

О ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СОПЛАХ

М. Д. Ладыженский

(Москва)

Рассматривается плоское или осесимметрическое гиперзвуковое течение идеального газа в расширяющемся сопле, стенка которого близка к параболе k -й степени. На основе выведенных в работах [1, 2] общих уравнений гиперзвуковых течений изучается возможность достижения сколь угодно большого числа Маха в рассматриваемом течении. Найдены необходимые условия, которым должна удовлетворять величина k , чтобы в сопле можно было осуществить изэнтропическое расширение до $M = \infty$. При нарушении этих условий изэнтропическое течение разрушается. Построены примеры автомодельных решений, иллюстрирующие возможные случаи течений. При этом используются результаты [3, 4].

1. Рассмотрим плоское или осесимметрическое изэнтропическое сверхзвуковое течение идеального совершенного газа в расширяющемся сопле, уравнение поверхности которого имеет вид

$$y = cx^k (1 + \Delta(x)), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = 0 \quad (1.1)$$

где c и k — положительные постоянные, декартовы (цилиндрические) координаты x, y выражены в долях некоторой характерной длины, ось x в осесимметрическом потоке является осью симметрии. Начиная с некоторого сечения, течение можно считать гиперзвуковым, так как с ростом x число M неограниченно растет. Для исследования течения используем общие уравнения гиперзвуковых течений [1, 2], которые в случае плоского или осесимметрического изэнтропического течения имеют вид

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \ln \eta}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} + (\nu - 1) \frac{\sin \theta}{y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad (1.2)$$

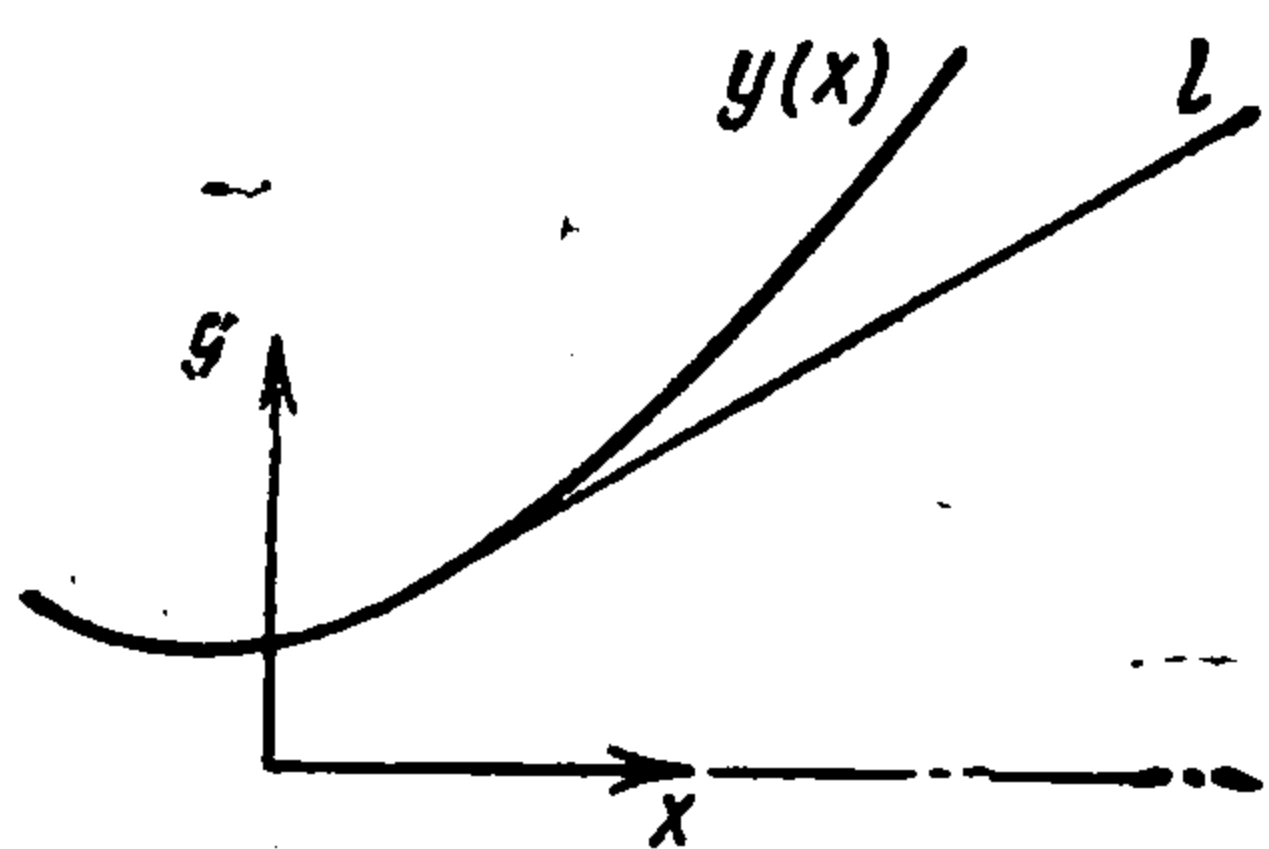
$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

Здесь γ — показатель адиабаты, θ — угол наклона вектора скорости с осью x , $\nu = 1, 2$ соответственно для плоских и осесимметрических течений, η — малая величина, связанная с местным числом Маха M соотношением

$$M = \sqrt{2} (1 - \eta) [(\gamma - 1) \eta (2 - \eta)]^{-1/2} \quad (1.3)$$

Как было показано [1, 2], свойства произвольных гиперзвуковых течений зависят от величины единственного параметра $K = M_* \theta$, где M и θ — характерные для данного течения число Маха и угол наклона вектора скорости.

