

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

Современные аналитические методы решения уравнений ламинарного пограничного слоя основываются на представлении этих решений в виде рядов по степеням некоторых параметров, либо характеризующих только внешние распределения (В. Фокнер [1], Г. Гёртлер [2], В. Я. Шкадов [3, 4] и др.), либо учитывающих дополнительно развитие пограничного слоя (Л. Г. Лойцянский [5]). Во всех этих методах определение коэффициентов степенных рядов сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством универсальности в том смысле, что ни сами эти уравнения, ни соответствующие им граничные условия не зависят от условий данной частной задачи, и следовательно, могут быть заранее раз навсегда численно проинтегрированы, а результаты затабулированы. Эффективность применения такого рода методов ограничивается быстротой сходимости рядов, резко уменьшающейся при приближении к точке отрыва пограничного слоя, являющейся особой точкой уравнений, в которой степенные ряды уже не применимы, и должны быть заменены рядами другой природы, содержащими наряду со степенными и логарифмические члены.

Одним из путей усовершенствования аналитических методов может явиться рекомендуемый в настоящей статье метод приведения основных уравнений пограничного слоя к универсальному, в ранее указанном смысле, виду. Возможность такой универсализации самих уравнений пограничного слоя при помощи перевода параметров, выражающих влияние внешних, характерных для [каждой отдельной задачи условий, в число независимых переменных, демонстрируется на примерах уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости, в однородном и равновесно диссоциированном газе при больших скоростях их движения.

Основное значение предлагаемого метода заключается в замене рядов использованием таблицами, составленными раз навсегда путем непосредственного численного интегрирования универсальных уравнений в частных производных.

Указанные выше затруднения, связанные с наличием особенности в точке отрыва, а также появляющиеся вновь из-за увеличения в дифференциальных уравнениях числа независимых переменных, переводятся при этом из аналитической области в область техники машинного счета и, при необходимости проведения этого счета всего лишь однократно, при составлении таблиц, вряд ли могут быть отнесены к числу существенных недостатков метода. С другой стороны, нельзя отвлекаться от того факта, что увеличение числа аргументов вызывает неудобства, связанные с применением таблиц с большим числом «входов». Это заставляет поставить вопрос о выборе такой последовательности параметров, чтобы пользование первыми двумя-тремя из них приводило уже к приемлемым по точности результатам. В качестве такой системы параметров для пограничного слоя в несжимаемой жидкости в настоящей работе предлагается совокупность безразмерных величин, выражающихся через степени внешней скорости, последовательные ее производные по продольной координате, а также степени отношения квадрата толщины потери импульса в данном сечении пограничного слоя к кинематическому коэффициенту вязкости. Первым членом этой совокупности служит «формпараметр», используемый в разнообразных приближенных однопараметрических методах, осно-

ванных на применении интегрального условия импульсов и различающихся между собой выбором той или другой формы профилей скорости в сечениях пограничного слоя [6,7]. При этом уже первое приближение, вычисляемое путем интегрирования универсального уравнения с одним параметром, приводит к тому же результату, что и однопараметрический метод, если в последнем принять в качестве «конкурирующих» профилей скорости в сечениях пограничного слоя класс точных решений уравнений пограничного слоя, соответствующий линейному распределению скорости на внешней границе слоя [8, 9]. Как известно, это приближенное, будем говорить, «однопараметрическое» решение вполне удовлетворительно отражает действительное движение в пограничном слое для большинства встречавшихся распределений скоростей на внешней границе пограничного слоя. Можно поэтому думать, что применение «двупараметрического» или, в крайнем случае, «трехпараметрического» приближения в решении универсальных уравнений окажется вполне достаточным для широкого ряда задач, и поэтому не потребуются пользоваться таблицами с чрезмерно большим числом входов. Этот факт подтверждается приводимым в статье сравнением с точным решением задачи о пограничном слое в несжимаемой жидкости при синусоидальном распределении скоростей на внешней границе [10].

Предлагаемая совокупность формпараметров благодаря наличию в их определении толщины потери импульса позволяет получать, хотя только приближенное, решение известной в теории пограничного слоя задачи о «продолжении», т. е. об учете влияния предыстории потока в пограничном слое на его развитие в ниже по течению расположенных участках слоя.

Как показывается в последних параграфах статьи, универсализация уравнения ламинарного пограничного слоя выполняется не только в случае изотермического потока несжимаемой жидкости, но и в более общих случаях пограничного слоя в потоке однородного, а также равновесно диссоциированного газов при больших скоростях их движения.

Перечисленные случаи не являются единственными случаями, допускающими универсализацию уравнений и получение их одно- и многопараметрических решений. В частности, к такого рода универсальным уравнениям могут быть сведены уравнения неравновесных пограничных слоев, пограничных слоев в магнитной гидродинамике и других более сложных с физической стороны задач теории ламинарного пограничного слоя. Более того, сам метод универсализации уравнений и граничных условий может оказаться полезным при решении задач, относящихся не только к теории пограничного слоя, но и к другим задачам, приводящим к необходимости интегрирования нелинейных уравнений в частных производных параболического типа, например, к нелинейным задачам теплопроводности.

§ 1. Изотермический пограничный слой в несжимаемой жидкости; дифференциальное уравнение для приведенной функции тока. Уравнения ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости в условиях изотермичности потока сводятся к одному уравнению для функции тока $\psi(x, y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.1)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \rightarrow U(x) \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0(y) \text{ при } x = x_0$$

Здесь приняты обычные в теории пограничного слоя обозначения: x, y — продольная и поперечная координаты, u — продольная скорость, $u_0(y)$ — распределение скоростей в некотором заданном сечении пограничного слоя $x = x_0$, $U(x)$ — продольная скорость на внешней его границе, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Перейдем от переменных $x, y, \psi(x, y)$ к новым переменным $x, \xi, \Phi(x, \xi)$, положив в (1.1)

$$x = x, \quad y = \left(\frac{\delta^{**}}{B_0}\right) \xi, \quad \psi = \left(\frac{U\delta^{**}}{B_0}\right) \Phi(x, \xi) \quad \left(\delta^{**}(x) = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy\right) \quad (1.2)$$

Здесь δ^{**} — толщина потери импульса; B_0 — нормирующая константа, которая будет в дальнейшем определена.

Выполняя в уравнении (1.1) преобразования (1.2) и используя при этом известное уравнение импульсов, записанное в следующих различных его формах (штрих здесь и в дальнейшем — производная по x):

$$\frac{\delta^{**'}}{\delta^{**}} = \frac{U'F}{2Uf}, \quad z^{**'} = \frac{F}{U}, \quad f' = \frac{U'}{U}F + \frac{U''}{U'}f \quad (1.3)$$

Здесь введены общепринятые в теории пограничного слоя обозначения

$$F = 2[\zeta - (2 + H)f], \quad \zeta = \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\right]_{y=0}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad f = \frac{U'\delta^{**2}}{\nu} = U'z^{**}, \quad z^{**} = \frac{\delta^{**}}{\nu} \quad (1.4)$$

приведем уравнение (1.1) к виду (точка обозначает дифференцирование по ξ)

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F + 2f}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2\right] = \frac{U}{B_0^2 U'} f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}\right)$$

$$\Phi = \Phi' = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \Phi' \rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad \Phi' = \Phi_0'(\xi) \text{ при } x = x_0$$

Пользуясь «приведенной» функцией тока $\Phi(x, \xi)$, будем, согласно (1.4), иметь

$$\frac{u}{U} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \zeta = B_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0}, \quad H = \frac{1}{B_0} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right) d\xi \quad (1.6)$$

Примем для определенности в качестве функции $\Phi_0(\xi)$ простейшее автомодельное решение уравнений пограничного слоя, соответствующее условиям (относящиеся к этим условиям величины обозначаются далее индексом нуль)

$$U = \text{const}, \quad U' = 0, \quad f = 0 \quad (1.7)$$

и выберем нормирующую константу B_0 так, чтобы уравнение (1.5) в условиях (1.7) совпало с уравнением Блязиуса¹

$$\Phi''' + \Phi_0 \Phi_0'' = 0, \quad \Phi_0 = \Phi_0' = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad \Phi_0' \rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty$$

¹ За функцию $\Phi_0(\xi)$ можно было выбрать любое автомодельное решение уравнения (1.5), а нормирующую константу B_0 выбрать так, чтобы уравнение это совпало с известным уравнением Фокнера—Скэн в форме Хартри; по этому поводу см. также [5].

Для этого следует положить

$$F_0 = 2\xi_0 = 2B_0^2 \quad (1.9)$$

Отсюда из известного решения задачи Блязиуса будет следовать

$$B_0 = \Phi_0''(0) = 0.470 \quad (1.10)$$

Пользуясь определением толщины потери импульса (1.2) и сделав в нем замену переменных, получим общее соотношение

$$\int_0^\infty \Phi(1 - \Phi) d\xi = \int_0^\infty \Phi_0(1 - \Phi_0) d\xi = B_0 \quad (1.11)$$

которое позволит получить конечное выражение для величины H через предельное значение разности функций $\Phi(x, \xi)$ и $\Phi_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Имеем

$$\begin{aligned} H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} &= \int_0^\infty (1 - \Phi) dy / \left(\int_0^\infty \Phi(1 - \Phi) dy \right) = \frac{1}{B_0} \int_0^\infty (1 - \Phi) d\xi = \\ &= \frac{1}{B_0} \int_0^\infty (1 - \Phi_0) d\xi + \frac{1}{B_0} \int_0^\infty (\Phi_0 - \Phi) d\xi \end{aligned}$$

Предполагая раздельное существование последних двух интегралов, получим искомое выражение H

$$H = H_0 + (1/B_0) (\Phi_0 - \Phi)_{\xi \rightarrow \infty}, \quad H_0 = 2.592 \quad (1.12)$$

§ 2. Универсальное уравнение пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Решение уравнения (1.5), содержащего произвольную функцию $U(x)$ и ее первую производную, является функцией от двух переменных x, ξ и функционалом от U

$$\Phi = \Phi(x, \xi; \{U\}) \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение бесконечную совокупность формпараметров [5]

$$f_k = U^{k-1} (d^k U / dx^k) z^{**k}, \quad z^{**} = \delta^{**2} / \nu \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

первый из которых f_1 совпадает с обычным формпараметром f однопараметрических методов. В силу произвольности функции $U(x)$ формпараметры $f_k(x)$ образуют систему независимых функций, удовлетворяющих рекуррентному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(U/U') f_1 f_k' = [(k-1) f_1 + kF] f_k + f_{k+1} \quad (2.3)$$

легко выводимому из (2.2) путем непосредственного дифференцирования и использования (1.3).

