

## О СПЕКТРЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Р. В. Бирих, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Исследованию поведения возмущений плоскопараллельных стационарных течений посвящена обширная литература (см. [1,2]). Основное внимание обычно уделяется выяснению устойчивости этих течений и вычислению критического значения числа Рейнольдса. Между тем, для построения нелинейной теории устойчивости, при исследовании поведения возмущений произвольного вида, а также при решении ряда других проблем требуется знание не только критического возмущения, но и всего спектра нормальных возмущений во всем интервале изменения параметров — числа Рейнольдса и волнового числа.

При больших значениях числа Рейнольдса спектр возмущений может быть исследован асимптотическим методом. В работе Гроне [3] приводятся результаты такого исследования для течений Куэтта и Пуазейля и обсуждается зависимость нескольких «нижних» декрементов от числа Рейнольдса при фиксированном значении волнового числа.

В данной работе строятся и исследуются разложения нормальных возмущений и их декрементов в ряды по степеням числа Рейнольдса  $R$ . Эти разложения позволяют установить характерные особенности спектра возмущений при малых числах Рейнольдса для произвольного профиля скорости.

В покоящейся жидкости ( $R = 0$ ) возмущения монотонно затухают (все декременты вещественны и положительны). При  $R \neq 0$  вид спектра оказывается качественно различным в случаях течений с четным и нечетным профилями. В потоках с четным профилем уже при сколь угодно малом  $R$  декременты оказываются комплексными, т. е. возможны лишь «бегущие» возмущения, фазовая скорость которых растет с  $R$ . В случае потока с нечетным профилем разложения декрементов оказываются вещественными («стоячие» возмущения), однако в этом случае на оси  $R$  имеется особая точка  $R_*$ , до которой только справедливо разложение. В этой точке сливаются декременты соответствующие возмущениям разной «четности», и при  $R > R_*$  появляются комплексносопряженные декременты. Простые же пересечения в спектре, как показано, невозможны.

В качестве примеров в работе вычислены методом возмущений [несколько нижних урвней спектра декрементов при произвольных значениях волнового числа для течений Пуазейля, Куэтта и течения с кубическим профилем скорости.

**§ 1. Нормальные возмущения. Условие ортогональности.** Рассмотрим плоскопараллельное стационарное движение жидкости между плоскостями  $x = \pm h$ . Примем за единицу скорости характерную скорость этого стационарного движения  $U_0$ , а в качестве единиц расстояния и времени выберем соответственно  $h$  и  $h^2 / \nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость). Функция тока малых возмущений стационарного движения удовлетворяет линейному уравнению с коэффициентами, не зависящими от  $z$  и  $t$  ( $z$  — координата вдоль течения,  $t$  — время). Поэтому существуют нормальные

плоские возмущения вида  $\varphi(x) \exp(-\lambda t + i\alpha z)$ , где  $\alpha$  — вещественное волновое число,  $\varphi(x)$  и  $\lambda$  — амплитуда и декремент возмущения. Декремент  $\lambda$  связан с комплексной фазовой скоростью возмущения  $c = c_r + ic_i$  соотношением  $\lambda = i\alpha c$ , т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda = -\alpha c_i, \quad \operatorname{Im} \lambda = \alpha c_r \quad (1.1)$$

Амплитуда  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению Орра — Зоммерфельда

$$\left(U - \frac{c}{R}\right) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{1}{i\alpha R} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) \quad \left(R = \frac{U_0 h}{\nu}\right) \quad (1.2)$$

и условиям на твердых границах

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (1.3)$$

Здесь  $U(x)$  — скорость стационарного движения,  $R$  — число Рейнольдса. Введем вместо фазовой скорости  $c$  декремент  $\lambda$ ; запишем (1.2) в виде

$$L\varphi \equiv rH\varphi - \Delta^2 \varphi = \lambda \Delta \varphi \quad \left(r = i\alpha R, \Delta = \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right) \quad (1.4)$$

Здесь  $H$  — оператор, зависящий от профиля  $U(x)$

$$H\varphi = U \Delta \varphi - U'' \varphi \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) и граничные условия (1.3) определяют бесконечную последовательность нормальных возмущений  $\varphi_i(x)$  и декрементов  $\lambda_i$ . Оператор  $L$  в (1.4) — несамосопряженный, и его собственные значения  $\lambda_i$  и собственные функции  $\varphi_i$ , вообще говоря, комплексные.

Рассмотрим сопряженную краевую задачу. Для нахождения вида сопряженного оператора умножим уравнение, комплексно сопряженное с (1.4), на функцию  $\psi(x)$ , удовлетворяющую граничным условиям

$$\psi = \psi' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (1.6)$$

и проинтегрируем по  $x$  от  $-1$  до  $+1$ . Переведя интегрированием по частям производные с  $\varphi^*$  на  $\psi$  и приравняв нулю множитель при  $\varphi^*$ , найдем

$$L^+ \psi \equiv -rH^+ \psi - \Delta^2 \psi = \lambda^* \Delta \psi, \quad H^+ \psi = \Delta(U\psi) - U'' \psi \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) и условия (1.6) определяют бесконечную последовательность сопряженных нормальных возмущений  $\psi_i(x)$  и декрементов  $\lambda_i^*$ .

Возмущения  $\varphi_i$  и сопряженные возмущения  $\psi_k$ , принадлежащие разным декрементам  $\lambda_i$  и  $\lambda_k^*$ , в определенном смысле ортогональны. Из (1.4) и (1.7) можно получить соотношение

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int \psi_k^* \Delta \varphi_i dx = 0 \quad (1.8)$$

(здесь и далее интегрирование по  $x$  ведется в пределах от  $-1$  до  $1$ ). Из (1.8) для  $\lambda_i \neq \lambda_k$  следует условие ортогональности

$$\int \psi_k^* \Delta \varphi_i dx = 0 \quad (1.9)$$

§ 2. Возмущения в покоящейся жидкости. Рассмотрим вначале спектр возмущений в покоящейся жидкости ( $R = 0$ ). В этом случае оператор  $L$  становится самосопряженным. Для вещественных нормальных возмуще-

ний  $\varphi_i^{(0)}$  и совпадающих с ними сопряженных возмущений  $\psi_i^{(0)}$  будем иметь уравнение

$$\Delta^2 \varphi^{(0)} = -\lambda^{(0)} \Delta \varphi^{(0)} \quad (2.1)$$

и граничные условия

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(0)'} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2.2)$$

Из (2.1) вытекает условие ортогональности

$$\int \varphi_i^{(0)} \Delta \varphi_k^{(0)} dx = 0 \quad (i \neq k) \quad (2.3)$$

Для  $i = k$  интеграл в (2.3) всегда отрицателен, и поэтому собственные функции  $\varphi_i^{(0)}$  можно нормировать на  $-1$ . Условие ортонормированности принимает вид

$$\int \varphi_i^{(0)} \Delta \varphi_k^{(0)} dx = -\delta_{ik} \quad (2.4)$$

Из (2.1) легко получить соотношение

$$\lambda^{(0)} = - \int \varphi^{(0)} \Delta^2 \varphi^{(0)} dx / \int \varphi^{(0)} \Delta \varphi^{(0)} dx \quad (2.5)$$

Интеграл в числителе (2.5) всегда положителен, а нормировочный интеграл в знаменателе отрицателен. Таким образом, собственные значения  $\lambda^{(0)}$  вещественны и положительны — все возмущения в покоящейся жидкости монотонно затухают.