2. Проследим за изменением параметра K в рассматриваемом течении. При $k \geq 1$ параметр K , очевидно, стремится к бесконечности, так как $\vartheta \sim 1$ и $M \rightarrow \infty$ с ростом x . В этом случае справедлив вывод [1,2] о появлении бесконечных областей определения решения. Уравнения [1,2] имеют простое асимптотическое решение типа источника, интенсивность которого меняется при переходе от одной линии тока к другой. При $k > 1$ вблизи стенок возможно появление областей с вакуумом, причем, как нетрудно показать, граница течения с вакуумом l будет прямой линией (фиг. 1).



Фиг. 1

Рассмотрим, как изменяется параметр K при $k < 1$. Из уравнения неразрывности, записанного в интегральной форме, имеем

$$\int_0^{y(x)} \rho u y^{\nu-1} dy = \text{const} \quad (2.1)$$

где u и ρ — осевая скорость и плотность соответственно, интеграл берется по сечению сопла при фиксированном x . При x , стремящемся к бесконечности, u стремится к максимальной скорости истечения газа в вакуум U_m . Из уравнения (2.1), предполагая, что в канале не появляется областей с вакуумом, получаем закон изменения средней по сечению плотности ρ_* , а из уравнений изэнтропичности, зная ρ_* , находим закон изменения остальных параметров потока — давления p_* , скорости звука a_* , числа Маха M_* , соответствующих данному значению ρ_*

$$\rho_* \sim x^{-\nu k}, \quad p_* \sim x^{-\nu k \gamma}, \quad a_* \sim x^{-1/2 \nu k (\gamma-1)}, \quad M_* \sim x^{1/2 \nu k (\gamma-1)} \quad (2.2)$$

В качестве характерного для данного сечения угла ϑ берем угол наклона стенки канала с осью x в данном сечении

$$\vartheta = \text{arc tg } (dy / dx) \sim x^{k-1} \quad (2.3)$$

Отсюда для параметра K , определяющего течение, получаем

$$K = M_* \vartheta \sim x^m, \quad m = \frac{k}{n} - 1, \quad n = \frac{1}{1 + 1/2 \nu (\gamma-1)} \quad (2.4)$$

Возможны следующие три случая:

$$1 > k > n, \quad k = n, \quad n > k > 0 \quad (2.5)$$

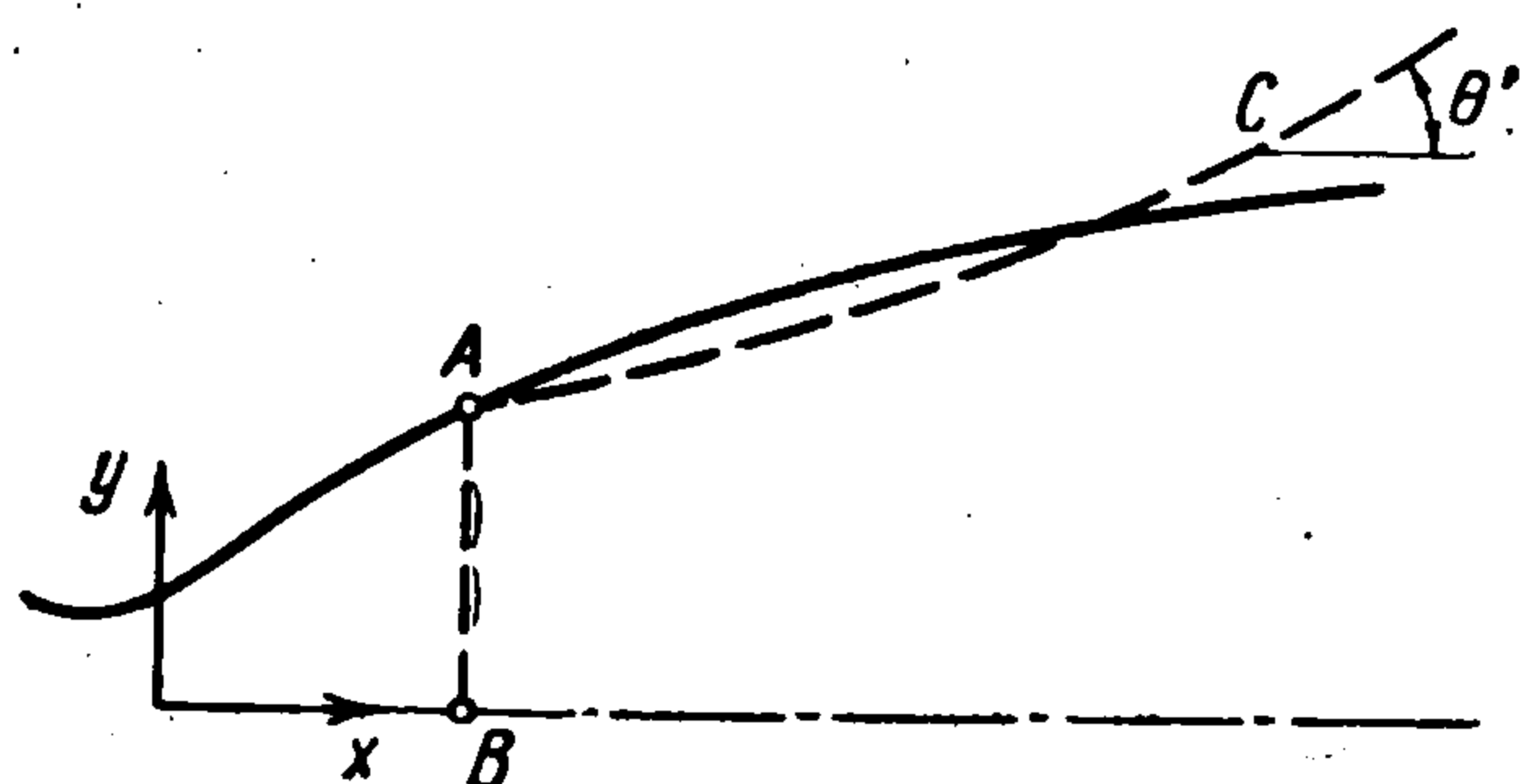
3. При $1 > k > n$ параметр K , определенный выражением (2.4), неограниченно возрастает. Нетрудно показать, что в предположении изэнтропичности течения произведение $M\vartheta$, вычисленное по значениям на стенке, также возрастает до бесконечности с ростом x . Сделав обратное предположение, что величина $M\vartheta$ на стенке всюду ограничена и что течение изэнтропично, можно по данным на стенке параметрам течения решить задачу Коши и найти течение всюду в канале. При этом, как и в случае обтекания тонкого тела, $M\vartheta$ будет всюду ограниченной величиной по-