Докажем, что уравнению и граничным условиям (1.5) можно удовлетворить выражением

$$\Phi = \Phi(\xi; \{U\}) = \Phi(\xi; f_1, f_2, \dots) \quad (2.4)$$

не содержащим явно x . Иными словами, докажем, что, при пользовании выбранными, согласно (2.2), «приведенными» функцией тока Φ и нормальной координатой ξ влияние внешнего обтекания на поток в данном сечении пограничного слоя может быть выражено при помощи только совокупности формпараметров (2.2). Для этого заметим, что, согласно (2.4), равенствам (1.6) и (1.12), будем иметь

$$\zeta = \zeta(f_1, f_2, \dots), \quad H = H(f_1, f_2, \dots), \quad F = F(f_1, f_2, \dots) \quad (2.5)$$

так что правая часть рекуррентного уравнения (2.3) будет также функцией параметров f_1, f_2, \dots . Обозначим ее так:

$$[(k-1)f_1 + kF]f_k + f_{k+1} = \theta_k(f_1, f_2, \dots) \quad (2.6)$$

Выберем формпараметры f_k за новые независимые переменные и произведем в уравнении (1.5) замену дифференцирования по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \frac{\partial}{\partial f_k} = \frac{U'}{U f_1} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial}{\partial f_k} \quad (2.7)$$

непосредственно вытекающей из (2.3). Будем иметь

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\Phi = \Phi' = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \Phi \rightarrow 1 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi) \quad \text{при } f_1 = f_2 = \dots = 0$$

Это уравнение в случае изотермического пограничного слоя в несжимаемой жидкости и служит тем основным универсальным уравнением, о котором говорилось в начале статьи.

Действительно, в этом нелинейном дифференциальном уравнении в частных производных третьего порядка, так же как и в граничных условиях, нет величин, характеризующих данную конкретную задачу. Уравнения (2.8) являются одними и теми же для всех задач теории изотермического пограничного слоя в несжимаемой жидкости, в которых распределение скорости на внешней границе непрерывно и допускает существование последовательных производных во всех точках своего задания. Все сводится, таким образом, к численному интегрированию уравнения (2.8) один раз навсегда и составлению таблиц зависимости приведенной функции тока Φ и ее производной $\Phi' = u/U$ от ξ и формпараметров f_1, f_2, \dots . Для этой цели, конечно, должны быть использованы электронно-счетные машины. Входящая в уравнение функция F выражается через функции ζ и H , которые могут быть определены только уже после интегрирования уравнения (2.8). Это обстоятельство не представляет особых трудностей при составлении программы интегрирования уравнения (2.8) на электронно-счетной машине.

После того как функция $\Phi(\xi; f_1, f_2, \dots)$ будет, таким образом, раз навсегда определена, решение любой конкретной задачи сведется к разысканию зависимости $\delta^{**}(x)$ или $z^{**}(x)$, характерной для данной задачи. Для этого будет необходимо проинтегрировать обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dz^{**}}{dx} = \frac{F(f_1, f_2, \dots)}{U(x)} = \frac{F(U'z^{**}, UU''z^{**2}, \dots)}{U(x)} \quad (2.9)$$

Далее будет показано, что этот этап вычислений, единственный, требующий выполнения для каждого данного расчета пограничного слоя, может быть с достаточной степенью точности сведен к простой квадратуре.

§ 3. Однопараметрическое решение универсального уравнения. При решении универсального уравнения (2.8) приходится естественно довольствоваться сравнительно небольшим числом формпараметров.

Под «однопараметрическим» решением будем в дальнейшем понимать решение, отвечающее нулевым значениям всех формпараметров, кроме первого, под «двупараметрическим» — нулевым значениям всех формпараметров, кроме первых двух, и т. д. Условимся отмечать эти решения соответственным номером, поставленным в скобках сверху. Так, полагая

$$f_2 = f_3 = \dots = 0 \quad (3.1)$$

получим основное универсальное уравнение в «однопараметрическом» приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{F^{(1)} + 2f_1}{2B_0^2} \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{B_0^2} F^{(1)} f_1 \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi \partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

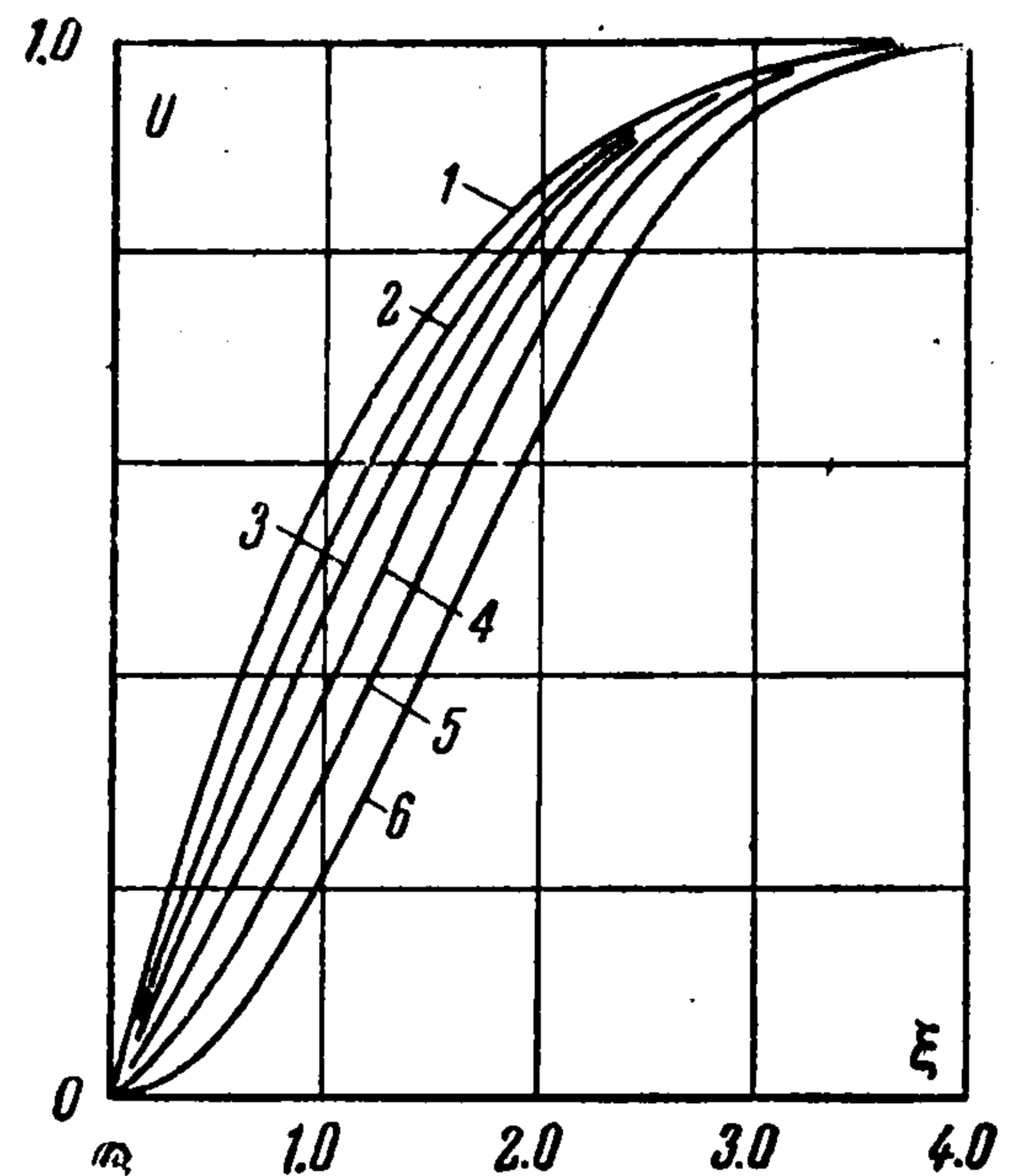
$\Phi^{(1)} = \Phi^{*(1)} = 0$ при $\xi = 0$, $\Phi^{*(1)} \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow \infty$, $\Phi^{(1)} = \Phi_0(\xi)$ при $f_1 = 0$

Условию (3.1) в точной постановке отвечают пограничные слои с линейным распределением скорости на внешней границе. Функцию $\Phi^{(1)}(\xi; f_1)$ и ее производные, а следовательно, и вспомогательные функции $\zeta^{(1)}(f_1)$, $H^{(1)}(f_1)$ и $F^{(1)}(f_1)$ можно было бы получить, пользуясь однопараметрическим классом точных решений Хоурта для «односкатных» [8] распределений внешней скорости, если произвести исключение входящего в эти решения параметра.

Опыт вычислений такого рода [показал, что предпочтение должно быть отдано непосредственному численному интегрированию универсального уравнения (3.2). Такое интегрирование в случае одного формпараметра было выполнено в Ленинградском вычислительном центре АН СССР на машине БЭСМ-2; приведем некоторые результаты.

В табл. 1 помещены значения безразмерной скорости $u/U = \Phi^{(1)}(\xi, f_1)$ для ряда значений ξ и f_1 . На фиг. 1 приведены графики этой безразмерной скорости; кривые 1, ... 6 соответствуют значениям формпараметра $f_1 = 0.0854, 0.04, 0, -0.04, -0.07, -0.0845$. В табл. 2 даны значения $\zeta^{(1)}$ и $H^{(1)}$, а также $F^{(1)}$, в функции от f_1 . Первые две из этих величин служат для вычисления коэффициента местного трения c_f и толщины вытеснения δ^* , последняя — для определения толщины потери импульса δ^{**} и играющего вспомогательную роль распределения $f_1(x)$. Соответствующие кривые показаны на фиг. 2 и 3.