Задача (2.1) — (2.2) имеет четные и нечетные решения. Нормированные четные собственные функции равны

$$\varphi_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{J_i}} \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha} - \frac{\cos \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} x}{\cos \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2}} \right] \quad (i = 0, 2, 4, \dots) \quad (2.6)$$

где

$$J_i = \frac{\lambda_i^{(0)}}{2(\alpha^2 - \lambda_i^{(0)})} (\alpha^2 + \alpha \operatorname{th} \alpha - \alpha^2 \operatorname{th}^2 \alpha - \lambda_i^{(0)})$$

Декременты четных возмущений определяются уравнением

$$\sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} = -\alpha \operatorname{th} \alpha \quad (2.7)$$

и зависят от волнового числа  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$

$$\lambda_i^{(0)} = 1/4 (i + 2)^2 \pi^2 \quad (i = 0, 2, 4, \dots) \quad (2.8)$$

С ростом  $\alpha$  декременты четных возмущений  $\lambda_i^{(0)}(\alpha)$  вначале убывают, проходят через минимум, а затем возрастают, причем при  $\alpha \gg 1$

$$\lambda_i^{(0)} = 1/4 (i + 1)^2 \pi^2 + \alpha^2 \quad (2.9)$$

Нечетные собственные функции

$$\varphi_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{J_i}} \left[ \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} x}{\sin \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2}} \right] \quad (i = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.10)$$

Здесь

$$J_i = \frac{\lambda_i^{(0)}}{2(\alpha^2 - \lambda_i^{(0)})} (\alpha^2 + \alpha \operatorname{cth} \alpha - \alpha^2 \operatorname{cth}^2 \alpha - \lambda_i^{(0)})$$

Декременты нечетных возмущений находятся из уравнения

$$\sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_i^{(0)} - \alpha^2} = \alpha \operatorname{cth} \alpha \quad (2.11)$$

При  $\alpha = 0$  декременты будут корнями уравнения  $\sqrt{\lambda_i^{(0)}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_i^{(0)}} = 1$  и равны:  $\lambda_1^{(0)} = 20.191$ ,  $\lambda_3^{(0)} = 59.680$ ,  $\lambda_5^{(0)} = 118.90$ , ... (см. [4]). С ростом  $\alpha$  все нечетные декременты монотонно возрастают и при  $\alpha \gg 1$  справедлива формула (2.9) с  $i = 1, 3, 5, \dots$ . При всех значениях волнового числа  $\alpha$  четные и нечетные декременты  $\lambda_i^{(0)}$  с ростом номера  $i$  чередуются; их последовательность в порядке возрастания такова:  $\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots$ .

Полной ортонормированной системой базисных функций (2.6) и (2.10) удобно пользоваться для приближенного решения уравнения Орра—Зоммерфельда в различных вариантах метода возмущений, а также для сведения этого дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений при использовании ЭВМ. В работе [5] четная подсистема функций (2.6) использовалась для численного расчета устойчивости плоского течения Пуазейля.

**§ 3. Разложение по степеням числа Рейнольдса.** В предыдущем параграфе рассматривались возмущения и их декременты в покоящейся жидкости ( $R = 0$ ). При малых значениях числа Рейнольдса можно искать решение задачи в виде ряда по степеням параметра  $r = iaR$ . Положим

$$\varphi = \varphi^{(0)} + r\varphi^{(1)} + r^2\varphi^{(2)} + \dots, \quad \lambda = \lambda^{(0)} + r\lambda^{(1)} + r^2\lambda^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

Подставляя ряды (3.1) в уравнение (1.4) и собирая члены при одинаковых степенях  $r$ , получим уравнения последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \Delta^2\varphi^{(0)} + \lambda^{(0)}\Delta\varphi^{(0)} &= 0 \\ \Delta^2\varphi^{(1)} + \lambda^{(0)}\Delta\varphi^{(1)} &= -\lambda^{(1)}\Delta\varphi^{(0)} + H\varphi^{(0)} \\ \Delta^2\varphi^{(2)} + \lambda^{(0)}\Delta\varphi^{(2)} &= -\lambda^{(2)}\Delta\varphi^{(0)} - \lambda^{(1)}\Delta\varphi^{(1)} + H\varphi^{(1)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Delta^2\varphi^{(n)} + \lambda^{(0)}\Delta\varphi^{(n)} = -\lambda^{(n)}\Delta\varphi^{(0)} - \lambda^{(n-1)}\Delta\varphi^{(1)} + \dots - \lambda^{(1)}\Delta\varphi^{(n-1)} + H\varphi^{(n-1)}$$

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(n)'} = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (3.3)$$

Первое из уравнений (3.2) (нулевое приближение), определяющее возмущения в покоящейся жидкости, рассмотрено выше. Поправки к  $\varphi^{(0)}$  находятся из уравнений вида

$$\Delta^2\varphi^{(n)} + \lambda^{(0)}\Delta\varphi^{(n)} = f_n(x) \quad (3.4)$$

Здесь  $f_n(x)$  — известная функция, определяемая предыдущими приближениями и содержащая  $\lambda^{(n)}$ . Умножая (3.4) на  $\varphi^{(0)}$  и интегрируя по  $x$ , получим условие разрешимости (3.4)

$$\int f_n(x) \varphi^{(0)} dx = 0 \quad (3.5)$$

из которого определяется поправка к декременту  $\lambda^{(n)}$ . Решая затем неоднородное уравнение (3.4) с граничными условиями (3.3), найдем  $\varphi^{(n)}$ .

Таким образом, можно последовательно определить коэффициенты разложений (3.1). Легко видеть, что все  $\varphi^{(n)}$  и  $\lambda^{(n)}$  вещественны, и ряды (3.1) можно записать, выделяя вещественные и мнимые части, в виде

$$\varphi = (\varphi^{(0)} - \alpha^2 R^2 \varphi^{(2)} + \alpha^4 R^4 \varphi^{(4)} - \dots) + i\alpha R (\varphi^{(1)} - \alpha^2 R^2 \varphi^{(3)} + \alpha^4 R^4 \varphi^{(5)} - \dots) \quad (3.6)$$

$$\lambda = (\lambda^{(0)} - \alpha^2 R^2 \lambda^{(2)} + \alpha^4 R^4 \lambda^{(4)} - \dots) + i\alpha R (\lambda^{(1)} - \alpha^2 R^2 \lambda^{(3)} + \alpha^4 R^4 \lambda^{(5)} - \dots) \quad (3.7)$$

Из (3.5) с учетом условия нормировки (2.4) находим

$$\lambda^{(1)} = - \int \varphi^{(0)} H \varphi^{(0)} dx, \quad \lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} \int \varphi^{(0)} \Delta \varphi^{(1)} dx - \int \varphi^{(0)} H \varphi^{(1)} dx \quad (3.8)$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} \int \varphi^{(0)} \Delta \varphi^{(1)} dx + \lambda^{(1)} \int \varphi^{(0)} \Delta \varphi^{(2)} dx - \int \varphi^{(0)} H \varphi^{(2)} dx$$

.....

Разложения по степеням параметра  $r$  можно построить и для решений сопряженной задачи (1.7). При этом получаются формулы, аналогичные приведенным выше, с заменой  $r$  на  $-r$  и  $H$  на  $H^+$ .