рядка единицы. Точно так же ограниченной окажется величина $K = M_* \vartheta$, что противоречит условию.

Докажем теперь, что в рассматриваемом случае безударное течение в сопле невозможно. Снова предположим обратное: пусть в сопле осуществляется изэнтропическое течение до $x = \infty$. Выберем такое сечение AB (фиг. 2), чтобы параметр $M\theta$ всюду был достаточно велик. Проведем характеристику второго семейства AC из точки A . Согласно [1,2] эта характеристика уходит на бесконечность, не пересекаясь с осью x . Она образует на бесконечности с осью x постоянный угол θ' , определяемый соотношением (уравнение (6.1) из работы [2])

$$\theta' = \vartheta_a - \frac{2}{(\gamma - 1) \nu M_a} \quad (3.1)$$

Здесь ϑ_a и M_a — угол наклона стенки с осью x и число Маха в точке A соответственно.



Фиг. 2

Величина θ' , действительно, больше нуля, так как ввиду неограниченного возрастания K всегда можно найти такое x , при котором второе слагаемое в правой части (3.1) будет меньше первого. Характеристика AC , таким образом, неизбежно пересечется со стенкой канала, угол наклона которой с осью x стремится к нулю, и в потоке возникнут ударные волны. Предположив изэнтропичность течения, приходим к противоречию, что доказывает невозможность существования безударного течения в рассматриваемом случае.

4. При $k = n$ параметр K при стремлении $x \rightarrow \infty$ остается конечной величиной порядка единицы. Учитывая, что угол наклона стенки сопла ϑ стремится к нулю с ростом x , в уравнениях (1.2) с относительной погрешностью ϑ^2 можно принять

$$\cos \theta \simeq 1, \quad \sin \theta \simeq \theta, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} + \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.1)$$

после чего уравнения (1.2) преобразуются [1,2] в систему уравнений неустановившегося изэнтропического течения в соответствии с теорией малых возмущений гиперзвуковых течений [5,6]

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial x} + \theta \frac{\partial \ln \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} + (\nu - 1) \frac{\theta}{y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) совпадают с уравнениями одномерного неустановившегося течения, если считать η , θ , x , y соответственно энтальпией, скоростью, временем и координатой. Если стенка сопла имеет уравнение $y = cx^n$ ($\Delta(x)$ в уравнении (1.1) кладется тождественно равным нулю), то уравнения (4.2) допускают простое автомодельное решение, принадлежащее к классу решений задачи о разлете фиксированных газовых масс, полученному Л. И. Седовым [3]. Этот класс решений был использован А. А. Никольским [4] для построения изэнтропических течений в соплах и диффузорах. Для частного случая автомодельного изэнтропического движения решение имеет простой вид

$$\theta = n \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{0.5n(1-n)\lambda^2 + \alpha}{x^{(\gamma-1)\nu n}}, \quad \lambda = \frac{y}{x^n} \quad (4.3)$$

где α — произвольная положительная постоянная, n дается равенством (2.4). Легко видеть, что на стенке $y = cx^n$ выполняется условие непротекания $\theta = dy/dx$. Как было отмечено в работе [4], неравномерное распределение параметров потока по сечению сопла сохраняется вплоть до бесконечности, т. е. рассматриваемый случай действительно укладывается в рамки обычной теории малых возмущений гиперзвукового потока.

5. При $n > k > 0$ параметр K стремится к нулю с ростом x . Как было показано [1], отношение второго члена во втором уравнении (1.2) к первому равно по порядку величин K^{-2} , т. е. при $K \rightarrow 0$ приходим к уравнению $\partial\eta/\partial n = 0$ или для вытянутых сопел $\partial\eta/\partial y = 0$. Это означает, что в рассматриваемом случае для сопла справедливо гидравлическое приближение, при котором энтальпия, давление и плотность постоянны по сечению. С учетом уравнения расхода (2.1) и изэнтропичности течения получаем для ρ , p , η асимптотические выражения

$$\rho = \rho_* \left(\frac{x_*}{x}\right)^{vk}, \quad p = p_* \left(\frac{x_*}{x}\right)^{vk\gamma}, \quad \eta = \eta_* \left(\frac{x_*}{x}\right)^{\gamma k (\gamma-1)} \quad (5.1)$$

где величины с индексом * — некоторые фиксированные значения.

