Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

# АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Исследуется движение невесомой жидкости со свободной поверхностью, возникающее из покоя под действием сил поверхностного натяжения. Дается постановка автомодельной задачи и ее решение для одного случая.

1. Рассмотрим плоское движение идеальной несжимаемой невесомой жидкости плотности $\rho$; пусть $x, y$ — прямоугольные декартовы координаты в плоскости течения. В момент времени $t = 0$ жидкость покоится и занимает клин (фиг. 1) с углом раствора $\alpha$, ограниченный свободной поверхностью $y = 0$ и твердой стенкой $y = -x \operatorname{tg} \alpha$. Коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$ на свободной границе и краевой угол $\gamma$ на границе жидкости со стенкой (фиг. 1) считаем постоянными. Если $\gamma \neq \alpha$, то при $t > 0$ жидкость придет в движение, которое, очевидно, будет потенциальным. Движение такого рода может развиться при внезапном «включении» поверхностного натяжения, а также, например, в следующем случае. Пусть при $t < 0$ жидкость покоится в поле тяжести. Свободная поверхность при этом существенно отличается от плоскости $y = 0$ лишь в области вблизи стенки, где образуется мениск [1]. Размеры мениска будут тем меньше, чем больше отношение силы тяжести к силам поверхностного натяжения. Пусть в момент $t = 0$ сила тяжести мгновенно обращается в нуль. Тогда при $t > 0$ возникнет движение, которое будет близко к рассматриваемому здесь автомодельному движению, если размеры начального мениска малы по сравнению с интересующими нас масштабами процесса (т. е. если сила тяжести при $t < 0$ была достаточно большой).

Потенциал скоростей $\varphi^\circ (x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения и условию непротекания на стенке (индексы внизу означают частные производные)

$$\varphi_{xx}^\circ + \varphi_{yy}^\circ = 0, \qquad \varphi_y^\circ + \varphi_x^\circ \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \text{при } y = -x \operatorname{tg} \alpha \tag{1.1}$$

Давление $p$ в жидкости у свободной поверхности $y = f^\circ (x, t)$ связано [1] с постоянным давлением $p_0$ вне жидкости соотношением

$$p = p_0 - \sigma K, \qquad K = \pm f_{xx}^\circ (1 + f_x^{\circ 2})^{-3/2} \tag{1.2}$$

Здесь $K$ — кривизна свободной поверхности. Верхний знак в формуле (1.2), а также в (1.7), нужно брать тогда, когда жидкость лежит ниже свободной поверхности (как на фиг. 1), а нижний знак — в противном случае.

Учитывая формулу для $p$, запишем для точек на свободной поверхности интеграл Коши — Лагранжа, а также кинематическое условие (1.3)

$$\varphi_t^\circ + {}^1/_2\,(\nabla\varphi^\circ)^2 - \sigma K\,/\,\rho = 0, \qquad f_t^\circ + f_x^\circ\varphi_x^\circ - \varphi_y^\circ = 0 \quad \text{при } y = f^\circ(x, t)$$

В точке контакта свободной границы со стенкой имеем

$$f_x^\circ(x, t) = \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) \quad \text{при } y = f^\circ(x, t) = -x\operatorname{tg}\alpha \tag{1.4}$$

Начальные условия и условия на бесконечности имеют вид

$$\varphi^\circ(x, y, 0) = f^\circ(x, 0) \equiv 0, \quad \varphi^\circ, f^\circ \to 0 \quad \text{при } x, y \to \infty \tag{1.5}$$

Задача (1.1) — (1.5) об определении функций $\varphi^\circ$, $f^\circ$ будет автомодельной: она содержит два размерных параметра $\sigma$, $\rho$ с размерностями $[\sigma] = MT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$. Введем безразмерные независимые переменные $\xi$, $\eta$ и безразмерные искомые функции $\varphi$, $f$