Последовательные приближения удобно находить при помощи метода возмущений, разлагая  $\varphi^{(n)}$  по базисной системе собственных функций невозмущенной задачи (2.1):

$$\varphi_i^{(n)} = \sum_k c_{ik}^{(n)} \varphi_k^{(0)} \quad (3.9)$$

Приведем формулы поправок 1 и 2-го порядков к собственному значению и собственной функции  $i$ -го уровня

$$\lambda_i^{(1)} = - H_{ii}, \quad \varphi_i^{(1)} = c_{ii}^{(1)} \varphi_i^{(0)} + \sum_{k \neq i} \frac{H_{ki}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \varphi_k^{(0)} \quad (3.10)$$

$$\lambda_i^{(2)} = \sum_{k \neq i} \frac{H_{ik} H_{ki}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(2)} = & c_{ii}^{(2)} \varphi_i^{(0)} - \sum_{k \neq i} \frac{H_{ki}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \left[ c_{ii}^{(1)} + \frac{H_{ii}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \right] \varphi_k^{(0)} + \\ & + \sum_{k \neq i} \sum_{l \neq i} \frac{H_{kl} H_{li}}{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}) (\lambda_i^{(0)} - \lambda_l^{(0)})} \varphi_k^{(0)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь

$$H_{ik} = \int \varphi_i^{(0)} H \varphi_k^{(0)} dx \quad (3.12)$$

Суммирование в формулах (3.10) и (3.11) ведется по невозмущенным уровням. Коэффициенты  $c_{ii}^{(1)}$  и  $c_{ii}^{(2)}$  определяются нормировкой.

Полученные в этом параграфе разложения справедливы до особой точки. Существование этой особой точки, как будет видно из дальнейшего, связано с симметрией профиля стационарного движения  $U(x)$ . Разложения оказываются существенно разными в случаях течений с четным и нечетным профилями скорости. Далее эти случаи будут рассмотрены отдельно.

§ 4. Течения с четным профилем. Если профиль стационарного течения обладает свойством четности  $U(-x) = U(x)$  (примером может служить плоское течение Пуазейля), то при произвольном значении параметра  $r$  существуют четные и нечетные решения задачи (1.3) — (1.4). Спектр возмущений, таким образом, распадается на две независимые системы четных и нечетных уровней. Четность каждого из уровней при любом значении числа Рейнольдса определяется четностью при  $r = 0$ . Из уравнений последовательных приближений (3.2) следует, что при четном  $U(x)$  и, следовательно, четном операторе  $H$  все поправки  $\varphi^{(n)}$  имеют ту же четность, что и нулевое приближение  $\varphi^{(0)}$ . Как видно из уравнений (3.8), в этом случае все  $\lambda^{(n)}$ , вообще говоря, отличны от нуля, и, следовательно, уже при сколь угодно малом  $r$  декремент  $\lambda$  будет комплексным. Таким образом, в потоке с четным профилем скорости возможны только «бегущие» возмущения, фазовая скорость которых

$$c_r = \alpha^{-1} \operatorname{Im} \lambda = R (\lambda^{(1)} - \alpha^2 R^2 \lambda^{(3)} + \dots) \quad (4.1)$$

при малых значениях числа Рейнольдса  $C_r$  пропорционально  $R$ .

В качестве примера рассмотрим плоское течение Пуазейля с параболическим профилем  $U = 1 - x^2$ . Найдем поправки 1 и 2-го порядков  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  к декрементам, пользуясь теорией возмущений.

Матричные элементы оператора возмущения  $H_{ik}$ , входящие в (3.10) — (3.11), отличны от нуля лишь при одинаковой четности индексов. Если  $i$  и  $k$  — четные, то

$$H_{ik} = \frac{1}{\sqrt{J_i J_k}} \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{4\lambda_i^{(0)} (\lambda_i^{(0)} - 2\lambda_k^{(0)})}{\lambda_k^{(0)} (\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)})^2} \right] (\alpha^2 + \alpha \operatorname{th} \alpha - \alpha^2 \operatorname{th}^2 \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda_i^{(0)} (3\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)})}{(\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)})^2} \right\} \quad (i \neq k) \quad (4.2)$$

$$H_{ii} = \frac{1}{J_i} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{a_i^2} + \frac{4}{\lambda_i^{(0)}} + \frac{\lambda_i^{(0)}}{4a_i^4} \right) (\alpha^2 + \alpha \operatorname{th} \alpha - \alpha^2 \operatorname{th}^2 \alpha) - \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{\lambda_i^{(0)}}{3} + \frac{\alpha^2}{a_i^2} + \frac{\lambda_i^{(0)}}{4a_i^2} + \frac{\alpha^2 \lambda_i^{(0)}}{4a_i^4} \right) + \frac{\lambda_i^{(0)}}{3a_i^2} \operatorname{th}^2 \alpha \right\} \quad (a_i^2 = \alpha^2 - \lambda_i^{(0)}) \quad (4.3)$$

В случае нечетных  $i$  и  $k$  формулы матричных элементов получаются из (4.2) и (4.3) заменой  $\operatorname{th} \alpha$  на  $\operatorname{cth} \alpha$ .

Подставляя  $H_{ik}$  в формулы теории возмущений (3.10) и (3.11), получим  $\lambda_i^{(1)}$  и  $\lambda_i^{(2)}$  как функции волнового числа  $\alpha$ . Ряды теории возмущений, которые приходится суммировать при вычислении квадратичной поправки к декременту  $\lambda_i^{(2)}$ , сходятся довольно быстро. Быстрота сходимости видна, например, из формул для  $\lambda_i^{(2)}$  при  $\alpha = 0$  и  $\alpha \gg 1$  ( $i$  — четное)

$$\lambda_i^{(2)} = \frac{2^{10}}{\pi^6} \sum_{k \neq i} \frac{[(2+i)^2 + (2+k)^2]^2}{[(2+i)^2 - (2+k)^2]^5} \quad (\alpha = 0)$$

