

О ПРИМЕНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА ВОЛН ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА

А. И. Смородин

(Ленинград)

Рассматривается задача о неустановившемся прямолинейном движении источника в жидкости ограниченной глубины. Аналогичная задача для импульса давления, приложенного к поверхности глубокой жидкости, была рассмотрена в работе [1] при помощи метода интегральных преобразований.

В последнее время для решения волновых задач широко применяются различным образом построенные функции Грина. Такой метод ниже использован при исследовании неустановившегося движения гидродинамических особенностей.

§ 1. Следуя Кельвину, неустановившееся движение источника интенсивности $Q(t_1)$ будем рассматривать как результат наложения возмущений от некоторых импульсивных источников, которые существуют бесконечно малые промежутки времени Δt_1 и в каждой точке проходимогo источника пути выбрасывают объем жидкости $Q(t_1) \Delta t_1$. Тогда для источника, расположенного в точке $(0, 0, z_1)$ связанной системы координат¹ и движущегося из состояния покоя со скоростью $c(t_1)$ в положительном направлении оси x , получим следующее выражение потенциала вызванных скоростей.

$$\Phi = \int_0^t Q(t_1) \varphi(x + s, y, z, z_1, t - t_1) dt_1, \quad s = \int_{t_1}^t c(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Здесь $\varphi(x, y, z, z_1, t - t_1)$ — потенциал импульсивного источника единичной интенсивности.

Для определения потенциала φ можно воспользоваться функцией Грина, зависящей от времени [2]

$$G = \frac{\theta(t - t_1)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch } k(z_1 + H)}{\text{ch } kH} \left[\text{sh } kz - \frac{\text{ch } k(z + H)}{\text{ch } kH} \frac{1 - \cos \sigma_1(t - t_1)}{\text{th } kH} \right] J_0(kr) dk$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{gk \text{ th } kH} \quad (1.2)$$

Функция G дает решение задачи об источнике единичной интенсивности, который возникает в момент t_1 в некоторой точке неподвижной жидкости и сохраняется далее без изменений.

Так как для дальнейшего существенно, что при $t < t_1$ движение отсутствует, то правая часть (1.2) умножена на функцию $\theta(t - t_1)$, равную единице при $t > t_1$ и нулю при $t < t_1$.

¹ Начало координат расположено на свободной поверхности, ось z направлена вертикально вверх.

Для получения потенциала импульсивного источника, очевидно, достаточно рассмотреть разность функций G для двух источников интенсивности q , у которых время возникновения отличается на бесконечно малую величину Δt_1 , и устремить $\Delta t_1 \rightarrow 0$. Если при этом потребовать, чтобы $q\Delta t_1 \rightarrow 1$, можно получить

$$\varphi = q [G(t - t_1) - G(t - t_1 - \Delta t_1)]|_{\Delta t_1 \rightarrow 0} = -q \frac{\partial G}{\partial t_1} \Delta t_1 = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (1.3)$$

или, дифференцируя (1.2), найдем

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\delta(t - t_1)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh } kz \text{ ch } k(z_1 + H)}{\text{ch } kH} J_0(kr) dk - \\ & - \frac{\theta(t - t_1)g}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k \text{ ch } k(z + H) \text{ ch } k(z_1 + H)}{\sigma_1 \text{ ch}^2 kH} \sin \sigma_1(t - t_1) J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\delta(t - t_1)$ — дельта-функция Дирака.

Для получения потенциала движущегося источника в соответствии с (1.1) проинтегрируем (1.4)

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{Q(t)\theta(t)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sh } kz \text{ ch } k(z_1 + H)}{\text{ch } kH} J_0(kr) dk - \\ & - \frac{g}{2\pi} \int_0^t Q(t_1) dt_1 \int_0^\infty \frac{k \text{ ch } k(z + H) \text{ ch } k(z_1 + H)}{\sigma_1 \text{ ch } kH} \times \\ & \times \sin \sigma_1(t - t_1) J_0[k\sqrt{(x + s)^2 + y^2}] dk \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отсюда при $H \rightarrow \infty$ вытекает известное решение Л. Н. Сретенского^[3].

Ординаты свободной поверхности при обычных допущениях теории волн малой амплитуды могут быть определены следующим образом:

$$\zeta^0 = \frac{1}{g} \left[c \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{z=0} \quad (1.6)$$

В простейшем случае, когда источник интенсивности $Q = \text{const}$ из состояния покоя начинает двигаться с постоянной скоростью c , т. е. при $s = (t - t_1)c$, можно получить

$$\zeta = \zeta^0 : \frac{Qc}{2\pi gH^2} = \frac{1}{v} \int_0^\infty \frac{\alpha \text{ ch } \alpha (1 + \zeta_1)}{\text{ch } \alpha} \int_0^\tau J_0[\alpha \sqrt{(\xi + v\tau_1)^2 + \eta^2}] \cos \sigma\tau_1 d\tau_1 d\alpha$$

Здесь

$$\xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad \zeta_1 = \frac{z_1}{H}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{gH}}$$

$$\alpha = kH, \quad \sigma = \sqrt{\alpha \text{ th } \alpha}, \quad \tau = t \left(\frac{g}{H}\right)^{1/2}, \quad \tau_1 = (t - t_1) \left(\frac{g}{H}\right)^{1/2}$$

Изменения ординат свободной поверхности $\zeta = \zeta(\tau)$ в различные моменты времени представлены на фиг. 1, где приводятся результаты расчетов интеграла (1.7) при $\eta = 0$, $v = 0.5$ и $\zeta_1 = -0.5$, выполненных на электронно-вычислительной машине (кривая 1).