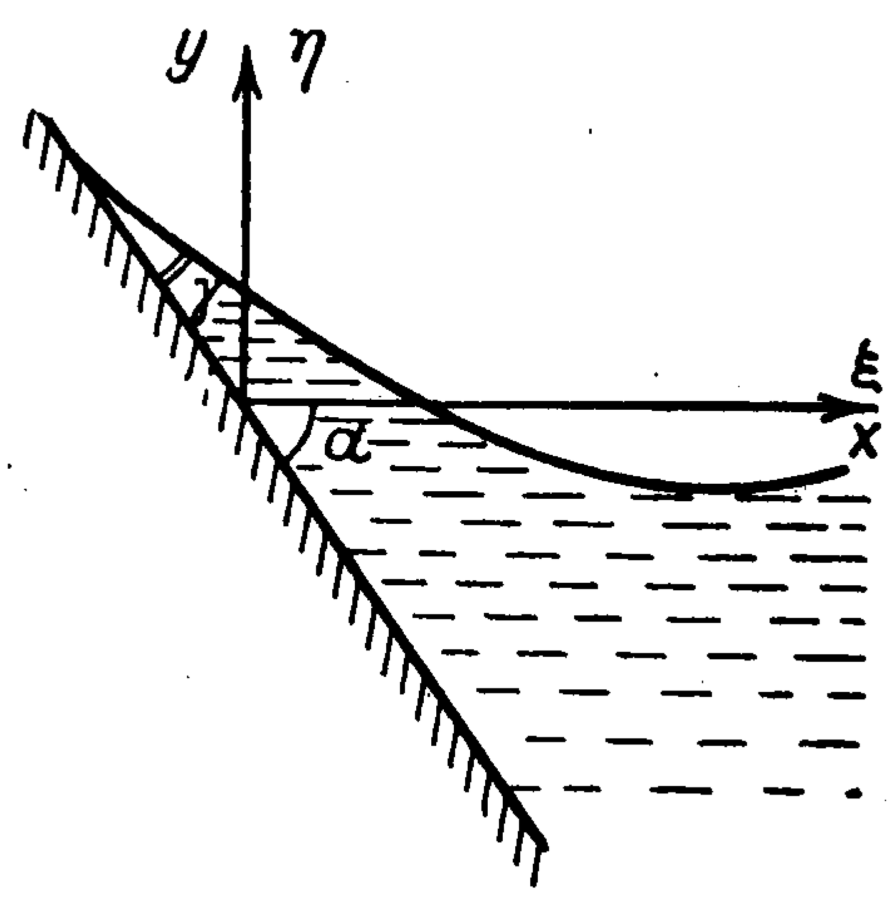
$$x = \left(\frac{\sigma t^2}{\rho}\right)^{1/3}\xi, \quad y = \left(\frac{\sigma t^2}{\rho}\right)^{1/3}\eta, \quad \varphi^\circ = \left(\frac{\sigma^2 t}{\rho^2}\right)^{1/3}\varphi(\xi, \eta), \quad f^\circ = \left(\frac{\sigma t^2}{\rho}\right)^{1/3} f(\xi) \tag{1.6}$$

Переходя в уравнениях (1.1) — (1.5) к новым переменным согласно (1.6), получим краевую задачу для функций $\varphi$, $f$

$$\begin{gathered}
\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} = 0, \quad \varphi_\eta + \varphi_\xi \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad \text{при } \eta = -\xi\operatorname{tg}\alpha \\
{}^1/_3\,\varphi - {}^2/_3\,(\xi\varphi_\xi + \eta\varphi_\eta) + {}^1/_2\,(\nabla\varphi)^2 \mp f''\,(1 + f'^2)^{-3/2} = 0 \\
{}^2/_3\,(f - \xi f') + f'\varphi_\xi - \varphi_\eta = 0 \quad \text{при } \eta = f(\xi) \\
f' = \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) \quad \text{при } f(\xi) = -\xi\operatorname{tg}\alpha \\
\varphi(\xi, \eta) \to 0, \quad f(\xi) \to 0 \quad \text{при } \xi, \eta \to \infty
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь штрих означает производную по $\xi$. Нелинейная краевая задача (1.7) ставится для области (фиг. 1), ограниченной прямой $\eta = -\xi\operatorname{tg}\alpha$ и неизвестной кривой $\eta = f(\xi)$. Аналогично можно рассмотреть автомодельное осесимметричное движение.

2. Задача (1.7) может быть линеаризована, если углы $\gamma$ и $\alpha$ близки один к другому, т. е. $\gamma - \alpha = \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$. При линеаризации функции $\varphi$, $f$ и их производные считаем малыми порядка $\varepsilon$, а условия с неизвестной границы $\eta = f(\xi)$ сносим на прямую $\eta = 0$.



Фиг. 1

Из двух знаков в (1.7) нужно выбрать верхний, так как при $|\varepsilon| \ll 1$ возмущения свободной границы малы, и жидкость всюду лежит ниже свободной поверхности.