6. В качестве примера рассмотрим автомодельные решения [3, 7] уравнений (4.2) изэнтропических течений. Ищем решение в виде

$$\theta = \frac{y}{x} V(\lambda), \quad \eta = \frac{y^2}{(\gamma-1)x^2} z(\lambda), \quad \lambda = \frac{y}{x^\mu} \quad (6.1)$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{dz}{dV} = \frac{2z [z - 0,5(\gamma-1)V(1-V) + (V-\mu)(1-V/n)]}{V(1-V)(V-\mu) - \nu z(l-V)}, \quad l = \frac{2(1-\mu)}{\nu(\gamma-1)} \quad (6.2)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V-\mu)^2 - z}{V(1-V)(V-\mu) - \nu z(l-V)} \quad (6.3)$$

Рассмотрим подробно случай $0 < l < \mu$ (смысл параметра l выясняется в дальнейшем). Из условия $l < \mu$, как нетрудно видеть, следует $l < n < \mu$. На фиг. 3 построена картина интегральных кривых уравнения (6.2) при $\nu = 2$ в полуплоскости $z > 0$. Стрелками указано направление возрастания λ . Точки $O(z=0, V=0)$, $B(z=0,5(\gamma-1)n(1-n), V=n)$, $D(z=0, V=1)$ — узлы, точки $A(z=0, V=\mu)$ и $C(z=\infty, V=l)$ — седла. При $\nu = 1$ имеется дополнительная седловая точка

$$E(z = \mu^2(\gamma-1)^2(3-\gamma)^{-2}, V = 2\mu(3-\gamma)^{-1})$$

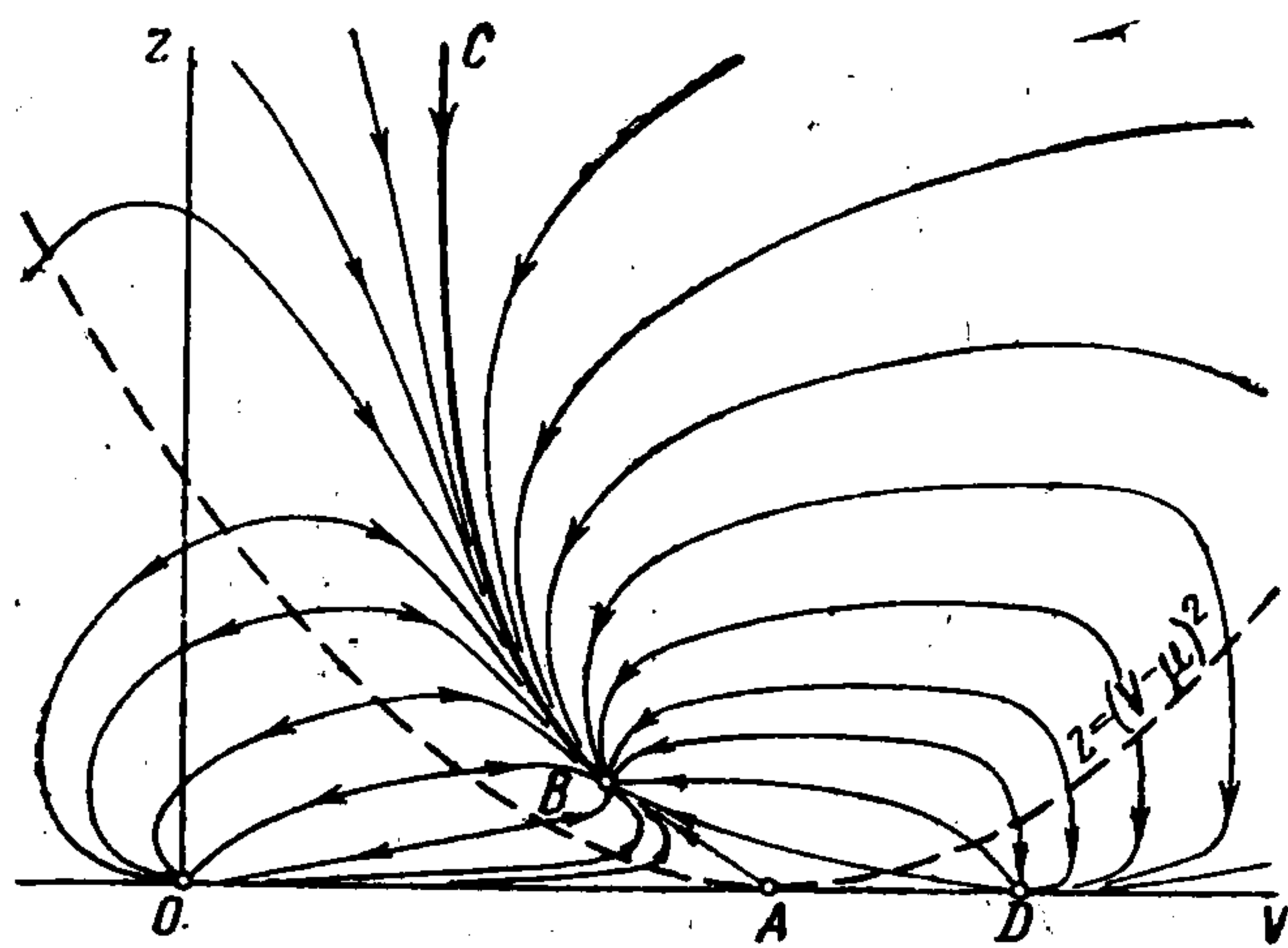
При $\nu = 2$ и $1 > \mu > \mu_{*1}$, где

$$\mu_{*1} = \frac{\gamma^2 - 3\gamma + 4 + \sqrt{2}(\gamma-1)^{3/2}}{2(\gamma^2 - 2\gamma + 2)} \quad (6.4)$$

