(\nu) M_i^2\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial\nu_i} M_i^2 \tag{5.8}$$

При этом полезно иметь в виду, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial\nu_i} = k_i(\nu)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) d\varphi_i \tag{5.9}$$

Выполнение условий асимптотической устойчивости $a_2 < 0$ таким образом возможно единственно вследствие наличия неконсервативных сил в системе.

В чисто консервативной системе первые приближения к характеристическим показателям не меняются, а вторые тождественно обращаются в ноль.

Заметим, что в вырожденном частном случае одного объекта ($n = 1$) полученные выше условия существования и устойчивости синхронного режима в системе прямо переходят в соответствующие соотношения, полученные А. М. Кацем [8].

В заключение автор благодарит И. И. Блехмана за обсуждение работы.

Поступила 18 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Проблемы синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Нагаев Р. Ф. О синхронизации почти одинаковых динамических систем, близких к системам Ляпунова. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Минорский Н. О синхронизации. Международный симпозиум по нелинейным колебаниям. Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1961.
4. Рубаник В. П. О взаимодействии двух нелинейных автоколебательных систем при наличии малых запаздывающих сил связи. Тр. Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд. Ун-та дружбы народов, М., 1963.
5. Волосов В. М. О высших приближениях при усреднении. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 5.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М., 1956.
7. Кушуль М. Я. О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
8. Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.