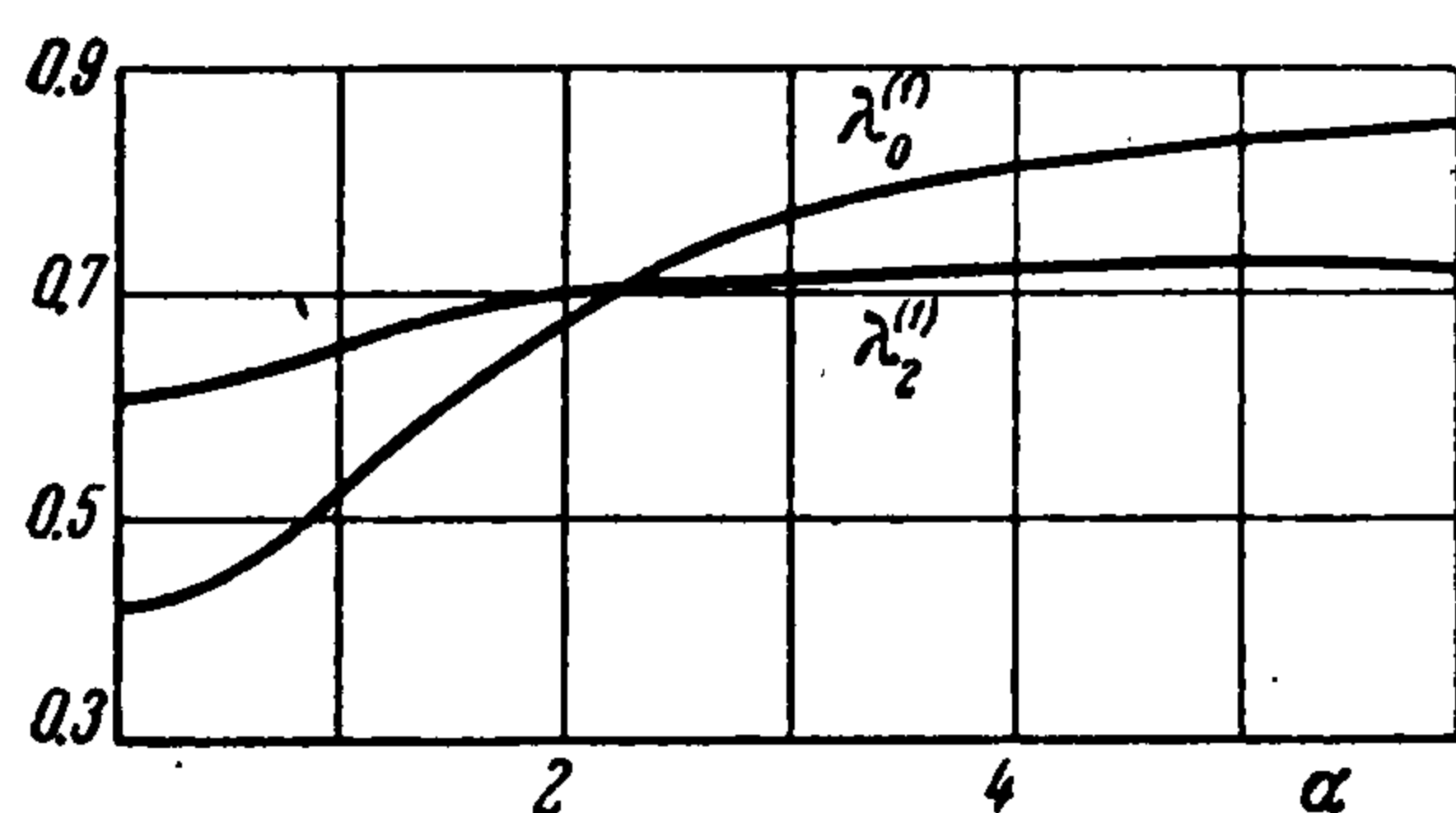
$$\lambda_i^{(2)} = \frac{2^{12}}{\pi^6} \sum_{k \neq i} \frac{(i+1)^2 (k+1)^2}{(i-k)^5 (i+k+2)^5} \quad (\alpha \gg 1)$$

(суммирование ведется по четным значениям  $k$ ).

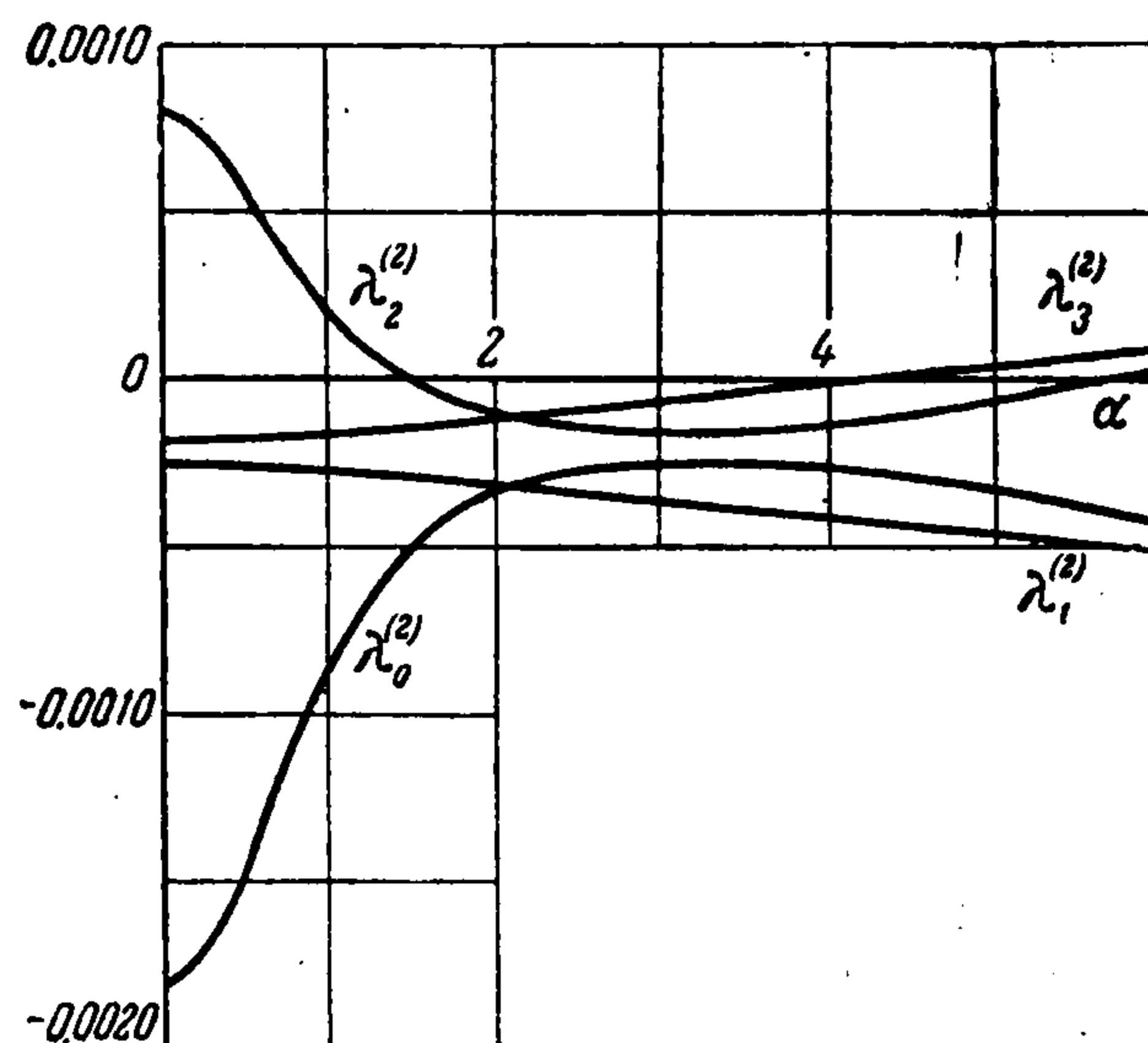
На фиг. 1 изображены  $\lambda_0^{(1)}$  и  $\lambda_2^{(1)}$  в зависимости от  $\alpha$ . Поправки к нечетным уровням  $\lambda_1^{(1)}$  и  $\lambda_3^{(1)}$  близки к 0.7 и практически не зависят от  $\alpha$  ( $\lambda_3^{(1)} > \lambda_1^{(1)}$ )<sup>1</sup>. На фиг. 2 представлены квадратичные поправки к декрементам  $\lambda_i^{(2)}$  для «нижних» четырех уровней. Из графиков видно, что некоторые из квадратичных поправок меняют знак при изменении  $\alpha$ . Знак  $\lambda^{(2)}$ , как видно из разложения (3.7), позволяет судить о повышении или понижении устойчивости с ростом  $R$ , причем  $\lambda^{(2)} > 0$  соответствует понижению, а  $\lambda^{(2)} < 0$  — повышению устойчивости по сравнению с  $R = 0$ .