появляются еще две особые точки, совпадающие с точками G_1 и G_2 пересечения кривых нулевого ($z = z_0(V)$) и бесконечного ($z = z_\infty(V)$) наклонов уравнения (6.2)

$$z = z_0(V) \equiv \frac{\gamma-1}{2} V(1-V) - (V-\mu) \left(1 - \frac{V}{n}\right) \quad (6.5)$$

$$z = z_\infty(V) \equiv \frac{V(1-V)(V-\mu)}{\nu(l-V)}$$



Фиг. 3

Координаты точек пересечения таковы

$$V_{1,2} = (\gamma - 1)^{-1} \{ \frac{1}{2} (3 - \gamma) + \mu (\gamma - 2) \pm \sqrt{ \frac{1}{4} (\gamma - 3)^2 - \mu [\frac{7}{4} + (\gamma - \frac{3}{2})^2] + \mu^2 [(\gamma - 1)^2 + 1] } \} \quad (6.6)$$

$$z_{1,2} = (V_{1,2} - \mu)^2$$

где индексы 1 и 2 относятся к точкам G_1 и G_2 соответственно.

При $\mu = \mu_{*1}$ кривые $z = z_0(V)$ и $z = z_\infty(V)$ имеют точку касания, координаты которой

$$V_1 = V_2 = \frac{1 + (\gamma - 2) 2^{-1/2} (\gamma - 1)^{1/2}}{\gamma^2 - 2\gamma + 2}, \quad z = (V_{1,2} - \mu_{*1})^2 \quad (6.7)$$

Отметим, что точка касания появляется левее точки B при $\gamma < 2$ и правее — при $\gamma > 2$ (фиг. 3 соответствует случаю $\mu < \mu_*$, когда точки $V_{1,2}, z_{1,2}$ отсутствуют). При $\mu < \mu_{*1}$ точка B , как нетрудно видеть, лежит выше кривой $z = (V - \mu)^2$, а при $\mu > \mu_{*1}$, она может оказаться ниже этой кривой. Кривая $z = (V - \mu)^2$ соответствует предельной линии в физической плоскости, так как при переходе через нее направление изменения λ меняется на обратное [3, 8]. Предельная линия, кроме точки A , где она пересекает кривую $z = z_\infty(V)$, при $\nu = 1$ проходит через точку E ($z = \mu^2 (\gamma - 1)^2 (3 - \gamma)^{-2}$, $V = 2\mu (3 - \gamma)^{-1}$), а при $\nu = 2$ — через точки G_1, G_2 (уравнение (6.6)), если таковые имеются. Нужная интегральная кривая проходит через седло C , в окрестности которого она может быть представлена в виде

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{z^i}, \quad a_0 = l, \quad a_1 = \frac{l(1-l)(\mu-l)}{2+\nu}, \dots \quad (6.8)$$

Из уравнения (6.3) с учетом (6.8) получаем

$$\lambda = \frac{q}{Vz} \left[1 - \frac{(l-\mu)^2 + bl - \mu - al^2}{2z} \dots \right] \quad (6.9)$$

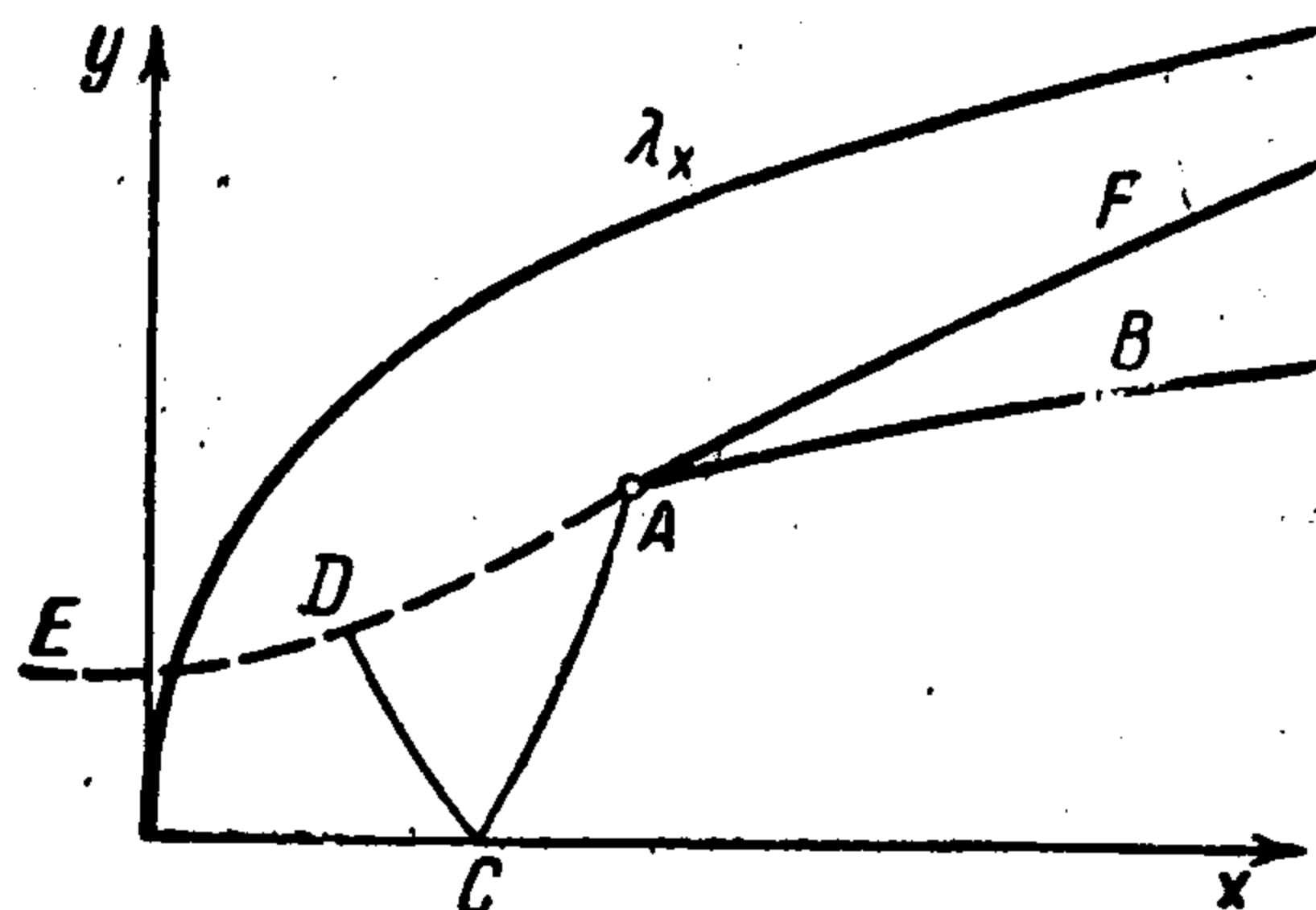
$$a = 1 + \frac{1}{2}(\nu - 1)(\gamma - 1), \quad b = 1 + \mu + \frac{1}{2}(\mu\nu - 1)(\gamma - 1)$$