Примем для определенности $\alpha = {}^1/_2\pi$. Тогда линеаризированная краевая задача сводится к определению функции $\varphi(\xi, \eta)$, гармонической в квадранте $\xi > 0$, $\eta < 0$, и функции $f(\xi)$ по условиям

$$\begin{gathered}
{}^1/_3\varphi - {}^2/_3\,\xi\varphi_\xi - f'' = 0, \quad {}^2/_3\,(f - \xi f') - \varphi_\eta = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\
\varphi_\xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \qquad f'(0) = \varepsilon \\
\varphi(\xi, \eta) \to 0, \quad f(\xi) \to 0 \quad \text{при } \xi, \eta \to \infty
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Дифференцируя по $\xi$ второе условие (2.1), исключим $f''$ из условий при $\eta = 0$ и получим краевые условия для $\varphi$ в виде

$$\varphi_{\xi\eta} - {}^4/_9\,\xi^2\varphi_\xi + {}^2/_9\,\xi\varphi = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\varphi_\xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \qquad \varphi \to 0 \quad \text{при } \xi,\ \eta \to \infty \tag{2.2}$$

Однородная линейная краевая задача (2.2) содержит вторую производную $\varphi_{\xi\eta}$ в граничном условии и не относится к числу изученных типов краевых задач. Как будет показано, эта задача имеет однопараметрическое семейство решений, а единственное решение выделяется условием $f'(0) = \varepsilon$.

Введем комплексную переменную $z = \xi + i\eta$ и комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$, где $\psi$ — гармоническая функция, сопряженная с $\varphi$. Не нарушая общности, на основании (2.2) полагаем $\psi = 0$ при $\xi = 0$. Поэтому аналитическую функцию $w(z)$ можно по симметрии продолжить во всю нижнюю полуплоскость $\eta < 0$. На вещественной оси, как следует из (2.2), получим (штрих означает производную по $z$)

$$\operatorname{Re}\,(iw'' - {}^4/_9\,z^2w' + {}^2/_9\,zw) = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{2.3}$$

Сделаем естественное допущение, что $w$ стремится к 0 как потенциал диполя при $z \to \infty$, т. е. $w = O(z^{-1})$, $w' = O(z^{-2})$, $w'' = O(z^{-3})$ при $z \to \infty$. Это допущение оправдывается тем, что ниже будет построено единственное решение, обладающее такой асимптотикой при $z \to \infty$.

Функция под знаком Re в равенстве (2.3) аналитична при $\eta < 0$ и, в силу сделанного допущения, ограничена на бесконечности. Тогда из (2.3) следует

$$iw'' - {}^4/_9\,z^2w' + {}^2/_9\,zw = iC \tag{2.4}$$

Здесь $C$ — пока произвольная вещественная постоянная.

Итак, краевая задача (2.1) сведена к нахождению решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения (2.4) при заданной асимптотике $w = O(z^{-1})$ на бесконечности.

Когда функция $w(z) = \varphi + i\psi$ найдена, форма свободной поверхности $f(\xi)$ определяется из второго условия (2.1), которое представляет собой линейное уравнение первого порядка для $f$. Учитывая равенство $\varphi_\eta = -\psi_\xi$, запишем решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $f(\infty) = 0$

$$f(\xi) = -\frac{3\xi}{2}\int_\xi^\infty \frac{\psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx \tag{2.5}$$

Продифференцируем равенство (2.5) и приравняем $f'(0) = \varepsilon$

$$f'(\xi) = -\frac{3}{2}\int_\xi^\infty \frac{\psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx + \frac{3\psi_\xi(\xi, 0)}{2\xi} = \frac{3}{2}\int_\xi^\infty \frac{\psi_\xi(\xi, 0) - \psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx$$

$$\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\psi_\xi(0, 0) - \psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx = \varepsilon \tag{2.6}$$

Интеграл (2.6) сходится при $x = \infty$ в силу асимптотики $w = O(z^{-1})$, $\psi_\xi = O(\xi^{-2})$. Из условия симметрии $\psi(0, \eta) = 0$ следует, что $\psi(\xi, 0)$ — нечетная, а $\psi_\xi(\xi, 0)$ — четная функция $\xi$. Значит, $\psi_\xi(0, 0) - \psi_\xi(x, 0) = O(x^2)$ при $x \to 0$, и интеграл (2.6) сходится и при $x = 0$. Условие (2.6) служит для определения постоянной $C$ из (2.4), которая войдет множителем в $w$. Нетрудно проверить, что для $f(\xi)$ из (2.5) выполнено условие, выражающее сохранение массы жидкости

$$\int_0^\infty f(\xi)\, d\xi = 0$$

**3.** Частное решение $w_0$ неоднородного уравнения (2.4) и линейно независимые частные решения $w_1$, $w_2$ соответствующего (2.4) однородного уравнения ищем в виде

$$w_0 = C \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{3k+2}, \qquad w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k' z^{3k}, \qquad w_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k'' z^{3k+1}$$