При $\tau \rightarrow \infty$ из (1.7) можно получить выражения для ординат свободной поверхности при установившемся движении источника. В частности,

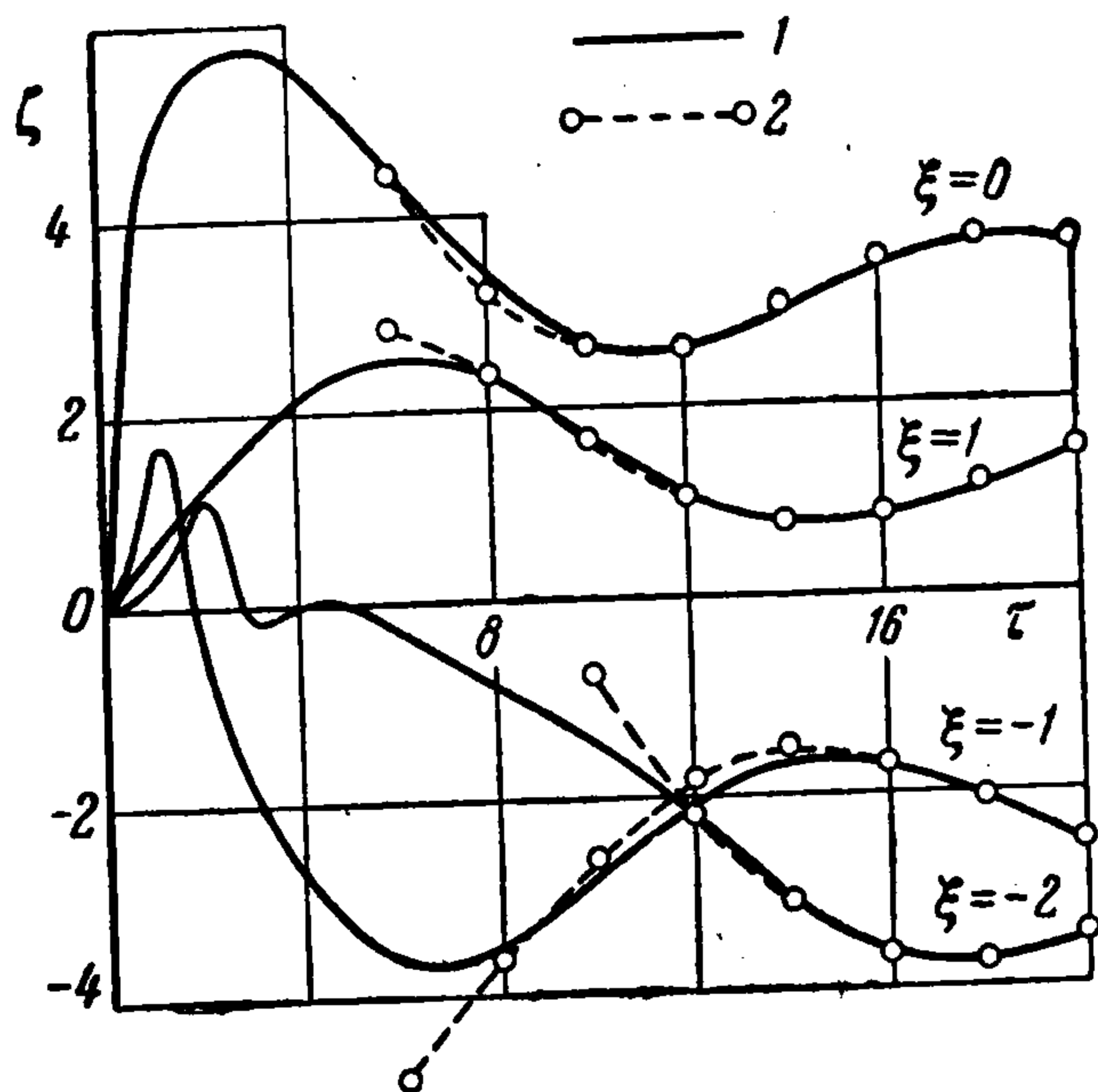
для $\eta = 0$ будем иметь

$$\zeta^{(\infty)} = S_1 + S_2 - S_3 \quad (1.8)$$

$$S_1 = \frac{1}{v} \int_0^{\alpha_0} \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha (1 + \zeta_1)}{\operatorname{ch} \alpha} \sin \frac{\sigma \xi}{v} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - \alpha^2 v^2}}$$

$$S_2 = \frac{1}{v} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha (1 + \zeta_1)}{\operatorname{ch} \alpha} \cos \frac{\sigma \xi}{v} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 v^2 - \sigma^2}}$$