§ 5. Течения с нечетным профилем. Рассмотрим теперь стационарный поток с нечетным профилем:  $U(-x) = -U(x)$ . Вследствие нечетности оператора  $H$  решения задачи (1.3) — (1.4) при любом  $r \neq 0$  не обладают определенной четностью.

Рассмотрим прежде всего структуру матрицы оператора  $L$  в (1.4) в слу-



Фиг. 1



Фиг. 2

чае нечетного  $H$ . Выбрав в качестве базиса функции  $\varphi_n^{(0)}$  (2.6) — (2.9), запишем (1.4) в матричной форме

$$\sum_n c_n [(\lambda - \lambda_n^{(0)}) \delta_{mn} + i\alpha R H_{mn}] = 0 \quad (5.1)$$

где  $c_n$  — коэффициенты разложения возмущения  $\varphi$  по базисным функциям  $\varphi_n^{(0)}$ , а матричные элементы  $H_{mn}$  оператора  $H$  отличны от нуля лишь для индексов разной четности. Матрицу, соответствующую уравнению (5.1), унитарным преобразованием можно привести к вещественному виду

$$(\lambda - \lambda_n^{(0)}) \delta^{mn} + (-1)^n \alpha R H_{mn} \quad (5.2)$$

и, следовательно, собственные значения уравнения (5.1) либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары.

Обратимся к уравнениям последовательных приближений (3.2) и (3.8). Из первого уравнения системы (3.8) следует  $\lambda^{(1)} = 0$ . Тогда второе уравнение системы (3.2) приводит к выводу, что поправка  $\varphi^{(1)}$  имеет четность, противоположную  $\varphi^{(0)}$ . Условие разрешимости уравнения для  $\varphi^{(2)}$  позволяет определить  $\lambda^{(2)}$ , вообще говоря, отличное от нуля; функция  $\varphi^{(2)}$  при этом имеет ту же четность, что и  $\varphi^{(0)}$ . Продвигаясь далее по системе (3.2) и условиям разрешимости (3.8), легко убедиться, что равны нулю все нечетные поправки к декременту  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = \dots = 0$ , а последовательность функций  $\varphi^{(n)}$  имеет чередующуюся четность.

<sup>1</sup> Поправки 1-го порядка  $\lambda_0^{(1)}$  и  $\lambda_1^{(1)}$  вычислялись ранее в работе [6].

Итак, в потоках с нечетным профилем скорости разложение декремента  $\lambda$  по степеням числа Рейнольдса оказывается вещественным

$$\lambda = \lambda^{(0)} - \alpha^2 R^2 \lambda^{(2)} + \alpha^4 R^4 \lambda^{(4)} - \dots \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что при малых числах Рейнольдса возмущения нечетных потоков монотонны; их фазовая скорость  $c_r = 0$  («стоячие» возмущения). Далее, из разложения (3.6) видно, что вещественная часть возмущения  $\varphi$  имеет ту же четность, что и  $\varphi^{(0)}$  (возмущение при  $R = 0$ ), а четность мнимой части  $\varphi$  противоположна  $\varphi^{(0)}$ . Таким образом, разложения (3.6), выходящие из четных и нечетных уровней  $\varphi_i^{(0)}$  при  $R = 0$ , имеют различный вид. Если  $\varphi_i^{(0)}$  — вещественная собственная функция четного уровня ( $i = 0, 2, 4, \dots$ ) при  $R = 0$ , то с ростом  $R$  появляется мнимая учетная часть, при малых  $R$  пропорциональная  $R$ . Для нечетных  $\varphi_i^{(0)}$  ( $i = 1, 3, 5, \dots$ ) при  $R \neq 0$  возникает четная мнимая часть. Можно условно называть разложения  $\varphi_i$  «четными» для  $i = 0, 2, 4, \dots$  и «нечетными» — для  $i = 1, 3, 5, \dots$  и при  $R \neq 0$ , поскольку при  $R \rightarrow 0$  они стягиваются соответственно к четным и нечетным функциям  $\varphi_i^{(0)}$ .

Полученные выводы о вещественности декрементов и о форме разложений для собственных функций верны, естественно, лишь до особой точки на оси  $R$ . Такая особая точка действительно имеется — об этом свидетельствуют, например, результаты исследований спектра возмущений плоского течения Куэтта (см. [3,7]), из которых вытекает существование, начиная с некоторого числа Рейнольдса, возмущений с комплексными декрементами. Ниже будет показано, что возникновение колебательных возмущений связано с пересечением «четных» и «нечетных» уровней.

Получим необходимое условие возникновения колебательных возмущений, непосредственно вытекающее из свойства нечетности профиля  $U(x)$ . Для этого разобьем решение основной и сопряженной задач на четную (индекс  $g$ ) и нечетную (индекс  $u$ ) части

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_u, \quad \psi = \psi_g + \psi_u \quad (5.4)$$

Умножая уравнение (1.4) поочередно на  $\psi_g$  и  $\psi_u$ , а (1.7) — на  $\varphi_g$  и  $\varphi_u$  и интегрируя по  $x$ , получим четыре интегральных соотношения. Из этих соотношений с учетом нечетности операторов  $H$  и  $H^+$  и связи между ними следует

$$(\lambda^* - \lambda) \int [\psi_u \Delta \varphi_u - \psi_g \Delta \varphi_g] dx = 0 \quad (5.5)$$

Интеграл в (5.5) далее будет обозначаться  $I$ . Из (5.5) следует необходимое условие появления колебательных возмущений ( $\lambda^* \neq \lambda$ ) — обращение в нуль интеграла  $I$ . До тех пор пока справедливы разложения (3.6) — (3.7), декременты вещественны ( $\lambda^* = \lambda$ ), а вещественный интеграл  $I$  отличен от нуля и имеет разный знак на «четных» и «нечетных» уровнях. В самом деле, при  $R \rightarrow 0$  функции (5.4) стягиваются к функциям определенной четности, и в силу условия нормировки (2.4) имеем  $I = \pm 1$ , где плюс и минус относятся соответственно к четным и нечетным

уровням (напомним, что сопряженные решения при  $R = 0$  выбраны совпадающими с основными).

Таким образом, для любого из нормальных возмущений («четного» или «нечетного») интеграл  $I \neq 0$  при  $R = 0$ , а следовательно, и при малых  $R$ . Значит, обращение  $I$  в нуль и связанное с этим возникновение колебательного возмущения происходит при некотором конечном значении числа Рейнольдса  $R_*$ , причем одновременно должна появиться пара нормальных возмущений, соответствующих комплексно сопряженным декрементам  $\lambda$  и  $\lambda^*$ , т. е. в точке  $R_*$  должно происходить слияние двух вещественных декрементов.

Поведение декрементов вблизи точки слияния может быть прослежено при помощи приближенного метода, применяемого в квантовой механике при исследовании пересечений молекулярных термов ([8], § 79)<sup>1</sup>.