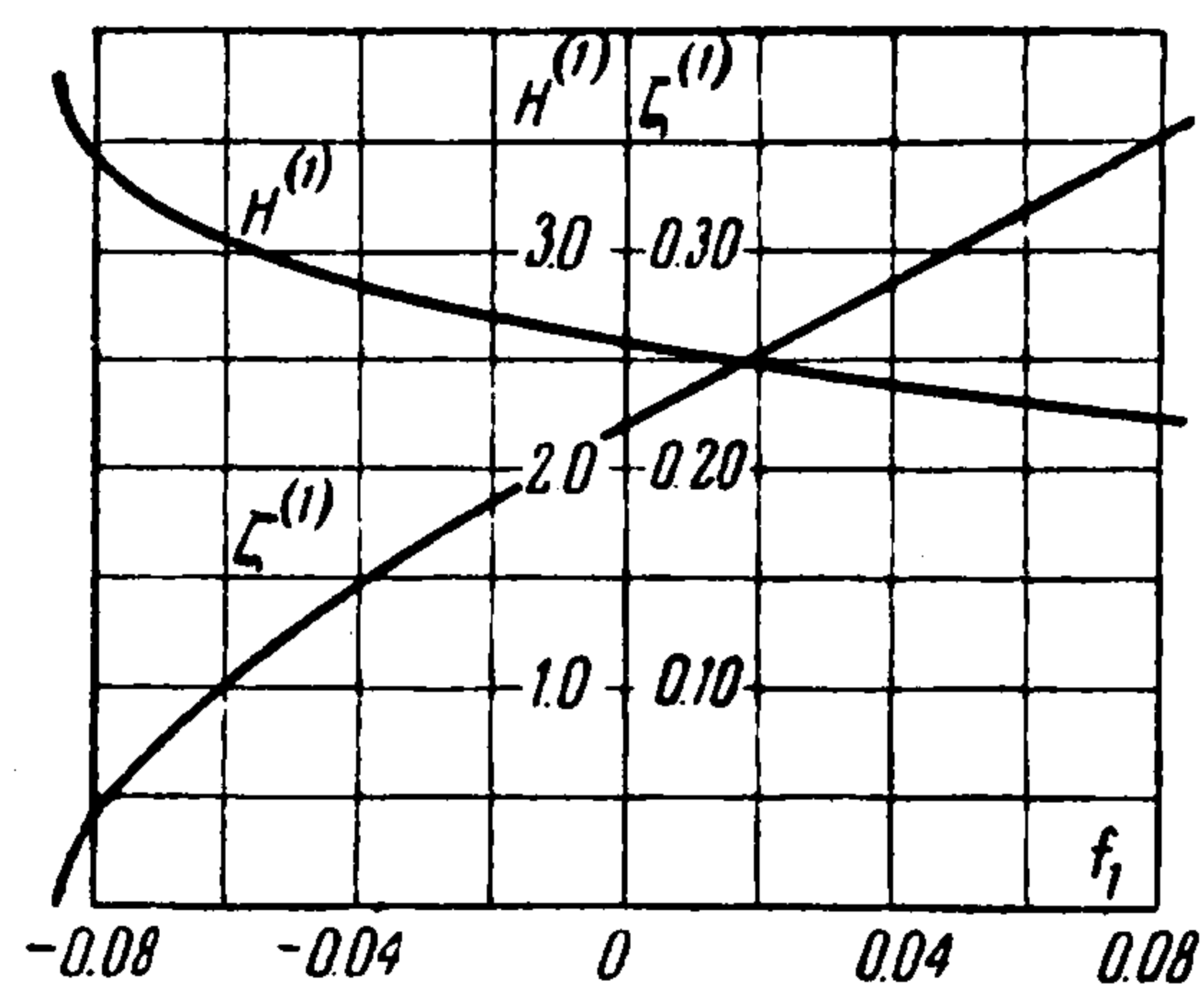
Использование в качестве однопараметрического метода первого из последовательных приближений решения универсального уравнения (2.8) является более обоснован-



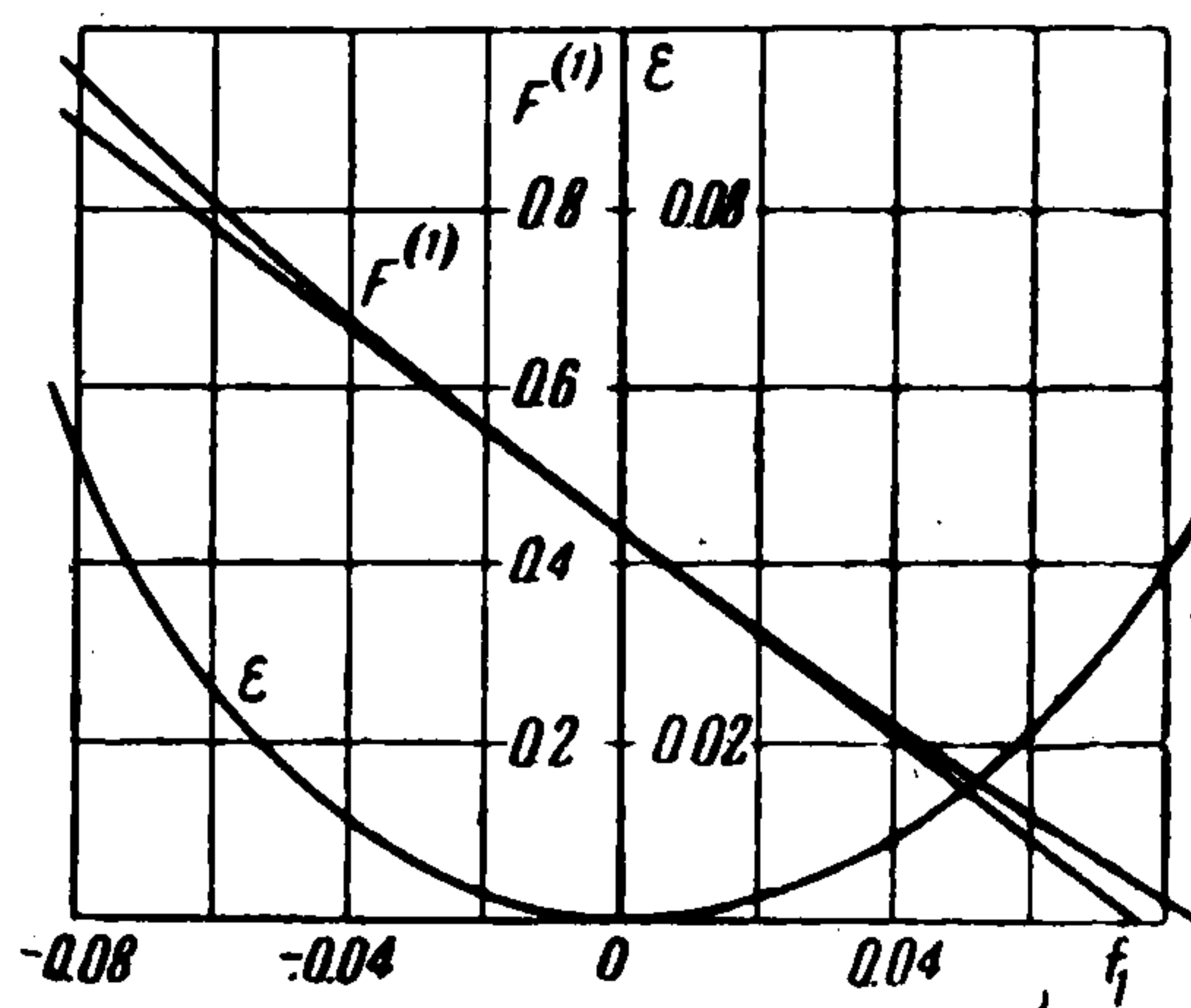
Фиг. 1

$\xi \backslash f_1$	-0.0845	-0.0835	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.0047	0.0064	0.0103	0.0175	0.0230	0.0277	0.0320	0.0361	0.0399	0.0435
0.2	0.0132	0.0166	0.0242	0.0381	0.0486	0.0577	0.0659	0.0735	0.0807	0.0875
0.3	0.0255	0.0305	0.0416	0.0618	0.0769	0.0898	0.1015	0.1122	0.1223	0.1319
0.4	0.0415	0.0480	0.0626	0.0886	0.1078	0.1241	0.1387	0.1521	0.1647	0.1766
0.5	0.0612	0.0692	0.0869	0.1182	0.1411	0.1604	0.1775	0.1931	0.2077	0.2216
0.6	0.0844	0.0938	0.1145	0.1506	0.1767	0.1984	0.2176	0.2351	0.2514	0.2667
0.7	0.1110	0.1218	0.1452	0.1856	0.2144	0.2381	0.2590	0.2779	0.2953	0.3117
0.8	0.1408	0.1528	0.1787	0.2228	0.2539	0.2793	0.3014	0.3213	0.3396	0.3566
0.9	0.1737	0.1868	0.2149	0.2621	0.2949	0.3215	0.3445	0.3650	0.3838	0.4012
1.0	0.2093	0.2234	0.2534	0.3032	0.3373	0.3646	0.3881	0.4088	0.4277	0.4452
1.2	0.2876	0.3033	0.3362	0.3892	0.4245	0.4521	0.4754	0.4958	0.5141	0.5308
1.4	0.3731	0.3898	0.4241	0.4778	0.5125	0.5390	0.5610	0.5799	0.5966	0.6117
1.6	0.4625	0.4794	0.5237	0.5658	0.5982	0.6225	0.6422	0.6588	0.6733	0.6862
1.8	0.5522	0.5687	0.6014	0.6496	0.6787	0.6999	0.7167	0.7306	0.7425	0.7529
2.0	0.6386	0.6539	0.6838	0.7265	0.7513	0.7689	0.7826	0.7936	0.8029	0.8108
2.2	0.7181	0.7317	0.7579	0.7939	0.8141	0.8281	0.8386	0.8469	0.8537	0.8594
2.4	0.7881	0.7997	0.8215	0.8505	0.8662	0.8767	0.8843	0.8903	0.8949	0.8988
2.6	0.8469	0.8562	0.8735	0.8958	0.9073	0.9148	0.9201	0.9241	0.9271	0.9295
2.8	0.8939	0.9011	0.9141	0.9303	0.9384	0.9435	0.9469	0.9494	0.9512	0.9525
3.0	0.9296	0.9348	0.9442	0.9554	0.9608	0.9640	0.9661	0.9676	0.9685	0.9692
3.2	0.9553	0.9590	0.9653	0.9727	0.9761	0.9780	0.9792	0.9800	0.9804	0.9807
3.4	0.9729	0.9753	0.9794	0.9840	0.9860	0.9871	0.9878	0.9881	0.9883	0.9883
3.6	0.9843	0.9858	0.9883	0.9911	0.9922	0.9928	0.9931	0.9933	0.9933	0.9932
3.8	0.9914	0.9922	0.9937	0.9952	0.9958	0.9961	0.9963	0.9963	0.9963	0.9962
4.0	0.9955	0.9960	0.9968	0.9976	0.9979	0.9980	0.9981	0.9981	0.9981	0.9980
4.2	0.9977	0.9980	0.9984	0.9988	0.9990	0.9990	0.9990	0.9990	0.9990	0.9989
4.4	0.9989	0.9991	0.9992	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
4.6	0.9995	0.9996	0.9997	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
4.8	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
5.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999
5.2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5.4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

ным с теоретической стороны, чем старые, чисто интуитивные однопараметрические методы. Как показывают сравнительные расчеты, в частности, пример, изложенный в



Фиг. 2



Фиг. 3

§ 5, результаты, полученные на основании табл. 2, хорошо рекомендуют предлагаемый в настоящем параграфе метод.