Здесь q — постоянная интегрирования. Используя уравнения (6.1), (6.8) и (6.9), получаем

$$\theta = l \frac{y}{x} (1 + \omega_2 \lambda^2 + \omega_4 \lambda^4 + \dots), \quad \eta^2 = \frac{q^2}{(\gamma - 1) x^2 (1 - \mu)} (1 + \delta_2 \lambda^2 + \delta_4 \lambda^4 + \dots) \quad (6.10)$$

где постоянные ω_i и δ_i выражаются через постоянную q и коэффициенты разложений в уравнениях (6.8) и (6.9). При $\nu = 1$ (или при $\nu = 2$ и $\mu < \mu_{*1}$) решение (6.8), (6.9) и (6.10), построенное вблизи точки C , можно продолжить до особой точки B , лежащей выше кривой $z = (V - \mu)^2$, как показано на фиг. 3. В физических координатах этой особой точке соответствует значение $\lambda = \infty$. Выберем некоторую точку A в плоскости xy (фиг. 4) и проведем через нее линию тока, уравнение которой

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} V \quad (l \leq V \leq n) \quad (6.11)$$



Фиг. 4

Пределы изменения V следуют из фиг. 3. Уравнение (6.11) дает возможность установить для линии тока $y = y(x)$ неравенство

$$y(x) < Nx^n \quad (6.12)$$

где n — некоторая постоянная. Таким образом, в области течения между линией тока AB и осью x (фиг. 4) величина $\lambda = yx^{-\mu} < Nx^{n-\mu}$ стремится к нулю с ростом x , так как рассматривается случай $\mu > n$. Для получения уравнения линии тока можно использовать первое уравнение (6.10)

$$\frac{dy}{dx} = l \frac{y}{x} (1 + \omega_2 \lambda^2 + \omega_4 \lambda^4 + \dots), \quad y = cx^l [1 + \alpha_2 x^{2(l-\mu)} + \alpha_4 x^{4(l-\mu)} + \dots] \quad (6.13)$$

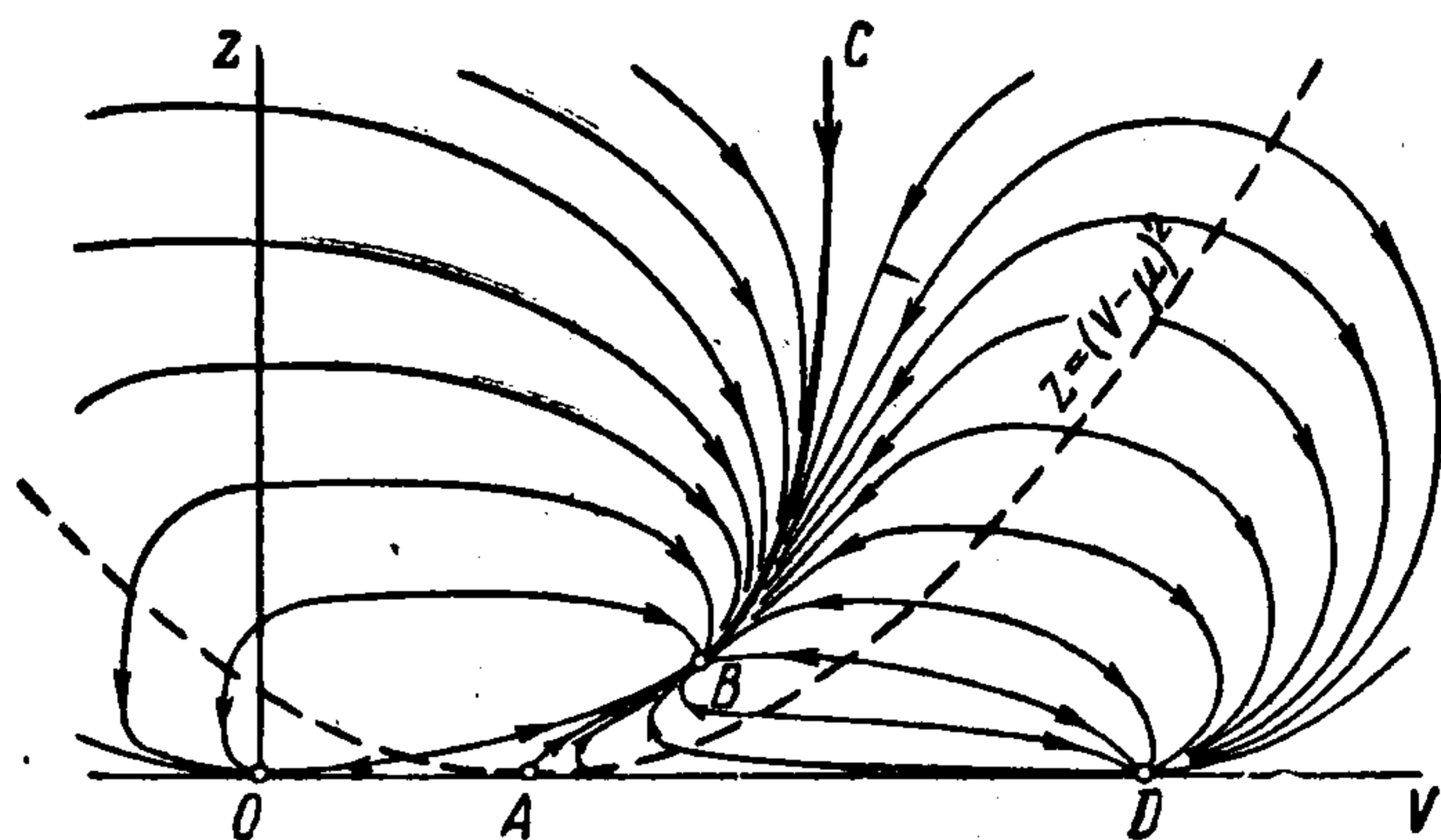
где c — постоянная интегрирования, α_i — постоянные, зависящие от ω_i и c . Так как по предположению $l < \mu$, второе уравнение (6.13) можно записать в виде (1.1), положив $l = k$ и