Пусть  $R_0$  — значение числа Рейнольдса, при котором два соседних декремента  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и близки (но не совпадают). Обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  решения, соответствующие  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а через  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — сопряженные решения в точке  $R_0$ . Решение в близкой точке  $R_0 + \delta R$  находится из уравнения

$$ia(R_0 + \delta R)H\varphi - \Delta^2\varphi = \lambda\Delta\varphi \quad (5.6)$$

и может быть приближенно представлено в виде

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в (5.6), умножая поочередно на  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  и интегрируя, получим систему линейных однородных уравнений для коэффициентов разложения  $c_1$  и  $c_2$ . Из условия совместности можно определить декременты вблизи  $R_0$ :

$$\lambda = \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 + (V_{11} + V_{22}) \delta R] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [\lambda_1 - \lambda_2 + (V_{11} - V_{22}) \delta R]^2 + V_{12}V_{21} (\delta R)^2} \quad (5.8)$$

Здесь

$$V_{mn} = iaI_n^{-1} \int \psi_m^* H \varphi_n dx, \quad I_n = \int \psi_n^* \Delta \varphi_n dx \quad (m, n = 1, 2) \quad (5.9)$$

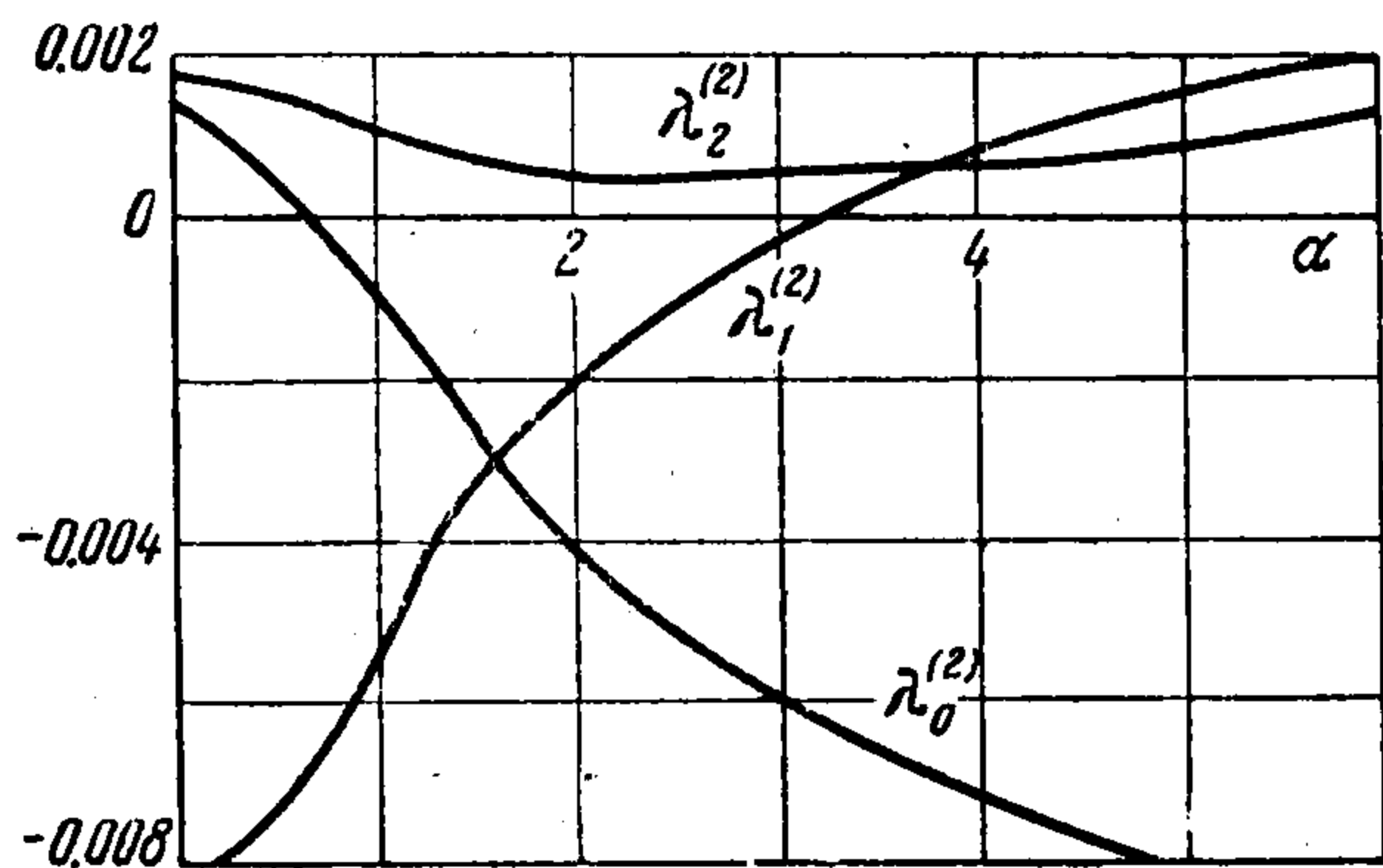
причем матричные элементы  $V_{11}$  и  $V_{22}$  — вещественные, а  $V_{12}$  и  $V_{21}$  — мнимые (см. разложение (3.6) и формулы (5.4)). Координата точки пересечения есть  $R_* = R_0 + \delta R$ , где  $\delta R$  определяется из условия  $\lambda_+ = \lambda_-$ .

Из формулы (5.8) прежде всего видно, что невозможно простое пересечение, при котором оба декремента вещественны по обе стороны от точки пересечения. Для такого пересечения, очевидно, необходимо  $V_{12}V_{21} = 0$  тождественно по  $R_0$ , что заведомо не имеет места. В случае  $V_{12}V_{21} > 0$  пересечение невозможно. Необходимым условием пересечения является  $V_{12}V_{21} < 0$ ; при этом в точке  $R_*$  происходит слияние вещественных декрементов, а при  $R > R_*$  оба декремента комплексно сопряжены. Решения  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  (5.7), как легко убедиться, совпадают в точке  $R_*$ , и в этой точке