В принятом однопараметрическом приближении уравнение (2.9) будет иметь вид

$$\frac{dz^{**}}{dx} = \frac{F^{(1)}(f_1)}{U(x)} = \frac{F^{(1)}(U'z^{**})}{U(x)} \quad (3.3)$$

Таблица 1

0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.0854
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0470	0.0504	0.0537	0.0570	0.0602	0.0634	0.0666	0.0698	0.0730	0.0748
0.0939	0.1003	0.1066	0.1126	0.1186	0.1246	0.1305	0.1364	0.1424	0.1457
0.1408	0.1498	0.1584	0.1669	0.1752	0.1834	0.1916	0.1998	0.2081	0.2128
0.1876	0.1987	0.2094	0.2198	0.2300	0.2401	0.2501	0.2601	0.2704	0.2761
0.2343	0.2470	0.2593	0.2712	0.2829	0.2944	0.3059	0.3174	0.3291	0.3358
0.2806	0.2947	0.3081	0.3211	0.3339	0.3465	0.3591	0.3716	0.3844	0.3917
0.3266	0.3416	0.3558	0.3696	0.3831	0.3964	0.4096	0.4228	0.4364	0.4442
0.3720	0.3876	0.4022	0.4164	0.4303	0.4440	0.4575	0.4713	0.4851	0.4932
0.4168	0.4325	0.4473	0.4617	0.4756	0.4893	0.5029	0.5166	0.5307	0.5388
0.4607	0.4764	0.4910	0.5052	0.5189	0.5324	0.5458	0.5593	0.5732	0.5813
0.5453	0.5601	0.5738	0.5868	0.5995	0.6119	0.6242	0.6366	0.6495	0.6572
0.6245	0.6376	0.6495	0.6609	0.6718	0.6825	0.6931	0.7038	0.7150	0.7218
0.6968	0.7078	0.7176	0.7269	0.7357	0.7443	0.7528	0.7614	0.7706	0.7763
0.7611	0.7699	0.7774	0.7845	0.7912	0.7976	0.8039	0.8104	0.8174	0.8218
0.8168	0.8233	0.8287	0.8337	0.8383	0.8427	0.8470	0.8514	0.8562	0.8595
0.8634	0.8679	0.8714	0.8746	0.8775	0.8801	0.8827	0.8853	0.8882	0.8903
0.9011	0.9040	0.9061	0.9078	0.9093	0.9106	0.9117	0.9128	0.9141	0.9152
0.9307	0.9323	0.9333	0.9340	0.9344	0.9347	0.9348	0.9348	0.9348	0.9351
0.9530	0.9537	0.9540	0.9540	0.9538	0.9534	0.9528	0.9521	0.9512	0.9509
0.9691	0.9694	0.9692	0.9688	0.9683	0.9675	0.9666	0.9654	0.9640	0.9632
0.9804	0.9804	0.9800	0.9795	0.9788	0.9779	0.9768	0.9755	0.9738	0.9727
0.9880	0.9878	0.9874	0.9869	0.9862	0.9854	0.9843	0.9830	0.9812	0.9800
0.9930	0.9927	0.9923	0.9919	0.9913	0.9905	0.9896	0.9884	0.9868	0.9856
0.9960	0.9958	0.9955	0.9951	0.9946	0.9940	0.9933	0.9923	0.9908	0.9897
0.9978	0.9976	0.9974	0.9971	0.9968	0.9963	0.9958	0.9949	0.9937	0.9927
0.9989	0.9987	0.9986	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9968	0.9958	0.9949
0.9995	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9987	0.9984	0.9980	0.9972	0.9965
0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9988	0.9982	0.9976
0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9989	0.9984
1.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9993	0.9990
1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9996	0.9994
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9999	0.9998
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9999
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Таблица 2

f_1	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.0854
$\zeta^{(1)}$	0.2204	0.2375	0.2542	0.2706	0.2868	0.3028	0.3188	0.3348	0.3510	0.3601
$H^{(1)}$	2.5919	2.5384	2.4903	2.4449	2.4014	2.3599	2.3196	2.2802	2.2403	2.2173
$F^{(1)}$	0.4408	0.3847	0.3293	0.2750	0.2219	0.1701	0.1197	0.0708	0.0239	0
$e^{(1)}$	0	0.0010	0.0028	0.0056	0.0097	0.0150	0.0217	0.0300	0.0402	0.0472
f_1	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.0835	-0.0852
$\zeta^{(1)}$	0.2034	0.1851	0.1662	0.1462	0.1249	0.1015	0.0746	0.0397	0.0211	0
$H^{(1)}$	2.6441	2.7063	2.7754	2.8538	2.9458	3.0575	3.2051	3.4410	3.5974	3.8150
$F^{(1)}$	0.4997	0.5585	0.6189	0.6807	0.7444	0.8099	0.8779	0.9500	0.9770	0.9909
$e^{(1)}$	0.0018	0.0034	0.0067	0.0113	0.0179	0.0263	0.0371	0.0521	0.0591	0.0633

Если точке $x = 0$ соответствует лобовая критическая точка тела, в которой $U = 0$, то эта точка является особой, и в ней также будет равно нулю $F^{(1)}$. Из табл. 2 следует, что в этой точке ($x = 0$) будет

$$f_1 = f_{10} = 0.0854, \quad z_0^{**} = 0.0854 / U_0' \quad (3.4)$$

что дает начальное значение z^{**} при численном интегрировании уравнения (3.3). Если же, как это имеет место на передней кромке пластинки или профиля с нулевым углом в носике, $U \neq 0$, то $z^{**} = z_0^{**} = 0$, и $\delta_0^{**} = 0$. Наконец, в общем случае,

если $U \neq 0$ при некотором значении $x = x_0 > 0$, то начальным условием будет $z^{**} = z_0^{**} > 0$ при $x = x_0 > 0$, где $z_0^{**} = \delta_0^{**2} / \nu$ выражает в приближенной, суммарной форме предыдущую историю развития пограничного слоя на участке $0 \leq x \leq x_0$. Это значение z_0^{**} может быть использовано для определения постоянной интегрирования в уравнении первого порядка (3.3).

Можно предложить следующий простой и удобный для практических вычислений прием интегрирования (3.3). Как видно на фиг. 3, кривая $F^{(1)}(f_1)$ мало отклоняется от своей касательной, проведенной через точку $f_1 = 0$, и поэтому может быть представлена уравнением

$$F^{(1)}(f_1) = a - bf_1 + \varepsilon(f_1) \quad (3.5)$$

где $\varepsilon(f_1)$ выражает отклонение кривой от касательной; величина этого отклонения приводится в табл. 2 и на фиг. 3. Численные величины постоянных a и b , как будет показано в следующем параграфе, могут быть приняты равными

$$a = 0.4408, \quad b = 5.714 \quad (3.6)$$

Производя формальное интегрирование уравнения (3.3), можно получить одно из следующих двух интегральных соотношений:

$$f_1(x) = \frac{U'(x)}{U^b(x)} \int_0^x U^{b-1}(x) \{a + \varepsilon[f_1(x)]\} dx \quad (3.7)$$

$$z^{**}(x) = \frac{1}{U^b(x)} \int_0^x U^{b-1}(x) \{a + \varepsilon[f_1(x)]\} dx$$

в которых постоянная интегрирования выбрана из условия конечности f_1 и z^{**} при $U = 0$.

Как видно из табл. 2, значения ε малы по сравнению с величиной a . Вычисление $f_1(x)$ и $z^{**}(x)$ можно было бы производить последовательными квадратурами, начиная с соответствующей пренебрежению ε по сравнению с a

$$f_1(x) = \frac{aU'(x)}{U^b(x)} \int_0^x U^{b-1} dx \quad (3.8)$$

но проще поступать иначе. Введем обозначение $\varepsilon_k = \varepsilon[f_1(x_k)]$, где x_k — абсциссы точек произвольного деления интервала x . Тогда, заменяя действительное распределение $\varepsilon(x)$ ступенчатым, перепишем второе из равенств (3.7) в форме рекуррентного соотношения

$$U^b(x_k) z^{**}(x_k) = U^b(x_{k-1}) z^{**}(x_{k-1}) + (a + \varepsilon_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} U^{b-1}(x) dx \quad (3.9)$$

позволяющего, при наличии заранее заготовленной таблицы степеней чисел с показателями степени b и $b-1$, легко находить z^{**} . Вблизи тех значений x_k , которые соответствуют очень малым f_1 , можно при этом просто пользоваться квадратурой (3.8). Пример расчета будет дан в § 5.

Численное интегрирование универсальных уравнений с двумя и большим числом формпараметров встречается пока со значительными трудностями, так как требует использования электронно-счетных машин с повышенными техническими показателями.

Сравнения с точными решениями показывают, что однопараметрическое приближение представляет главную часть решения. Предполагая, что по крайней мере вне области, непосредственно граничащей с точкой отрыва, можно считать поправки, вносимые двух- и трехпараметрическими приближениями, малыми по сравнению с главной частью решения, удовольствуемся выражениями этих поправок, вычисленными при

помощи рядов, расположенных по степеням формпараметров. Коэффициенты в этих рядах выражаются функциями приведенной координаты ξ , являющимися интегралами системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, легче поддающихся численному интегрированию на машинах, чем двух- и трехпараметрические универсальные уравнения в частных производных.