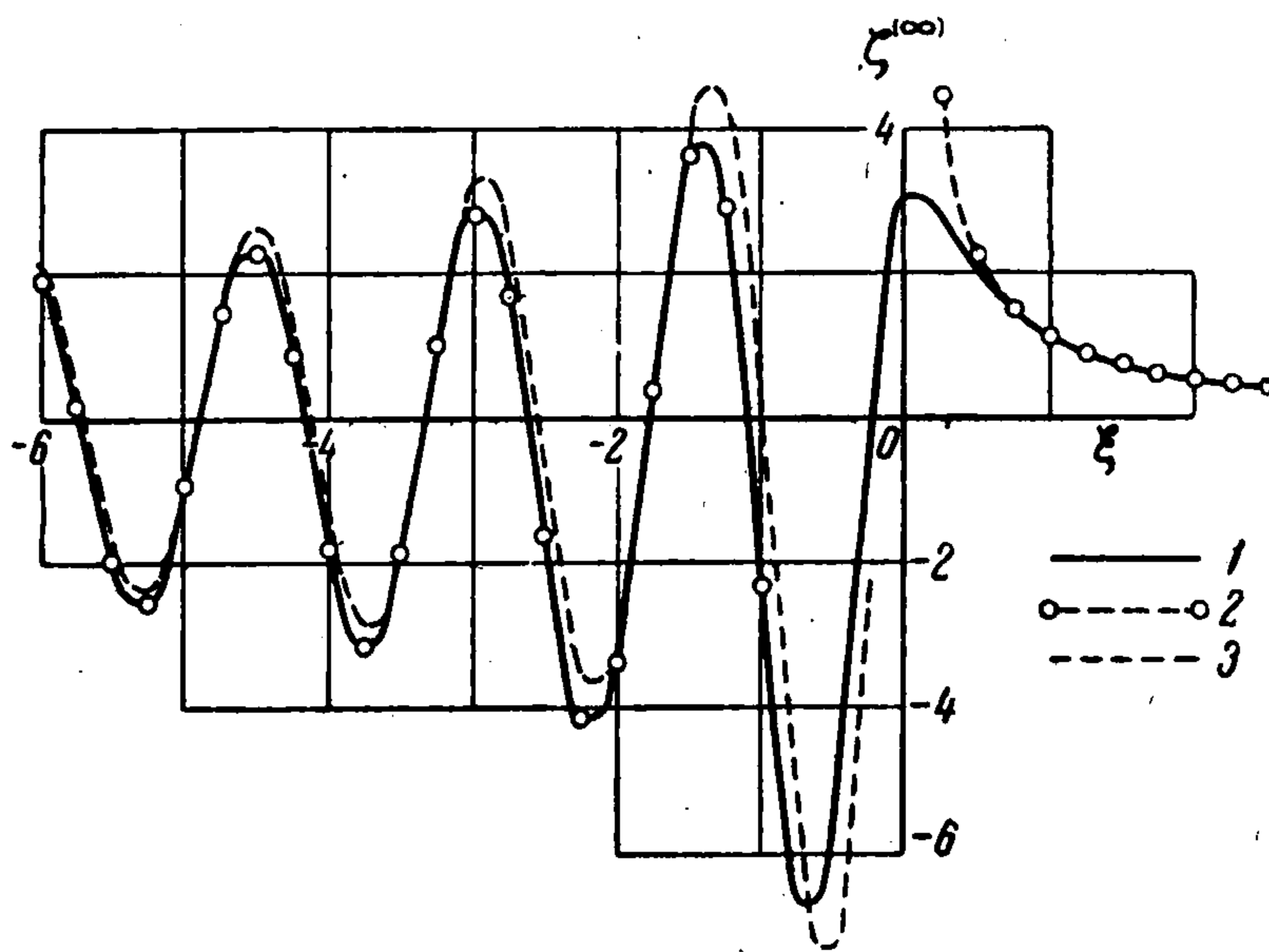
$$S_3 = \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha (1 + \zeta_1)}{\operatorname{ch} \alpha} \int_0^{\xi} J_0(\alpha \beta) \times \\ \times \cos \frac{\sigma(\xi - \beta)}{v} d\beta d\alpha$$



Фиг. 1

На фиг. 2 (кривая 1) представлена форма свободной поверхности при установившемся движении рассмотренного выше источника. Опыт проведения расчетов показывает, что при больших значениях ξ и τ численное интегрирование (1.7) и (1.8) становится практически невозможным, так как требует непроизводительно высоких затрат машинного времени.