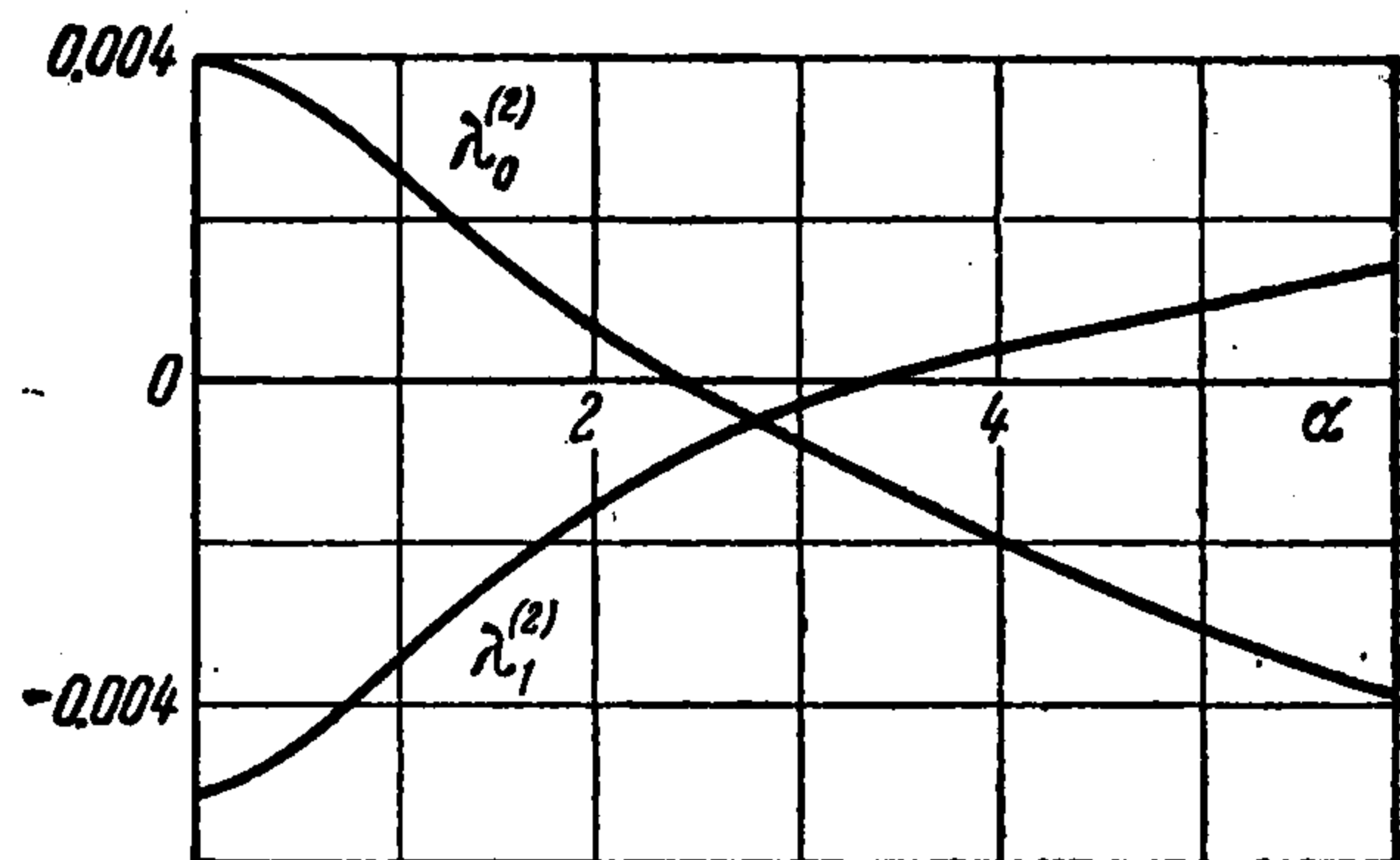
<sup>1</sup> Этот метод применялся для исследования пересечения уровней в спектре возмущений равновесия проводящей жидкости в магнитном поле [9].

обращаются в нуль оба нормировочных интеграла  $I_+$  и  $I_-$  в (5.5). Система нормальных возмущений в точке  $R_*$ , таким образом, перестает быть полной; для полноты нужно добавить «присоединенные» решения [10].

Итак, соседние (и, следовательно, обладающие разной четностью) вещественные декременты либо вовсе не пересекаются, либо сливаются