$$\Delta(x) = \alpha_2 x^{2(k-\mu)} + \alpha_4 x^{4(k-\mu)} + \dots, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = 0 \quad (6.14)$$

Проводя через точку A характеристику первого семейства AC (фиг. 4) и решая задачу Гурса в характеристическом треугольнике ACD , построенное решение можно «сшить» с любым решением для изэнтропического течения в канале DE . Здесь CD — характеристика второго семейства для течения в канале. Второе уравнение (6.10) можно представить с учетом выражения (6.2) для l в виде

$$\eta = \frac{q^2}{(\gamma - 1) x^{\nu k(\gamma-1)}} [1 + \delta(x, y)], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x, y) = 0 \quad (6.15)$$

Сравнивая последнее уравнение (5.1) и (6.15), убеждаемся, в подтверждение п. 5, что рассмотренное течение действительно подчиняется закону гидравлики.



Фиг. 5

Если точка B лежит ниже кривой $z = (V - \mu)^2$ (это возможно при $\nu = 2$ и $\mu > \mu_{*1}$), то интегральная кривая, проведенная из точки C , проходит через узел G_2 с координатами (6.6) и далее может пересечься с кривой $z = (V - \mu)^2$. В этом случае в области течения (фиг. 4) появляется предельная линия $\lambda = \lambda_*$. Нетрудно видеть, что если точка A выбрана в области $\lambda < \lambda_*$, то линия тока, проведенная через точку A , не пересекается с предельной линией при возрастании x .

7. При $l = \mu = n$ уравнения (6.2), (6.3) имеют простое решение $V = n$, $z = 0.5(\gamma - 1)n(1 - n)$, являющееся частным случаем решения (4.3).

8. Картина интегральных кривых при $1 > l > n > \mu$ и $\nu = 1$ (или при $\nu = 2$ и $\mu > \mu_{*2}$) показана на фиг. 5.

Здесь

$$\mu_{*2} = \frac{\gamma^2 - 3\gamma + 4 - \sqrt{2}(\gamma - 1)^{3/2}}{2(\gamma^2 - 2\gamma + 2)} \quad (8.1)$$

По-прежнему нужная интегральная кривая соединяет точки C ($z = \infty, V = l$) и B ($z = 0.5(\gamma - 1)n(1 - n), V = n$). Точка B соответствует $\lambda = \infty$ в физической плоскости. Нетрудно показать, что вдоль линии тока, проведенной из любой точки A в плоскости xy , параметр λ неограниченно возрастает с ростом x . Поэтому асимптотическое представление уравнения линии тока, полученное интегрированием уравнения (6.11) с учетом $V \rightarrow n$ при $\lambda \rightarrow \infty$, имеет вид

$$y = cx^n (1 + \Delta(x)), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = 0 \quad (8.2)$$

где c — некоторая постоянная. Исследуемое течение, как и в п. 7, относится к классу течений, рассмотренному в п. 4. Неравномерное распределение параметров потока по сечению сопла сохраняется вплоть до бесконечности, потенциальное течение при этом не разрушается.

Если точка B лежит ниже параболы $z = (V - \mu)^2$, что возможно при $\nu = 2$ и $\mu < \mu_{*2}$, то интегральная кривая, проведенная из точки C , проходит через узел G_1 с координатами (6.6). Можно показать, что точка G_1 соответствует характеристике второго семейства в физической плоскости и, следовательно, на ней допустим слабый разрыв параметров течения. Поэтому интегральная кривая, входящая в узел G_1 сверху, может быть продолжена любой интегральной кривой, выходящей из узла. Возможны, как показано на фиг. 6, интегральные кривые трех видов: z_1 , z_2 и z_3 (z_0 и z_∞ даются уравнением (6.5)). Кривая z_2 проходит через точку B , которая в рассматриваемом случае является седлом. Асимптотическое представление линии тока в этом случае по-прежнему имеет вид (8.2). Кривая z_3 , входящая в узел $D(z = 0, V = 1)$ описывает течение, переходящее при $\lambda = \infty$ в разлет газа по инерции. Кривая z_1 соответствует течению, в котором любая линия тока (AF на фиг. 3) с ростом x неизбежно пересечется с предельной линией и течение, таким образом, разрушится. Приведенные примеры подтверждают вывод п. 3 о невозможности существования безударного течения в сопле с образующей (1.1) при $1 > k > n$.