Указанные трудности связаны с осциллирующим характером подынтегральных функций в (1.7) и (1.8). Вместе с тем известно, что интегралы от быстроосциллирующих функций довольно точно оцениваются своими асимптотическими разложениями. Такие разложения можно получить, (например, при помощи принципа стационарной фазы. Но формула стационарной фазы дает только первый член асимптотического разложения, кроме того, она может применяться лишь в том случае, когда знаменатель подынтегральной функции не обращается в нуль. Поэтому ниже будут получены асимптотические разложения интегралов более общего вида.



Фиг. 2

§ 2. Интегралы от быстроосциллирующих функций, которые встречаются при решении волновых задач, в большинстве случаев могут быть представлены в виде

$$I = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{f_1(u)}{f_2(u)} e^{ik\varphi(u)} du \quad (2.1)$$

Здесь k — большой параметр, а $\varphi(u)$, $f_1(u)$ и $f_2(u)$ дифференцируемы при $\alpha \leq u \leq \gamma$.

Если в пределах интервала интегрирования $\varphi'(u) \neq 0$ и $f_2(u) \neq 0$, то для получения асимптотического разложения достаточно интегрировать (2.1) по частям, при этом каждое интегрирование будет давать очередной член разложения [4].

Случаи, в которых имеются «особенности» — нули в знаменателе или нулевые значения производной фазовой функции тригонометрического множителя (стационарные точки) — требуют особого рассмотрения. При этом оказывается возможным представить исследуемый интеграл в виде суммы двух слагаемых, из которых одно имеет такую же особенность, как и рассматриваемый интеграл, но может быть проинтегрировано в замкнутом виде, а второе не содержит особенностей и допускает интегрирование по частям.

Пусть при $\alpha < \beta < \gamma$ имеем $\varphi(\beta) = 0$ и $f_2(\beta) = 0$, а $\varphi'(\beta) \neq 0$ и $f_2'(\beta) \neq 0$. Тогда, вводя обозначение $\psi(u) = \varphi(u) f_1(u) / f_2(u)$, где $\psi(u)$ — дифференцируема, получим

$$I = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} e^{ik\varphi(u)} du = \int_{\alpha}^{\gamma} \left[\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)} - \frac{\psi(\beta)}{\varphi'(\beta)} \right] \frac{e^{ik\varphi(u)}}{\varphi(u)} \varphi'(u) du + \frac{\psi(\beta)}{\varphi'(\beta)} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} \frac{e^{ikw}}{w} dw \quad (2.2)$$

Первое слагаемое в правой части (2.2) особенностей не содержит и может быть проинтегрировано по частям, а второе представим в виде

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} \frac{1}{w} e^{ikw} dw = - \int_{-\infty}^{\varphi(\alpha)} \frac{1}{w} e^{ikw} dw - \int_{\varphi(\gamma)}^{\infty} \frac{1}{w} e^{ikw} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w} e^{ikw} dw \quad (2.3)$$

Если $k > 0$ и $\varphi(\alpha) < \varphi(\gamma)$, т. е. $k\varphi'(\beta) > 0$, первое и второе слагаемые в правой части (2.3) также можно проинтегрировать по частям, а последнее вычисляется в замкнутом виде. Окончательно, с учетом того, что $k\varphi'(\beta)$ может быть меньше нуля, найдем

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} e^{ik\varphi(u)} du = \frac{\pi i \psi(\beta)}{\varphi'(\beta)} \operatorname{sign} k\varphi'(\beta) + C(u) \Big|_{u=\alpha}^{u=\gamma} \quad (2.4)$$

где $C(u)$ получается формальным интегрированием по частям левой части (2.4).

Аналогичным путем могут быть получены асимптотические разложения при другом характере особенностей подынтегральной функции.

В частности, при $\varphi'(\beta) = 0$ и $\varphi''(\beta) \neq 0$ имеем

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \psi(u) e^{ik\varphi(u)} du = \psi_0 \left(\frac{\pi}{|k\varphi_2|} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{2ik} \left[\frac{15\varphi_3^2 - 12\varphi_2\varphi_4}{8\varphi_2^3} - \frac{3\psi_1\varphi_3}{2\psi_0\varphi_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\psi_2}{\psi_0\varphi_2} \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\} \exp\left(ik\varphi_0 + \frac{\pi i}{4} \operatorname{sign} k\varphi_2 \right) + C(u) \Big|_{u=\alpha}^{u=\gamma} \quad (2.5)$$

$$\psi_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial u^n} \Big|_{u=\beta}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n} \Big|_{u=\beta}$$

Первый член приведенного разложения дает формулу стационарной фазы.

Из полученных выше формул следует, что асимптотическое разложение интеграла при наличии особенностей состоит из двух частей, из которых одна получается формальным интегрированием по частям, а другая связана с наличием особенности и определяется ее характером. Очевидно также, что если в пределах интервала интегрирования имеется несколько точек с особенностями, то соответствующие им вклады следует сложить.