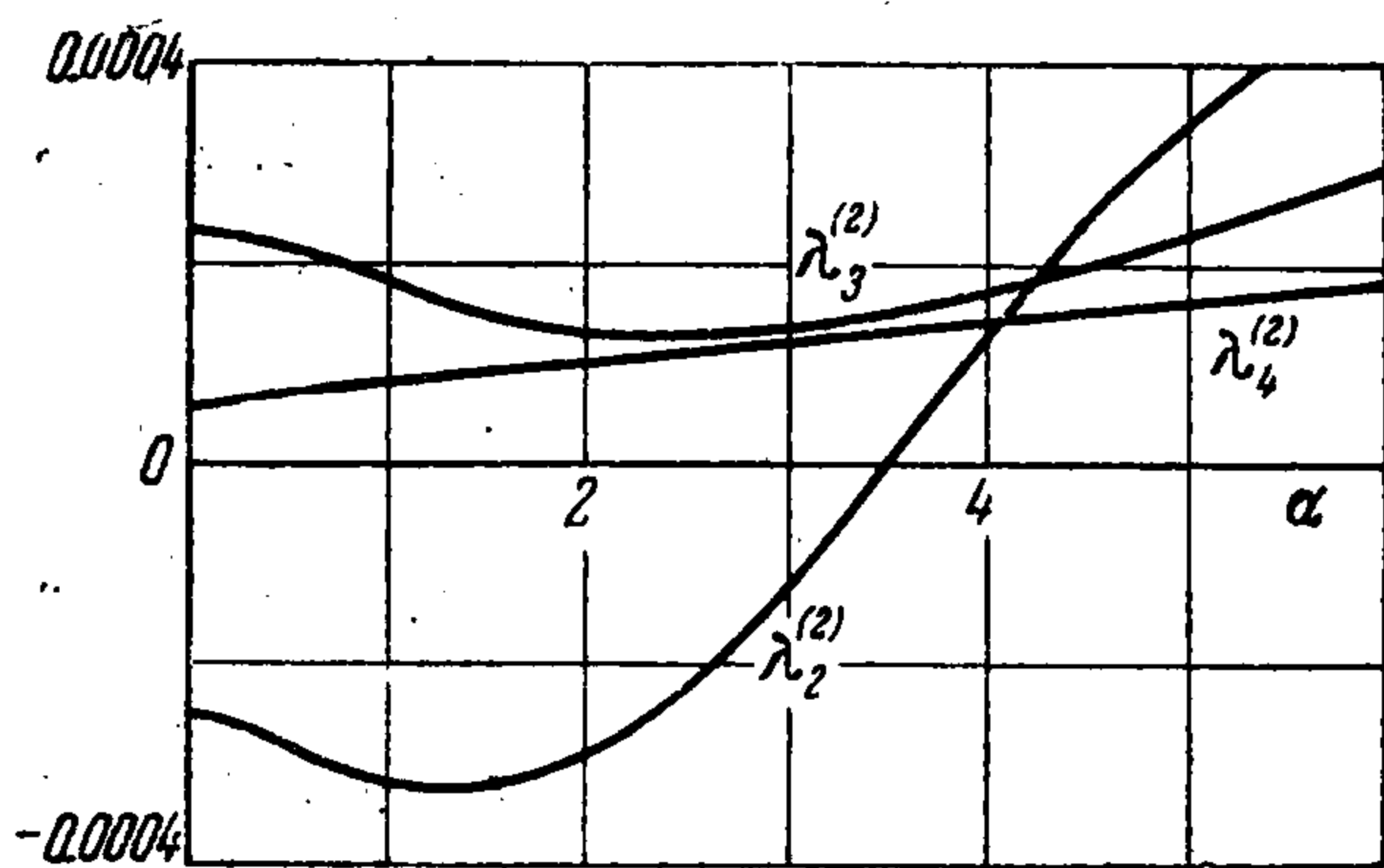
Фиг. 3



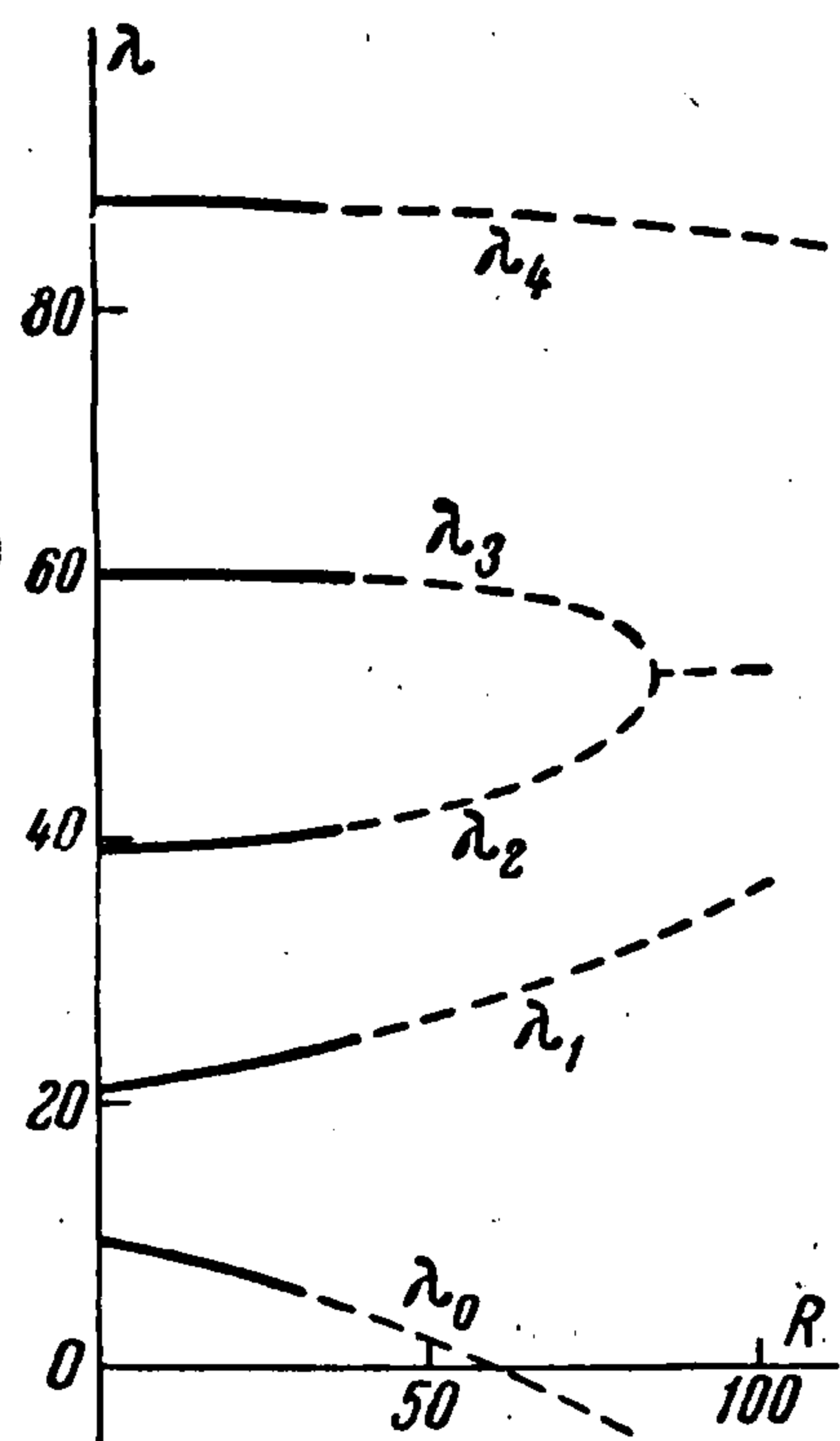
Фиг. 4

в некоторой точке  $R_*$  с образованием комплексно сопряженной пары. Поскольку в вещественной области спектр имеет чередующуюся «четность», то этот вывод справедлив в отношении любых двух уровней разной «четности»; пересечение же уровней одинаковой «четности» вообще невозможно.

§ 6. Примеры течений с нечетным профилем. В качестве примеров рассмотрим течение Куэтта с линейным профилем  $U = x$  и течение с кубическим профилем  $U = x(1 - x^2)$  (течение такого вида возникает при стационарной конвекции жид-



Фиг. 5



Фиг. 6

кости между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до [разной температуры [11]].

Для течения Куэтта матричные элементы равны

$$H_{ik} = \frac{1}{\sqrt{J_i J_k}} \left[ 1 + \alpha \operatorname{th} \alpha - \alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{2\lambda_k^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \right] \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \quad (6.1)$$

$$H_{ki} = \frac{1}{\sqrt{J_i J_k}} \left[ 1 - \alpha \operatorname{th} \alpha + \alpha \operatorname{cth} \alpha - \frac{2\lambda_i^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \right] \frac{\lambda_k^{(0)}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \quad (6.2)$$

$$(i = 0, 2, 4, \dots; k = 1, 3, 5, \dots)$$

При помощи этих матричных элементов можно вычислить квадратичные поправки к декрементам, суммируя ряды теории возмущений (3.10). На фиг. 3 изображены  $\lambda_0^{(2)}$ ,  $\lambda_1^{(2)}$  и  $\lambda_2^{(2)}$  в зависимости от волнового числа. Значения  $\lambda_0^{(2)}$  хорошо согласуются с результатами численного расчета [7].

В случае течения с кубическим профилем матричные элементы выражаются очень громоздкими формулами, которые здесь не приводятся. На фиг. 4 и 5 представлены квадратичные поправки к первым пяти декрементам как функции волнового числа, а на фиг. 6 изображен для примера спектр декрементов при  $\alpha = 1$ . Пунктир соответствует экстраполяции по квадратичным поправкам. Значение числа Рейнольдса  $R_*$ , при котором происходит слияние  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  с порождением комплексно сопряженных декрементов, найдено приближенно при помощи формулы теории пересечений (5.8), причем положено  $R_0 = 0$ . Нижний уровень  $\lambda_0$  может быть продолжен до пересечения с осью, и, таким образом, можно оценить критическое число Рейнольдса, определяющее границу устойчивости относительно монотонного возмущения. Такая экстраполяция, разумеется, связана с известным риском. Однако сам вывод о существовании монотонной неустойчивости течения с кубическим профилем не вызывает сомнений; этот вывод был получен также ранее (другим методом) при исследовании устойчивости стационарного конвективного движения [12]. Кроме того, существование монотонной неустойчивости подтверждается и результатами численного расчета на ЭВМ, которые будут опубликованы позднее. Эта неустойчивость отличает течение с кубическим профилем от течения Куэтта, где, как общим образом показано в [13], монотонные возмущения всегда затухают.

Поступила 9 VII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л и н ь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., М., 1958.
2. Ш л и х т и н г Г. Возникновение турбулентности. Изд. иностр. лит., М., 1962.
3. G r o h n e D. Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. ZAMM, 1954, Bd. 34, No. 8/9.
4. Я н к е Е., Э м д е Ф. Таблицы функций. Физматгиз., М., 1959.
5. D o l p h C. L., L e w i s D. C. On the application of infinite systems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow. Quart. Appl. Math., 1958, vol. 16, No. 2.
6. S z a b l e w s k i W. Das Verhalten wellenförmiger Störungen einer ebenen Poiseulleschen Strömung bei kleinem Parameter  $\alpha \cdot Re$ . ZAMM, 1962, Bd. 42, No. 4/5.
7. G a l l a g h e r A. P., M e r c e r A. McD. On the behavior of small disturbances in plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 1.
8. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Квантовая механика. Физматгиз, М., 1963.
9. Ш л и о м и с М. И. О колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
10. К е л д ы ш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1.
11. Г е р ш у н и Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
12. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. завед. (физика), 1958, № 4.
13. Д и к и й Л. А. Об устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.