§ 4. Представление решения многопараметрического универсального уравнения в виде ряда по степеням формпараметров. Будем искать решение общего универсального уравнения (2.8) в виде степенного ряда [5]

$$\Phi(x, \xi) = \Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi) f_1 + \Phi_{11}(\xi) f_1^2 + \Phi_2(\xi) f_2 + \\ + \Phi_{111}(\xi) f_1^3 + \Phi_{12}(\xi) f_1 f_2 + \Phi_3(\xi) f_3 + \dots \quad (4.1)$$

Предварительно разложим величины ξ , H и F в степенные ряды по формпараметрам

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 f_1 + \xi_{11} f_1^2 + \xi_2 f_2 + \xi_{111} f_1^3 + \xi_{12} f_1 f_2 + \xi_3 f_3 + \dots \\ H = H_0 + H_1 f_1 + H_{11} f_1^2 + H_2 f_2 + H_{111} f_1^3 + H_{12} f_1 f_2 + H_3 f_3 + \dots \quad (4.2) \\ F = F_0 + F_1 f_1 + F_{11} f_1^2 + F_2 f_2 + F_{111} f_1^3 + F_{12} f_1 f_2 + F_3 f_3 + \dots$$

и заметим, что постоянные коэффициенты $\zeta_{ij\dots}$ и $H_{ij\dots}$, согласно формулам (1.6) и (4.1) (1.12), будут равны (напомним, что точка обозначает дифференцирование по ξ)

$$\zeta_{ij\dots} = B_0 \Phi_{ij\dots}''(0), \quad H_{ij\dots} = -\frac{1}{B_0} \Phi_{ij\dots}(\infty) \quad (4.3)$$

после чего постоянные $F_{ij\dots}$ по первой из формул (1.4) определятся так

$$F_0 = 2\zeta_0, \quad F_1 = 2(\zeta_1 - H_0 - 2), \quad F_{11} = 2(\zeta_{11} - H_1), \quad F_2 = 2\zeta_2 \\ F_{111} = 2(\zeta_{111} - H_{11}), \quad F_{12} = 2(\zeta_{12} - H_2), \quad F_3 = 2\zeta_3, \dots \quad (4.4)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (2.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых одночленных степенных комплексах формпараметров, получим следующую систему обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений [5] относительно неизвестных функций $\Phi_{ij\dots}(\xi)$

$$L_k(\Phi_{ij\dots}) = -(1/B_0^2) \zeta_{ij\dots} \Phi_0 \Phi_0'' + \Gamma_{ij\dots} \\ \Phi_{ij\dots} = \Phi_{ij\dots}' = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \Phi_{ij\dots}' \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (4.5) \\ (k = i + j + \dots; i, j, \dots = 1, 2, \dots)$$

Здесь под L_k понимается линейный оператор

$$L_k = D^3 + \Phi_0 D^2 - 2k \Phi_0' D + (2k + 1) \Phi_0'', \quad D = d/d\xi \quad (4.6)$$

Функция $\Phi_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению Блязиуса (1.8), а функции $\Gamma_{ij\dots}(\xi)$, стоящие в правой части уравнений с одинаковыми индексами k у оператора L_k , выражаются через функции $\Phi_{ij\dots}(\xi)$ и постоянные $\zeta_{ij\dots}$, $H_{ij\dots}$, уже вычисленные при интегрировании уравнений с индексом у оператора, меньшим k .

Приведем выражения $\Gamma_{ij\dots}(\xi)$, соответствующие индексам k от 1 до 3.

$$\Gamma_1 = (1/B_0^2) [\Phi_0^{*2} - 1 + (H_0 + 1) \Phi_0 \Phi_0^{**}] \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{11} = 2\Phi_1^{*2} - 3\Phi_1 \Phi_1^{**} + (1/B_0^2) [H_1 \Phi_0 \Phi_0^{**} - (\zeta_1 - H_0 - 1) \Phi_0 \Phi_1^{**} - (3\zeta_1 - 3H_0 - 5) \Phi_0^{**} \Phi_1 + 2(\zeta_1 - H_0 - 1) \Phi_0 \Phi_1^*]$$

$$\Gamma_2 = (1/B_0^2) (\Phi_0 \Phi_1^* - \Phi_0^{**} \Phi_1)$$

$$\Gamma_{111} = 6\Phi_1 \Phi_{11}^* - 3\Phi_1 \Phi_{11}^{**} - 5\Phi_1^{**} \Phi_{11} + (1/B_0^2) [(2\zeta_1 - 2H_0 - 3) \times (\Phi_1^{*2} + 2\Phi_0 \Phi_{11}) + H_{11} \Phi_0 \Phi_0^{**} - (\zeta_{11} - H_1) (\Phi_0 \Phi_1^{**} - 2\Phi_0 \Phi_1^* + 3\Phi_0^{**} \Phi_1) - (\zeta_1 - H_0 - 1) \Phi_0 \Phi_{11}^{**} - (3\zeta_1 - 3H_0 - 5) \Phi_1 \Phi_1^{**} - (5\zeta_1 - 5H_0 - 9) \Phi_0^{**} \Phi_{11}]$$

$$\Gamma_{12} = -3\Phi_1 \Phi_2^{**} + 6\Phi_1 \Phi_2^* - 5\Phi_1^{**} \Phi_2 - (1/B_0^2) [(\zeta_1 - H_0 - 1) \Phi_0 \Phi_2^{**} + (5\zeta_1 - 5H_0 - 8) \Phi_0^{**} \Phi_2 - H_2 \Phi_0 \Phi_0^{**} - (4\zeta_1 - 4H_0 - 5) \Phi_0 \Phi_2^* - \Phi_1^{*2} + \Phi_1 \Phi_1^{**} - 2\Phi_0 \Phi_{11}^* + 2\Phi_0^{**} \Phi_{11} - \zeta_2 (2\Phi_0 \Phi_1^* - 3\Phi_0^{**} \Phi_1 - \Phi_0 \Phi_1^{**})]$$

$$\Gamma_3 = (1/B_0^2) (\Phi_0 \Phi_2^* - \Phi_0^{**} \Phi_2)$$

Указанное в § 1 и § 2 своеобразие уравнений (1.5) и (2.8) сохраняется и в системе уравнений (4.5), так как, согласно первому из равенств (4.3), величины $\zeta_{ij\dots}$, входящие в правые части уравнений системы (4.5), требуют для своего определения предварительного знания функций $\Phi_{ij\dots}(\xi)$, являющихся решениями тех же уравнений. Благодаря линейности системы (4.5), это затруднение легко устраняется. Полагая в системе (4.5)

$$\Phi_{ij\dots}(\xi) = X_{ij\dots}(\xi) + \zeta_{ij\dots} Y_{ij\dots}(\xi) \quad (4.8)$$

придем к совокупности двух линейных неоднородных систем

$$L_k(X_{ij\dots}) = \Gamma_{ij\dots}, \quad L_k(Y_{ij\dots}) = -(1/B_0^2) \Phi_0 \Phi_0^{**} \quad (4.9)$$

с теми же нулевыми граничными условиями для функций $X_{ij\dots}(\xi)$ $Y_{ij\dots}(\xi)$, как и для функций $\Phi_{ij\dots}(\xi)$ в системе (4.5).

После того как функции $X_{ij\dots}(\xi)$ и $Y_{ij\dots}(\xi)$ будут определены и раз навсегда затабулированы, величины $\zeta_{ij\dots}$ могут быть вычислены по формулам

$$\zeta_{ij\dots} = \frac{B_0 X_{ij\dots}^{**}(0)}{1 - B_0 Y_{ij\dots}^{**}(0)} \quad (4.10)$$

Численное интегрирование системы уравнений (4.9) было произведено в Ленинградском вычислительном центре АН СССР на машине БЭСМ-2. Были составлены таблицы функций $X_1, X_{11}, X_2, X_{111}, X_{12}, X_3$ и $Y_1, Y_{11} = Y_2, Y_{111} = Y_{12} = Y_3$, а по ним определены и постоянные величины $\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_2, \zeta_{111}, \zeta_{12}, \zeta_3; H_1, H_{11}, H_2, H_{111}, H_{12}, H_3; F_1, F_{11}, F_2, F_{111}, F_{12}, F_3$.

Не имея возможности опубликовать таблицы функций $X_{ij\dots}(\xi)$ и $Y_{ij\dots}(\xi)$, приведем наиболее важные для приложений разложения (4.2), используя численные значения коэффициентов $\zeta_{ij\dots}, H_{ij\dots}, F_{ij\dots}$.

Было получено

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.2204 + 1.7350f_1 - 2.4188f_1^2 - 0.2992f_2 + 18.234f_1^3 - 0.1653f_1f_2 + 0.0937f_3 + \dots \\ H &= 2.5919 - 5.4282f_1 + 21.914f_1^3 + 1.4741f_2 - \\ &\quad - 163.06f_1^3 - 4.8076f_1f_2 - 0.50613f_3 + \dots \\ F &= 0.4408 - 5.7139f_1 + 6.0189f_1^2 - 0.5984f_2 - 7.3611f_1^3 - 3.2753f_1f_2 - 1.0123f_3 + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

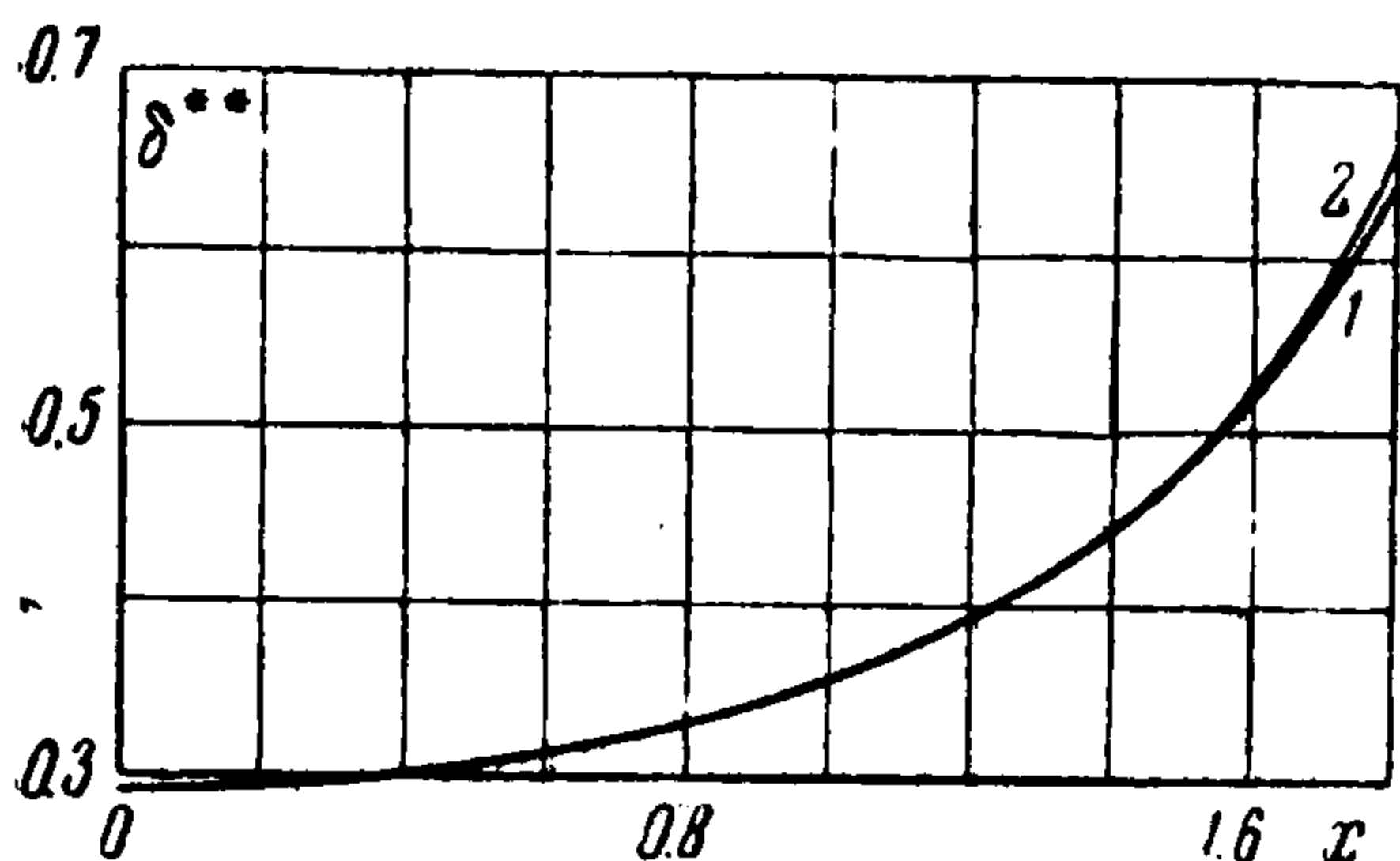
Несколько увеличивая быстроту сходимости, выделим в этих рядах однопараметрические, уже затабулированные части, соответствующие условию $f_2 = f_3 = \dots = 0$. Тогда получим следующие, учитывающие влияние второго и третьего формпараметров, формулы:

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta^{(1)}(f_1) - 0.2992f_2 - 0.1653f_1f_2 + 0.0937f_3 + \dots \\ H &= H^{(1)}(f_1) + 1.4741f_2 - 4.8076f_1f_2 - 0.50613f_3 + \dots \\ F &= F^{(1)}(f_1) - 0.5984f_2 - 3.2753f_1f_2 - 1.0123f_3 + \dots\end{aligned}\quad (4.12)$$

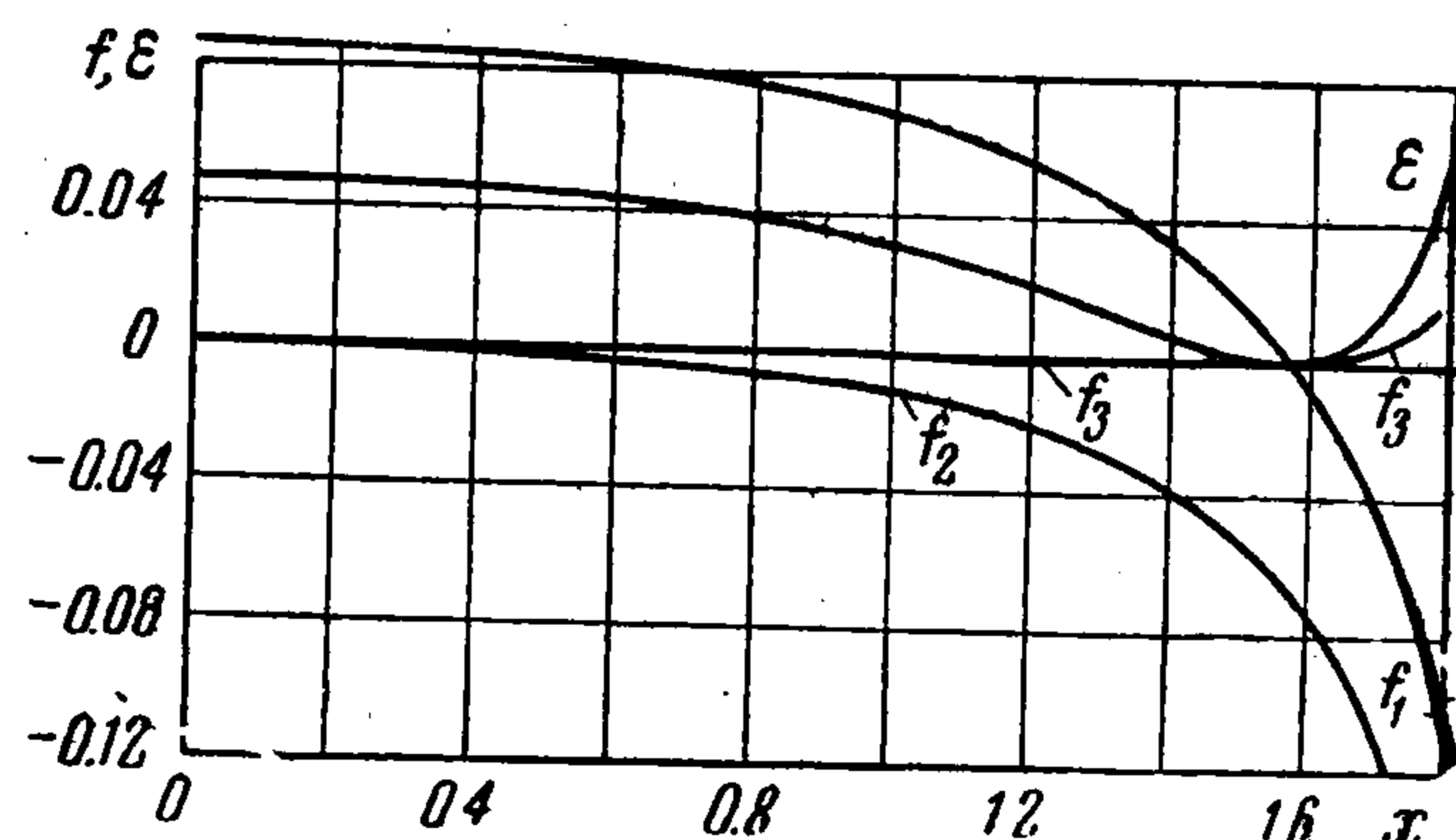
которые, после того как будет проинтегрировано двухпараметрическое универсальное уравнение, смогут быть заменены на более точные.

Как показывают первые сравнительные расчеты, для определения величины $z^{**}(x)$, а тем самым и толщины потери импульса $\delta^{**}(x)$ достаточно пользоваться простым приемом, изложенным в конце § 3, лишь в некоторых случаях, быть может, учитывая влияние следующих формпараметров на поправку ϵ .

§ 5. Пример расчета и сравнение с точным решением. Для иллюстрации соображений, изложенных в предыдущих параграфах, рассмотрим рассчитанный Террилом [10]



Фиг. 4



Фиг. 5

случай синусоидального распределения скорости на внешней границе, что отвечает обтеканию круглого цилиндра безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Условимся в настоящем параграфе иметь дело с безразмерными величинами, полученными путем разделения размерных продольных длин и скоростей соответственно на радиус цилиндра и скорость на бесконечности, а поперечных — на те же величины, но уменьшенные в (\sqrt{R}) раз, где число Рейнольдса R построено по радиусу цилиндра и скорости его обтекания.

В этих безразмерных величинах будем иметь

$$U = \sin x, \quad z^{**} = \delta^{**2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\zeta U}{\delta^{**}} \quad (5.1)$$

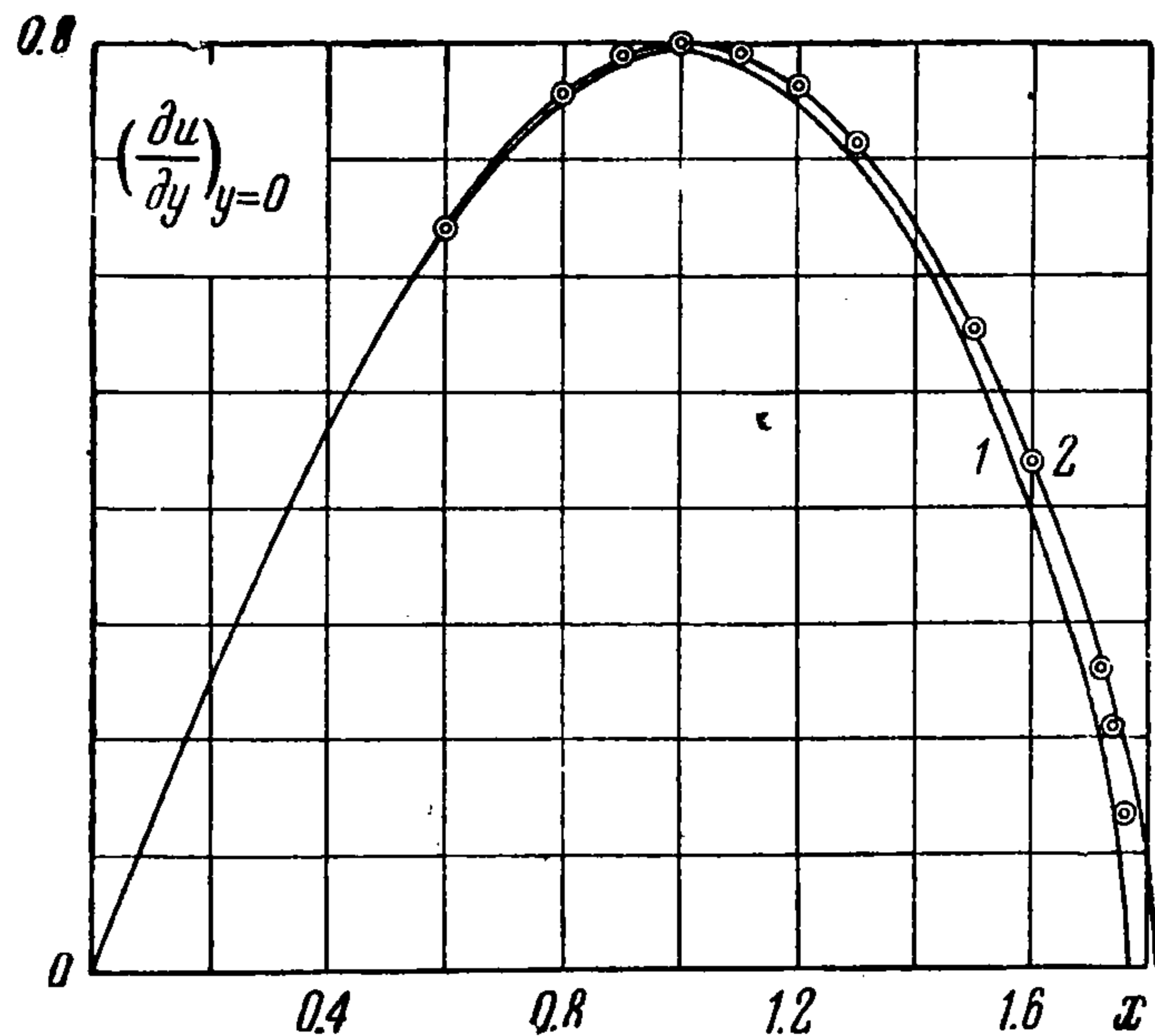
На фиг. 4 приводятся для сравнения два графика безразмерной величины $\delta^{**}(x)$: один, рассчитанный по методу, изложенному в конце § 3, — без поправок на влияние второго и третьего формпараметров, а второй — соответствующий точному решению. При общем характере возрастания величины δ^{**} , особенно вблизи отрыва, вряд ли стоит повышать относительную точность ее расчета (на фиг. 4 максимальное отклонение в точке отрыва не превышает 3%).