§ 3. Для применения полученных выше асимптотических формул заменим функцию Бесселя в (1.7) ее интегральным представлением

$$J_0(\alpha \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [\alpha (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)] d\theta$$

и выполним интегрирование по времени

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{1}{2\pi v} \sum_{n=1}^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha (1 + \zeta_1)}{\operatorname{ch} \alpha} \left\{ \frac{(-1)^{n+1} \sin [\alpha \rho \cos (\vartheta - \theta)]}{\sigma + (-1)^n \alpha v \cos \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\sin [\sigma \tau + (-1)^n \alpha v \tau \cos \theta + (-1)^n \alpha \rho \cos (\vartheta - \theta)]}{\sigma + (-1)^n \alpha v \cos \theta} \right\} d\alpha \quad (3.1) \\ (\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\eta / \xi), \quad \eta > 0) \end{aligned}$$

Ограничимся случаем докритических скоростей ($v < 1$). Во внутреннем интеграле полученного выражения при $n = 1$ в нуль могут обращаться знаменатели, и, кроме того, во втором слагаемом возможны стационарные точки.

При больших значениях ρ , когда порядок отношения τ / ρ равен единице, вклад от первой из указанных особенностей может быть получен при помощи формулы (2.4)

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} = \frac{1}{2v} \int_0^\pi \frac{\alpha_i^\circ \operatorname{ch} \alpha_i^\circ (1 + \zeta_1) \cos [\alpha_i^\circ \rho \cos (\vartheta - \theta)]}{\operatorname{ch} \alpha_i^\circ (\sigma' - v \cos \theta)} \left\{ \operatorname{sign} [\cos (\vartheta - \theta)] + \right. \\ \left. + \operatorname{sign} \left[\sigma' - \frac{\sigma}{\alpha_i^\circ} - \frac{\rho}{\tau} \cos (\vartheta - \theta) \right] \right\} d\theta \quad (3.2) \\ (\sigma_i^\circ = \sigma(\alpha_i^\circ), \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{d\alpha} \text{ при } \alpha = \alpha_i^\circ) \end{aligned}$$

Здесь α_i° — корень уравнения

$$\sigma = \alpha v \cos \theta \quad (3.3)$$

Фигурная скобка в правой части (3.2) отлична от нуля при

$$|\vartheta - \theta| > \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\sigma}{\alpha_i^\circ} - \sigma' > -\frac{\rho}{\tau} \cos (\vartheta - \theta) \quad (3.4)$$

В этом случае интеграл по θ имеет стационарные точки. Дифференцируя фазовую функцию тригонометрического множителя с учетом того, что θ и α_i° связаны соотношением (3.3), получим следующее условие для определения значений α_i , соответствующих стационарным точкам

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\alpha_i^\circ \cos (\vartheta - \theta)] = \frac{\alpha_i^{\circ 2} v \sin \theta}{\sigma - \alpha_i^\circ \sigma'} \cos (\vartheta - \theta) + \alpha_i^\circ \sin (\vartheta - \theta) = 0 \quad (3.5)$$

Это уравнение может иметь два корня ($i = 1, 2$); поэтому при помощи формулы (2.5) получим

$$\zeta^{(1)} = \frac{V 2\pi}{v} \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i \operatorname{ch} \alpha_i (1 + \zeta_1) [\alpha_i^2 (v^2 + \sigma'^2) - 2\alpha_i \sigma \sigma']^{1/2}}{(\xi^2 + \eta^2)^{1/4} \operatorname{ch} \alpha_i [\alpha_i \sigma'' (\alpha_i^2 v^2 - \sigma^2) + \sigma' (\sigma - \alpha_i \sigma')^2]^{1/2}} \times \\ \times \cos \left[\frac{\sigma |\xi|}{v} - \frac{V \alpha_i^2 v^2 - \sigma^2}{v} \eta - (-1)^i \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.6)$$