Подставляя каждый из этих рядов в уравнение и приравнивая коэффициенты при степенях $z$, получим рекуррентные соотношения (коэффициенты $a_0'$, $a_0''$ произвольны)

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{2(-i)(2k-1)}{3(3k+1)(3k+2)}, \qquad \frac{a_k'}{a_{k-1}'} = \frac{2(-i)(2k-{}^7/_3)}{3(3k-1)\,3k}$$

$$\frac{a_k''}{a_{k-1}''} = \frac{2(-i)(2k-{}^5/_3)}{3\cdot 3k(3k+1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Этим равенствам, как нетрудно проверить, можно удовлетворить, полагая

$$a_k = \frac{(-i)^k(2k)!}{(3k+2)!}, \qquad a_k' = \frac{(-i)^k\Gamma(2k-{}^1/_3)}{(3k)!}, \qquad a_k'' = \frac{(-i)^{k+1}\Gamma(2k+{}^1/_3)}{(3k+1)!}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Следовательно, искомые функции $w_0$, $w_1$, $w_2$ и общее решение $w$ уравнения (2.4) равны

$$w_0 = C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k(2k)!}{(3k+2)!}z^{3k+2}, \qquad w_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k\Gamma(2k-{}^1/_3)}{(3k)!}z^{3k}$$
$$w_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{k+1}\Gamma(2k+{}^1/_3)}{(3k+1)!}z^{3k+1}, \qquad w = w_0 + C_1 w_1 + C_2 w_2 \tag{3.1}$$

Ряды в (3.1) сходятся при всех $z \neq \infty$, т. е. $w$ — целая функция.

Так как искомое частное решение удовлетворяет условию $\operatorname{Im} w = 0$ при $z = i\eta$, то произвольные постоянные $C_1$, $C_2$, как и $C$, должны быть вещественны.

Для их определения сначала заменой переменных

$$\tau = -{}^4/_{27}\, iz^3, \qquad \arg\tau = 3\arg z + {}^3/_2\pi \tag{3.2}$$

сведем уравнение (2.4) к неоднородному вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\tau\frac{d^2w}{d\tau^2}+\left(\frac{2}{3}-\tau\right)\frac{dw}{d\tau}+\frac{w}{6}=-\frac{C}{2^{4/3}\tau^{1/3}} \tag{3.3}$$

В качестве линейно независимых частных решений однородного уравнения, соответствующего (3.3), примем конфлюэнтные гипергеометрические функции [2,3]

$$\Phi=\Phi\left(-{}^1/_6,\ {}^2/_3;\ \tau\right),\qquad \Psi=\Psi\left(-{}^1/_6,\ {}^2/_3;\ \tau\right) \tag{3.4}$$

Вронскиан решений (3.4) равен [2]

$$W=\Phi\Psi_\tau'-\Psi\Phi_\tau'=-\left[\Gamma\left({}^2/_3\right)/\Gamma\left(-{}^1/_6\right)\right]e^\tau\tau^{-2/3} \tag{3.5}$$

Решение неоднородного уравнения (3.3) ищем методом вариации произвольных постоянных, полагая

$$w=u\Phi+v\Psi,\qquad w_\tau'=u\Phi_\tau'+v\Psi_\tau' \tag{3.6}$$

Как обычно в методе вариации постоянных, получим для функций $u$, $v$ равенства

$$\frac{du}{d\tau}=\frac{C\Psi}{2^{4/3}\tau^{4/3}W}=-De^{-\tau}\tau^{-2/3}\Psi$$
$$\frac{dv}{d\tau}=De^{-\tau}\tau^{-2/3}\Phi,\qquad D=\frac{C\Gamma\left(-{}^1/_6\right)}{2^{4/3}\Gamma\left({}^2/_3\right)} \tag{3.7}$$

При выводе соотношений (3.7) использована формула (3.5).