На фиг. 5 даны графики изменения вдоль пограничного слоя величин трех формпараметров:

$$f_1(x) = z^{**} \cos x, \quad f_2(x) = -z^{**2} \sin^2 x, \quad f_3(x) = -z^{**3} \sin^2 x \cos x \quad (5.2)$$

Можно отметить совершенно ничтожную величину формпараметра f_3 повсюду, кроме окрестности точки отрыва, и достаточно малую величину f_2 в конфузорной части слоя. Вероятно, именно этим объясняется успех применения однопараметрического метода для большинства практических расчетов.

На фиг. 6 помещено распределение безразмерной величины $(\partial u / \partial y)_{y=0}$, характеризующей коэффициент местного трения по поверхности цилиндра. Как видно, уже однопараметрическое приближение (1) дает удовлетворительный результат. Учет только второго члена (последующие члены очень малы) и в первом из равенств (4.12) приводит почти к полному совпадению (на фиг. 6, отмеченному кружками) с точным решением (2) повсюду, кроме области отрыва, где, по-видимому, поправки, основанные на использовании степенных рядов, уже оказываются неприменимыми. Изложенный в предыдущих параграфах метод применим не только для изотермического пограничного слоя в несжимаемой жидкости, но и допускает непосредственное обобщение на случай пограничного слоя в газовом потоке с большими до- и сверхзвуковыми скоростями, когда уже нельзя пренебрегать эффектом сжимаемости газа, процессами, возникновения и распространения тепла, а также явлением диссоциации молекул газа.



Фиг. 6

стями, когда уже нельзя пренебрегать эффектом сжимаемости газа, процессами, возникновения и распространения тепла, а также явлением диссоциации молекул газа.

§ 6. Универсальные уравнения пограничного слоя в потоке однородного газа при больших скоростях. Условимся в дальнейшем обозначать индексами: a — термодинамические величины для адиабатически и изэнтропически заторможенного газа внутри пограничного слоя, l — то же вне и на границе пограничного слоя, e и w — динамические и термодинамические величины на внешней границе слоя и на поверхности обтекаемого тела. Примем для простоты линейный закон связи между динамическим коэффициентом вязкости газа μ и энтальпией $h = c_p T$

$$\mu / \mu_1 = Ch / h_1, \quad C = (T_w / T_1)^{1/2} (T_1 + T_s) / (T_w + T_s) \quad (6.1)$$

Здесь T_s — константа в формуле Саттерлэнда.

Перейдем в уравнениях пограничного слоя от обычных физических координат и скоростей x, y, u, v к новым X, Y, U, V при помощи преобразования Дородницына — Стюартсона (ρ — плотность газа, M_e — число Маха на внешней границе)

$$X = \int_0^x C \chi_e^{-\frac{3k-1}{2(k-1)}} dx, \quad Y = \chi_e^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad k = \frac{c_p}{c_v}$$

$$U = \chi_e^{-1/2} u, \quad V = \chi_e^{-1/2} v^\circ, \quad \chi_e = \frac{h_e}{h_1} = 1 - \kappa, \quad \kappa = \frac{u_e^2}{2h_1}$$

$$v^\circ = \frac{1}{C} \chi_e^{-\frac{3k-1}{2(k-1)}} \left[u \frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\rho v}{\rho_e} \right) \chi_e^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \right] \quad (6.2)$$

Введем, кроме того, функцию тока $\Psi(X, Y)$

$$U = \partial \Psi / \partial Y, \quad V = - \partial \Psi / \partial X \quad (6.3)$$

и тепловую функцию

$$S = (h_a / h_1) - 1 \quad (6.4)$$

Тогда получим [11] известную систему уравнений (ν — кинематический коэффициент вязкости газа, σ — число Прандтля)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= U_e \frac{dU_e}{dX} (1 + S) + \nu_1 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial S}{\partial Y} &= \frac{\nu_1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} - (1 - \sigma) \kappa \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[\left(\frac{1}{U_e} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} \\ \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad S = S_w \quad \text{при } Y = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \rightarrow U_e, \quad S \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty & \quad (6.5) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U_0(Y), \quad S = S_0(Y) \quad \text{при } X = X_0 & \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение следующие две условные толщины пограничного слоя в переменных (6.2): толщину вытеснения Δ^* и толщину потери импульса Δ^{**}

$$\Delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{U}{U_e} + S \right] dY, \quad \Delta^{**} = \int_0^\infty \frac{U}{U_e} \left[1 - \frac{U}{U_e} \right] dY \quad (6.6)$$

Тогда уравнение импульсов, легко выводимое из (6.5), сохранит тот же вид, что и в несжимаемой жидкости (штрих — производная по X):

$$\frac{dZ^{**}}{dX} = \frac{F}{U_e}, \quad \frac{df}{dX} = \frac{U_e'}{U_e} F + \frac{U_e''}{U_e'} f \quad (6.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z^{**} = \frac{\Delta^{**2}}{\nu_1}, \quad f = \frac{U_e' \Delta^{**2}}{\nu_1}, \quad H = \frac{\Delta^*}{\Delta^{**}}, \quad \zeta = \left[\frac{\partial (U/U_e)}{\partial (Y/\Delta^{**})} \right]_{Y=0} & \quad (6.8) \\ F = 2 [\zeta - (2 + H) f] & \end{aligned}$$

Если после этого, полностью повторяя приемы, изложенные в предыдущих параграфах, перейти от переменных X, Y, Ψ к новым, «приведенным» переменным

$$X = X, \quad \xi = B_0 Y / \Delta^{**}, \quad \Phi = B_0 \Psi / (U_e \Delta^{**}) \quad (6.9)$$

ввести бесконечную совокупность формпараметров

$$f_0 = \kappa, \quad f_k = U_e^{k-1} (d^k U_e / dX^k) Z^{**k}; \quad f_1 = f \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.10)$$

и принять их вместе с приведенной ординатой ξ за новую совокупность независимых переменных, то система уравнений (6.5) примет следующую, предложенную аспирантом Ленинградского политехнического ин-та С. М. Капустянским форму:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + S \right] = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \sigma \frac{F_1 + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial S}{\partial \xi} + 2(\sigma - 1) \kappa \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) = \frac{\sigma}{B_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial S}{\partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0; \quad S = S_w \quad \text{при } \xi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1, \quad S \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad S = S_0(\xi) \quad \text{при } f_0 = \kappa_0 = u_\infty^2 / 2h_1, \quad f_1 = f_2 = \dots = 0$$

В этой системе величины θ_k определяются так же, как и в равенстве (2.6), но выражены через новые значения F и f_k , заданные равенствами (6.8) и (6.10), а $\theta_0 = 2\kappa(\kappa - 1)f_1$. Что касается нормирующего множителя B_0 , то он, как и раньше, выбирается из условия, чтобы при $f_1 = f_2 = \dots = 0$ уравнения (6.11) переходили в автомодельное решение задачи Блязиуса $\Phi_0(\xi)$ для пластины при наличии теплообмена и диссипации (точка — знак дифференцирования по ξ)

$$\Phi_0''' + \Phi_0\Phi_0'' = 0 \quad (6.12)$$

$$S_0'' + \sigma\Phi_0 S_0' + 2(\sigma - 1)\kappa_0(\Phi_0''' + \Phi_0'\Phi_0'') = 0, \quad \kappa_0 = u_\infty^2 / (2h_1)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0' = 0, \quad S_0 = S_w, \quad \text{при } \xi = 0, \quad \Phi_0' \rightarrow 1, \quad S_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

Благодаря принятой линейности связи между вязкостью и температурой, $\Phi_0(\xi)$ ничем не отличается от соответствующей функции в несжимаемой жидкости, а следовательно, и B_0 будет тем же. Не следует, однако, забывать, что H_0 , согласно принятому определению (6.6), уже будет иным. Будем иметь

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right) d\xi = \int_0^\infty \Phi_0' (1 - \Phi_0') d\xi$$

$$H_0 = \frac{\Delta^*}{\Delta^{**}} = \frac{1}{B_0} \int_0^\infty (1 - \Phi_0' + S_0) d\xi, \quad \zeta_0 = B_0 \Phi_0''(0) \quad (6.13)$$

Уравнения (6.11) содержат ряд параметров, характеризующих условия отдельных конкретных задач. Это, в первую очередь, — принимаемое постоянным число Прандтля σ . Такова же безразмерная величина $S_w = (h_w / h_1) - 1$, выражающаяся через характерные для каждой отдельной задачи величины «температурного фактора» T_w / T_∞ и числа Маха M_∞ набегающего потока по формуле

$$S_w = (T_w / T_\infty) [1 + 1/2 (k - 1) M_\infty^2]^{-1} - 1 \quad (6.14)$$

Местный «фактор сжимаемости» газа κ , зависящий от «местных» чисел Маха $M_e = u_e / a_e$ или $M_e^* = u_e / a^*$, где a^* — критическая скорость газа вне пограничного слоя, и в случае однородного газа, от физической константы газа $k = c_p / c_v$, по формулам

$$\kappa = \frac{k-1}{2} M_e^2 / \left(1 + \frac{k-1}{2} M_e^2\right) = \frac{k-1}{k+1} M_e^{*2}$$

входит в число аргументов (6.10) и не нарушает универсальность системы (6.11). При этом сохраняется возможность предварительного, раз навсегда выполняемого интегрирования системы (6.11) для различных значений параметров σ , S_w , а также κ ($0 \leq \kappa \leq 1$). Последнее допустимо, если в уравнениях (6.11) опустить в первом приближении дифференцирование по κ . За системой уравнений (6.11) можно сохранить в несколько более узком смысле, чем ранее, название «универсальной».