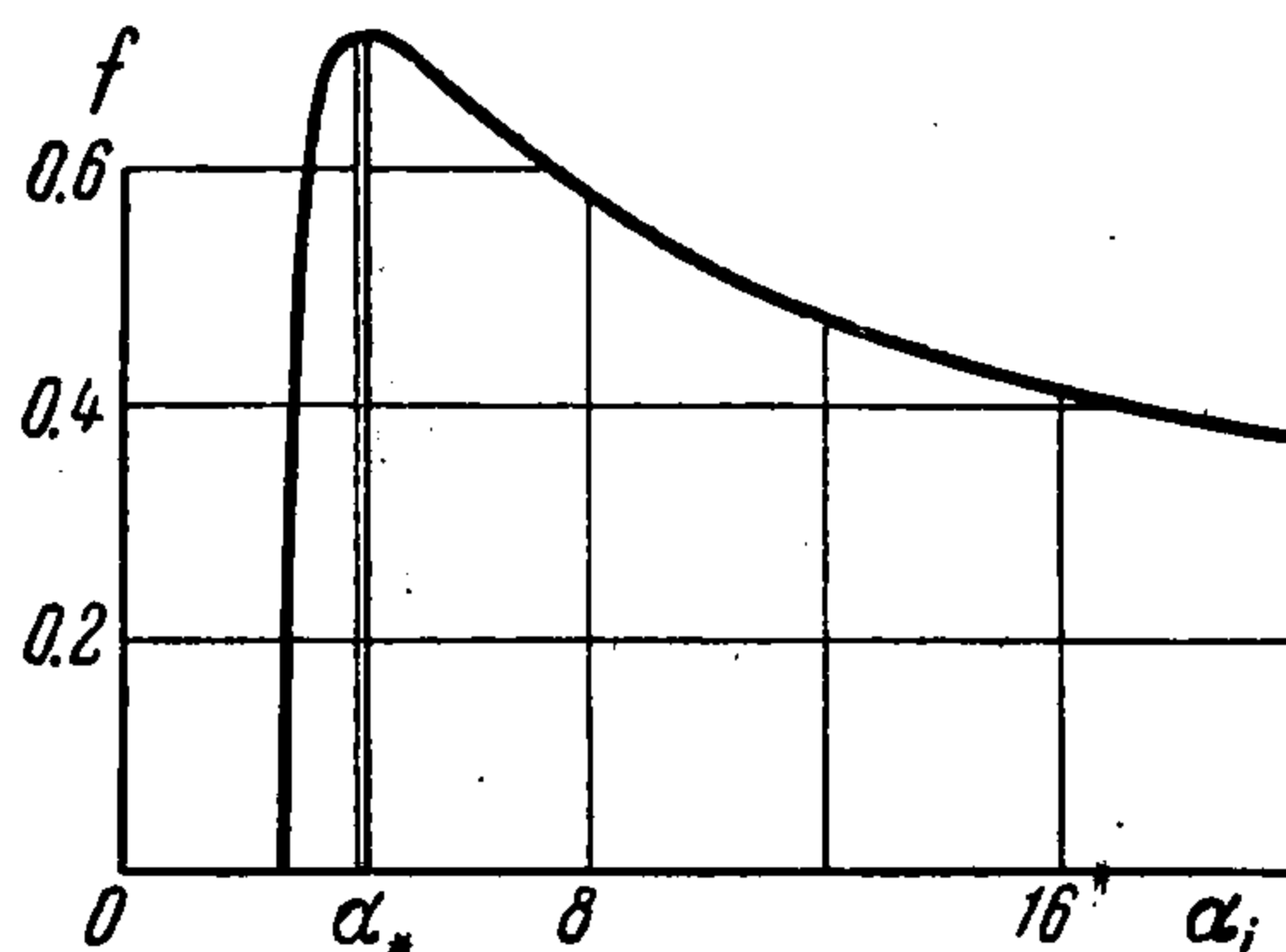
Здесь σ , σ' и σ'' следует брать при $\alpha = \alpha_i$.

Рассмотрим условия существования корней уравнения (3.5). Для этого при помощи (3.3) исключим θ

$$\operatorname{tg} \theta = -f(\alpha_i), \quad f(\alpha_i) = \frac{\sigma' V \alpha_i^2 v^2 - \sigma^2}{\alpha_i v^2 - \sigma \sigma'} \quad (3.7)$$

На фиг. 3 представлен график функции $f(\alpha_i)$ при $v = 0.6$, из которого следует, что (3.7) может иметь корни только для точек, лежащих внутри угла

$$\pi > \theta > \operatorname{arc} \operatorname{tg} [-f(\alpha_*)] \quad (3.8)$$



Фиг. 3

Другая граница задается условием (3.4), которое после исключения θ приводится к виду

$$\frac{\rho}{\tau} < \left((v^2 + \sigma'^2) - \frac{2\sigma\sigma'}{\alpha_i} \right)^{1/2}$$

или

$$0 > \frac{\xi}{\tau} > -\frac{\alpha_i v^2 - \sigma \sigma'}{\alpha_i v}, \quad \frac{\eta}{\tau} < \frac{\sigma' V \alpha_i^2 v^2 - \sigma^2}{\alpha_i v} \quad (3.9)$$

На фиг. 4 представлен общий вид полученных выше границ при $v = 0.6$ и $\tau = 10.5$, а также формы линий равной фазы, которые получаются, если приравнять аргумент косинуса в правой части (3.6) величине $m\pi$ ($m = 1, 2, \dots$). Это условие вместе с (3.7) дает для определения ξ и η систему двух уравнений с параметром α_i , величина которого может быть задана произвольно. Геометрическое место полученных таким образом точек (пунктир на фиг. 4) соответствует положению гребней и впадин волновой системы, распространяющейся за источником. Анализ формы этих кривых показывает, что точки, которые соответствуют $\alpha_i < \alpha_*$ ($i = 1$), дают систему поперечных волн, а $\alpha_i > \alpha_*$ ($i = 2$) — расходящиеся волны. Из условия (3.9) следует, что позади источника имеется область, где существуют только расходящиеся волны¹.