9. При $l = 1$ уравнения (6.2), (6.3) имеют простое решение $V = 1, z = 0$, соответствующее разлету частиц газа по инерции. При $l > 1$ линии тока неизбежно пересекутся с предельной линией и

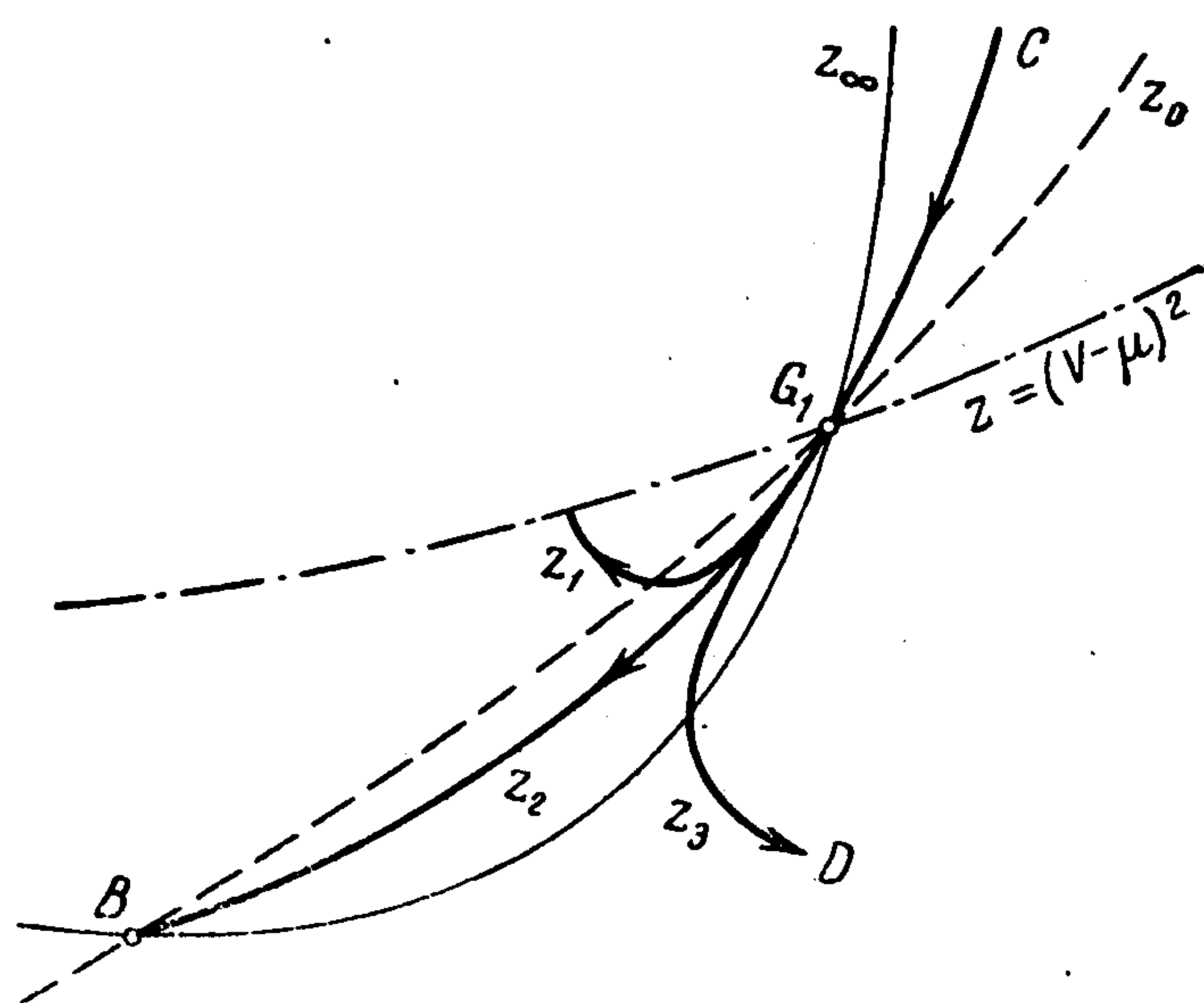
течение разрушится. Таким образом, разогнать поток до $M = \infty$ быстрее, чем в случае гиперзвукового источника, невозможно, что находится в соответствии с результатами п. 2. Таким образом, построенные примеры подтверждают выводы пп. 2—5 о построении изэнтропического течения в расширяющемся сопле.

Отметим, что при больших числах M в соплах, как правило, возникает толстый пограничный слой, оказывающий вытесняющее действие на течение в изэнтропическом ядре потока. В настоящей работе указано, каков должен быть закон расширения потенциального ядра, чтобы в сопле не возникали ударные волны.

Поступила 24 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 2.
2. Ладыженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
4. Никольский А. А. Некоторые нестационарные движения газа и их стационарные гиперзвуковые аналогии. Инженерный ж., 1962, т. 2, № 2.
5. Хейз У. Д., Пробштейн Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
7. Вешерт К. Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in gasen. Ann. Physik, 1941, vol. 39, s. 357.
8. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений (газа автотомельные движения). ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.



Фиг. 6