Сохраняя термины «одно-», «двупараметрический» и т. д. в зависимости от числа формпараметров f_k , получим при $\sigma = 1$ «однопараметрическую» систему

$$\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{F^{(1)} + 2f_1}{2B_0^2} \Phi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 + S^{(1)} \right] = \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{B_0^2} F^{(1)} f_1 \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi \partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial f_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{F^{(1)} + 2f_1}{2B_0^2} \Phi^{(1)} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{1}{B_0^2} F^{(1)} f_1 \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial f_1} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \xi} \right)$$

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{*(1)} = 0, \quad S^{(1)} = S_w \quad \text{при } \xi = 0, \quad \Phi^{*(1)} \rightarrow 1, \quad S^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi^{(1)} = \Phi_0(\xi), \quad S^{(1)} = S_0(\xi) \quad \text{при } f_1 = 0$$

Таблицы, уже составленные для однопараметрического приближения универсального уравнения (6.11) путем численного интегрирования уравнений (6.15), должны прийти на смену ранее опубликованному однопараметрическому методу Коена и Решетко [12]. Последний метод основан на интуитивном допущении о пригодности в качестве аппроксимирующих функций класса точных решений, соответствующих степенному заданию внешней скорости [11], и приводит в связи с этим к преуменьшению трения и предварению отрыва. Кроме того, основные вычислительные удобства метода имеют место лишь в узких границах значений параметра S_w .

§ 7. Пограничный слой в равновесно диссоциированном газе. В случае пограничного слоя в равновесно диссоциированном газе универсальные уравнения еще более усложняются из-за появления ряда новых факторов. Прежде всего, в этом случае связь между динамическим коэффициентом вязкости и абсолютной температурой уже нельзя считать линейной, а приходится пользоваться общим нелинейным соотношением Саттерлэнда (до 4000° К) и далее по специальным формулам. Кроме того, величины c_p и c не являются более постоянными, а отношение плотностей $\rho/\rho_1 = \rho^\circ$ уже не может быть, как это имеет место в недиссоциированном газе, выражено при помощи обратного отношения соответствующих температур, а требует специального вычисления по таблицам термодинамических функций для воздуха или иного газа в зависимости от безразмерной энтальпии $h = h^\circ / h_1$ и давления p . То же относится и к величине $N = \mu\rho / (\mu_w \rho_w)$, которая в случае однородного, недиссоциированного газа и при линейном законе вязкости, была бы равной единице, а в настоящем случае является функцией безразмерной энтальпии и давления.

Если отвлечься от влияния давления, которое в широком диапазоне отношений давления воздуха p к атмосферному p_a ($10^{-4} \leq p/p_a \leq 10$) оказывается малым, то можно принять, что $N = N(h^\circ / h_w^\circ)$ и для данного M_∞ будет $\rho^\circ = \rho^\circ(h^\circ)$. Кроме того для равновесно диссоциированного воздуха до температур порядка 9000° К можно считать число Прандтля σ постоянным, а число Льюиса также постоянным и равным единице. При этих упрощающих, но вполне приемлемых допущениях уравнения пограничного слоя в независимых переменных

$$X = \frac{1}{\mu^* \rho^*} \int_0^x \mu_w \rho_w dx, \quad Y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho^*} dy \quad (7.1)$$

где звездочка сверху обозначает величины, отнесенные к произвольному данному состоянию газа, при наличии функции тока Ψ , определяемой системой равенств

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v^\circ = \frac{\mu^* \rho^*}{\mu_w \rho} \left[u \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right) \right] = - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (7.2)$$

могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \frac{\rho_e}{\rho} u_e \frac{du_e}{dX} + v^* \frac{\partial}{\partial Y} \left(N \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial h}{\partial Y} = - \frac{\rho_e}{\rho} u_e \frac{du_e}{dX} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + v^* N \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right)^2 + v^* \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial Y} \right)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad h = h_w \quad \text{при } Y = 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \rightarrow u_e(X), \quad h \rightarrow h_e(X) \quad \text{при } Y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = u_0(Y), \quad h = h_0(Y) \quad \text{при } X = X_0$$

Отношение плотностей ρ_e / ρ , входящее в правые части обоих уравнений системы (7.3), выражается через заданные функции ρ° и κ , а именно,

$$\rho_e / \rho = (\rho_e / \rho_1) (\rho_1 / \rho) = \rho^\circ(h_e^\circ) / \rho^\circ(h^\circ) \quad (7.4)$$

Согласно с обозначениями (6.2), числитель этой дроби выражается через κ

$$\rho^\circ(h_e^\circ) = \rho^\circ(\chi_e) = \rho^\circ(1 - \kappa) \quad (7.5)$$

Переход от системы уравнений (7.3) к универсальной системе был произведен аспирантом Ленинградского политехнического ин-та Н. В. Кривцовой совершенно так же, как в § 6, или в предыдущих параграфах для случая изотермического пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

Вводится та же по внешней форме последовательность формпараметров

$$f_0 = \kappa, \quad f_k = u_e^{k-1} (d^k u_e / dX^k) Z^{**k}, \quad Z^{**} = \Delta^{**2} / v_* \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (7.6)$$

и показывается, что если принять за определение толщины вытеснения Δ^* и толщины потери импульса Δ^{**} величины

$$\Delta^* = \int_0^\infty \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{u}{u_e} \right) dY, \quad \Delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dY \quad (7.7)$$

то уравнение импульсов будет иметь тот же вид, что и в случае несжимаемой жидкости (штрих — производная по X)

$$\frac{dZ^{**}}{dX} = \frac{F}{u_e}, \quad \frac{df_1}{dX} = \frac{u_e'}{u_e} F + \frac{u_e''}{u_e'} f_1 \quad (7.8)$$

$$F = 2 [\zeta - (2 + H) f_1], \quad \zeta = \left[\frac{\partial (u / u_e)}{\partial (Y / \Delta^{**})} \right]_{Y=0}, \quad H = \frac{\Delta^*}{\Delta^{**}}$$

Тем же самым будет и рекуррентное дифференциальное уравнение для производной от формпараметра f_k по X , а следовательно, и вид функции θ_k (f_1, f_2, \dots).

Переходя в системе (7.3) к новым переменным (B_0 — нормирующий множитель)

$$X = X, \quad \xi = B_0 Y / \Delta^{**}, \quad \Phi = B_0 \Psi / (u_e \Delta^{**}) \quad (7.9)$$

и вводя, так же как и ранее, формпараметры (7.6) в число независимых переменных, получим универсальную систему уравнений (в более узком, чем в случае несжимаемой жидкости, смысле, который установлен в § 6) ($\theta_0 = 2\kappa f_1$)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[N(h^\circ) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right] + \frac{F + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[\frac{\rho^\circ(1 - \kappa)}{\rho^\circ(h^\circ)} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{N(h^\circ)}{\sigma} \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} \right] + \frac{F + 2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} - 2 \frac{\kappa \rho^\circ(1 - \kappa)}{B_0^2} \frac{f_1}{\rho^\circ(h^\circ)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \quad (7.10)$$

$$+ 2\kappa N(h^\circ) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)^2 = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial h^\circ}{\partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} \right)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0, \quad h^\circ = h_w^\circ \quad \text{при } \xi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1, \quad h^\circ \rightarrow 1 - \kappa \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad h^\circ = h_0^\circ(\xi) \quad \text{при } f_0 = \kappa, \quad f_1 = f_2 = \dots = 0$$

Нормирующая постоянная B_0 выбирается так, чтобы функции $\Phi_0^\circ(\xi)$ и $h_0^\circ(\xi)$, представляющие решения автомодельной задачи, соответствующей постоянству внешней скорости ($u_e = u_\infty$), удовлетворяли системе уравнений вида

$$\frac{d}{d\xi} \left[N(h_0^\circ) \frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} \right] + \Phi_0 \frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \left[\frac{N(h_0^\circ)}{\sigma} \frac{dh_0^\circ}{d\xi} \right] + \Phi_0 \frac{dh_0^\circ}{d\xi} + 2\kappa_0 N(h_0^\circ) \left(\frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} \right)^2 = 0 \quad (7.11)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0' = 0, \quad h_0^\circ = h_w^\circ \quad \text{при } \xi = 0, \quad \Phi_0' \rightarrow 1, \quad h_0^\circ \rightarrow 1 - \kappa \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

представляющей обобщение задачи Блязиуса на случай равновесно диссоциированного газа. Здесь $\kappa_0 = u_\infty^2 / 2h_1$ является функцией только заданного числа Маха M_∞ . Нормирующая постоянная B_0 , как и в предыдущих случаях, определится из равенства $2B_0^2 = F_0$, но, поскольку, в силу неавтономности первого уравнения системы (7.11), ζ_0 уже будет зависеть от h_w , σ и κ_0 , то и B_0 должно также вычисляться для разных значений этих параметров.

В универсальной системе уравнений (7.10) величины h_w° , σ и κ играют роль параметров, характеризующих отдельные конкретные задачи. Параметр h_w° аналогичен параметру S_w предыдущего параграфа.

В более общем случае пограничного слоя в неравновесно диссоциированном газе в универсальную систему уравнений войдет еще уравнение диффузии, заключающее в качестве новой неизвестной концентрацию атомов. При наличии приемлемого ряда упрощающих допущений и в этом случае универсальная система сможет быть для выбранной совокупности значений физических параметров раз навсегда проинтегрирована, а «приведенные» функции тока, энтальпия и концентрация затабулированы. Возникающие здесь трудности имеют чисто технический, вычислительный характер и могут быть обойдены применением последовательных приближений.

Поступила 3 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Falkner V. M. A further investigation of the boundary layer equations. *Aeronaut. Res. Council Repts and Mem.*, 1937, No. 1884, p. 1—45.
2. Görtler H. A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows. *J. Math. and Mech.*, 1957, vol. 6, p. 1—66.
3. Шкадов В. Я. Об интегрировании уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
4. Шкадов В. Я. К решению задачи о пограничном слое. Изв. АН СССР, ОТН, *Механика и машиностроение*, 1962, № 3.
5. Лойцянский Л. Г. Движения в пограничном слое, близкие к автомодельным. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, *Техническая гидромеханика*, 1964, № 230.
6. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз., М., 1962.
7. Laminar boundary layers. *Fluid Motion Memoirs*, ed. by L. Rosenhead, Oxford, 1963.
8. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proc. Roy. Soc. London A*, 1938, vol. 164, p. 547.
9. Мельников А. П. Ламинарный пограничный слой крыла и его расчет. Тр. Ленингр. Военно-возд. академии, 1942, вып. 1.
10. Terrill R. M. Laminar boundary-layer flow near separation with and without suction. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, vol. 253, 1022, p. 55—100.
11. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for the compressible laminar boundary-layers with heat transfer and pressure gradient. *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Rept*, 1956, 1293.
12. Cohen C. B., Reshotko E. The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Rept*, 1956, 1294.