При $H \rightarrow \infty$ формула (3.8) переходит в обычное условие для границы волнового следа $\pi > \theta > \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1/V\sqrt{8})$, а (3.9) дает окружность

$$\left(\frac{\xi}{\tau} + \frac{3v}{4} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\tau} \right)^2 = \left(\frac{v}{4} \right)^2 \quad (3.10)$$

¹ В работе [1] ошибочно утверждается, что в этой области существуют только поперечные волны (стр. 729). Как показано ниже, это не соответствует законам передачи энергии и распространения волн в жидкости.

Помимо рассмотренных выше особенностей, внутренний интеграл в (3.1) имеет стационарные точки при $\alpha = \alpha_k^\circ$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = \sigma' + (-1)^n v \cos \theta + (-1)^n \frac{\rho}{\tau} \cos (\vartheta - \theta) = 0 \quad (3.11)$$

Тогда, применяя формулу (2.5), при больших τ можно получить

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{v \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \frac{\alpha_k^\circ \operatorname{ch} \alpha_k^\circ (1 + \zeta_1) \sin [(\sigma - \alpha_k^\circ \sigma') \tau - 1/4\pi]}{\sqrt{\tau |\sigma''|} \operatorname{ch} \alpha_k^\circ \sigma + (-1)^n \alpha_k^\circ v \cos \theta} d\theta \quad (3.12)$$

Интеграл (3.12) также может иметь стационарные точки, которые определяются условием

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = (-1)^{n+1} \alpha_k^\circ \left[v \sin \theta - \frac{\rho}{\tau} \sin (\vartheta - \theta) \right] = 0 \quad (3.13)$$

или, после исключения θ при помощи (3.11), условием

$$(v + \xi/\tau)^2 + (\eta/\tau)^2 = \sigma'^2 \quad (3.14)$$

Можно показать, что уравнение (3.11) при $\eta > 0$ имеет решения только при $n = 1$, в этом случае, в соответствии с формулой (2.5), получим

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{v\tau} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (1 + \zeta_1)}{\operatorname{ch} \alpha_k} \left(\frac{\alpha_k}{\sigma' |\sigma''|} \right)^{1/2} \frac{\sin (\sigma - \alpha_k \sigma') \tau}{\sigma - \alpha_k v \cos \theta_k} \cdot \cos \theta_k = \frac{v^2 + \sigma'^2 - (\rho/\tau)^2}{2v\sigma'} \quad (3.15)$$

Здесь α_k — корень уравнения (3.13) или (3.14).

Из (3.14) следует, что стационарные точки возможны только при

$$(v + \xi/\tau)^2 + (\eta/\tau)^2 < 1 \quad (3.16)$$

Вне этой области $\zeta^{(2)} = 0$.

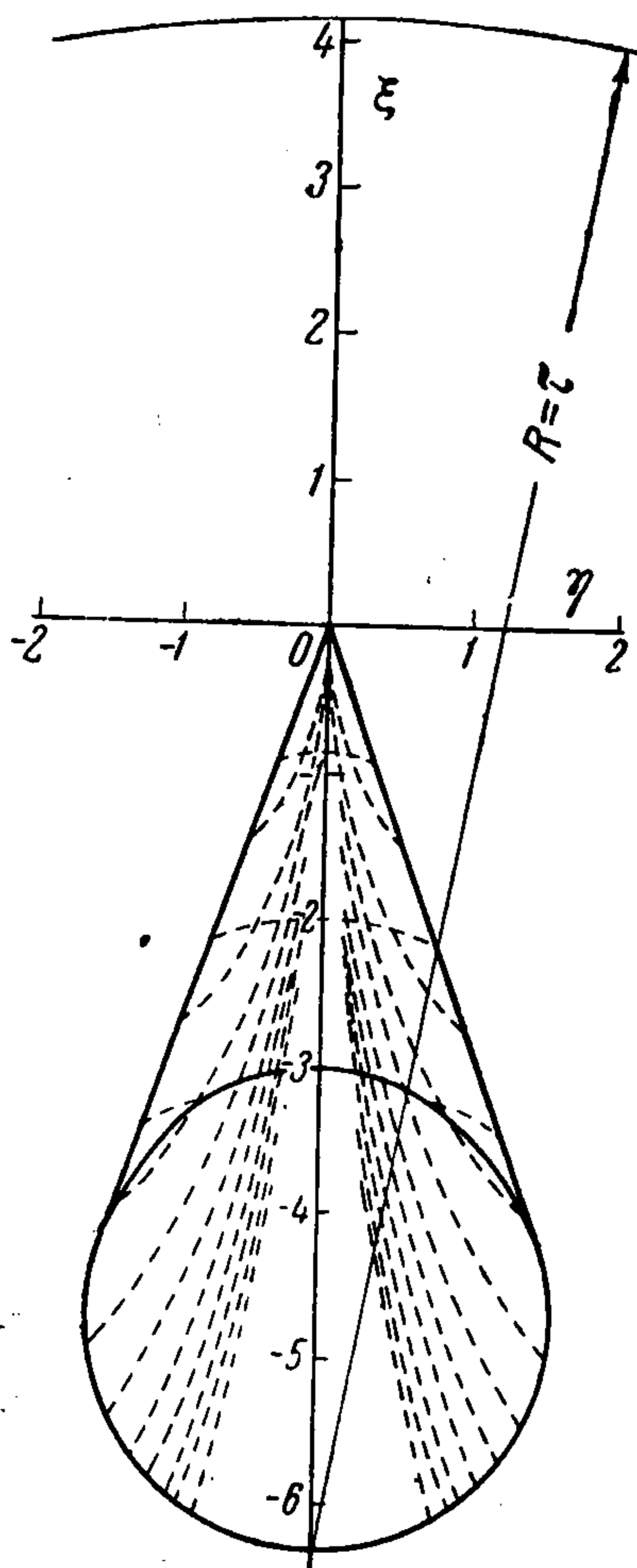
Как уже указывалось, для получения искомого асимптотического разложения к (3.6) и (3.15) следует прибавить результат интегрирования по частям внутреннего интеграла (3.1), которое дает

$$\zeta^{(0)} = \frac{1}{v\tau} \frac{(v\tau + \xi)\xi + \eta^2}{\xi^2 + (1-v)\eta^2} \left[1 - \left(v + \frac{\xi}{\tau} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{\tau} \right)^2 \right]^{-1/2} + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

Эта составляющая также отлична от нуля только внутри круга (3.16). Окончательно получим

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} \quad (3.17)$$

Отсюда при $\tau \rightarrow \infty$, очевидно, вытекает асимптотическое разложение для ординат свободной поверхности при установившемся движении источника. На фиг. 2 (кривая 2) представлены результаты асимптотическо-



Фиг. 4

го расчета для $\eta = 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ с учетом члена порядка $\xi^{3/2}$ в формуле (3.6). Полученные значения хорошо согласуются с точными уже при $\xi \approx 1$. Для сравнения на график нанесены результаты расчета при помощи формулы стационарной фазы (кривая 3).

Аналогичные расчеты были выполнены и для случая неустановившегося движения. Как показывает вывод, формула (3.15) должна быть справедливой при любых, в том числе и малых ρ , то же относится и к $\zeta^{(0)}$, если выделить из нее составляющую, которая не зависит от времени. Поэтому, заменяя в (3.17) асимптотическое разложение ординат волн установившегося движения их точными значениями, можно получить асимптотическую формулу, применимую при любых ρ

$$\zeta = \zeta^{(\infty)} + \zeta^{(2)} + \zeta^{(0)} - \frac{\xi}{\xi^2 + (1-v)\eta^2} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.18)$$

Результаты расчета по формуле (3.18), приведенные на фиг. 1 (кривая 2), свидетельствуют о высокой точности полученной асимптотической формулы в диапазоне значений τ , где расчет методом численного интегрирования становится затруднительным.

Аналогичным методом может быть исследован случай исчезновения источника, двигавшегося до этого с постоянной скоростью, который в первом приближении описывает поведение волн при торможении источника. Для этого достаточно найти разность ординат волн при установившемся движении (1.8) и при разгоне — (1.7).

В заключение следует отметить, что полученные выше диапазоны существования отдельных составляющих асимптотических разложений полностью согласуются с законами распространения возмущений в жидкости конечной глубины. Действительно, их скорость не может быть выше критической, поэтому вне круга (3.16) жидкость остается в покое. Далее, для поперечных волн, которые вблизи линии $\eta = 0$ оказываются практически плоскими (фиг. 4), групповая скорость в соответствии с (3.2) и (3.7) равна σ' . Точка, которая из начала связанной с источником системы координат при $\tau > 0$ движется вдоль оси x со скоростью σ' , к рассматриваемому моменту времени τ достигнет верхней точки области (3.10). Поэтому вся энергия поперечных волн, которая, как известно, передается с групповой скоростью [5], к моменту τ окажется перенесенной через верхнюю границу области (3.10), и поперечные волны внутри этой области полностью затухнут.

Поступила 3 VIII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В. Развитие и затухание корабельных волн. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. Finkelstein A. B. The Initial Value Problem for Transient water Waves. *Communs. Pure and Appl. Math.*, 1957, vol. 10.
3. Сретенский Л. Н. Теоретическое исследование о волновом сопротивлении. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 319.
4. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.
5. Милн-Томпсон Л. М. Теоретическая гидродинамика, Изд. «Мир», 1964.