В области течения, в силу (3.2), имеем

$$\xi>0,\ \eta<0;\qquad -{}^1/_2\pi<\arg z<0;\qquad 0<\arg\tau<{}^3/_2\pi$$

Найдем асимптотику решения $w$ при $\tau\to\infty$ в секторе $0<\arg\tau<{}^1/_2\pi$. В указанном секторе справедливы асимптотические формулы [2]

$$\Phi\sim\left[\Gamma\left({}^2/_3\right)/\Gamma\left(-{}^1/_6\right)\right]e^\tau\tau^{-5/6},\qquad \Psi\sim\tau^{1/6} \tag{3.8}$$

Подставим (3.8) в (3.7) и найдем $u$, $v$, выполняя асимптотически интегрирование. Затем подставим $u$, $v$ в выражение (3.6) для $w$. Получим

$$u\sim u(\infty)+De^{-\tau}\tau^{-1/2},\qquad v\sim v(\infty)-\frac{2D\Gamma\left({}^2/_3\right)}{\Gamma\left(-{}^1/_6\right)}\tau^{-1/2}$$
$$w\sim-2D\frac{\Gamma\left({}^2/_3\right)}{\Gamma\left(-{}^1/_6\right)}\tau^{-1/3}+u(\infty)\Phi+v(\infty)\Psi+O\left(\tau^{-4/3}\right) \tag{3.9}$$

Чтобы $w$ имело заданную асимптотику $w=O\left(z^{-1}\right)=O\left(\tau^{-1/3}\right)$ при $\tau\to\infty$, нужно приравнять нулю постоянные $u(\infty)=v(\infty)=0$. Тогда, учитывая еще значение (3.7) постоянной $D$ и связь (3.2), найдем из (3.9) асимптотику

$$w\sim(3iC)/(2z)\qquad\text{при } z\to\infty \tag{3.10}$$

Асимптотика (3.10) справедлива и в остальной части области течения, которая рассматривается аналогично.

Для функций $u$, $v$ из (3.7) получим

$$u(\tau)=-D\int_\infty^\tau e^{-\tau}\tau^{-2/3}\Psi\,d\tau,\qquad v(\tau)=D\int_\infty^\tau e^{-\tau}\tau^{-2/3}\Phi\,d\tau \tag{3.11}$$

Пути интегрирования в (3.11) начинаются при $\tau\to\infty$, $|\arg\tau|<{}^1/_2\pi$.

Искомое решение $w$ однозначно определяется формулами (3.6), (3.4), (3.11). Подставляя в формулы (3.11), (3.6) известные [2] разложения конфлюэнтных гипергеометрических функций (3.4) в ряды по степеням $\tau$, найдем разложение функции $w$ при малых $\tau$

$$w = \left[u(0) + v(0)\frac{\Gamma(^1/_3)}{\Gamma(^1/_6)}\right] + v(0)\frac{\Gamma(-^1/_3)}{\Gamma(-^1/_6)}\tau^{1/_3} + \frac{3D\Gamma(-^1/_3)}{2\Gamma(-^1/_6)}\tau^{2/_3} + O(\tau)$$

Постоянные $u(0)$, $v(0)$ представляют собой, в силу (3.11), определенные интегралы по вещественной полуоси (от 0 до $\infty$). Эти интегралы вычисляются по формулам, приведенным на стр. 269—270 книги [2] или на стр. 874 книги [3]. После простых преобразований, использующих функциональные соотношения для Г-функции и связь (3.2), получим окончательно

$$w = {}^1/_2\, C\Gamma(-^1/_3) + {}^1/_2\, iC\Gamma(^1/_3)\, z + {}^1/_2\, Cz^2 + O(z^3)$$

Сопоставляя это разложение с формулами (3.1), находим постоянные: $C_1 = {}^1/_2\, C$, $C_2 = -{}^1/_2\, C$.

В силу (3.1), искомое решение уравнения (2.4) есть

$$w(z) = \frac{C}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-i)^k z^{3k}\left[\frac{\Gamma(2k-{}^1/_3)}{(3k)!} + \frac{i\Gamma(2k+{}^1/_3)}{(3k+1)!}z + \frac{2(2k)!}{(3k+2)!}z^2\right]\right\} \tag{3.12}$$

Асимптотика решения (3.12) при $z \to \infty$ определяется формулой (3.10). Пользуясь асимптотическими рядами для конфлюэнтных гипергеометрических функций [2], нетрудно получить и асимптотический ряд для $w$. Приведем окончательный результат, который, как и формулы (3.1), проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (2.4)

$$w(z) \sim \frac{3iC}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k(3k)!}{(2k+1)!\, z^{3k+1}} \qquad \text{при } z \to \infty \tag{3.13}$$

Итак, искомое решение уравнения (2.4) с требуемой асимптотикой определено в виде ряда (3.12), сходящегося при всех конечных $z$, в виде асимптотического ряда (3.13), а также формулами (3.6), (3.11) через конфлюэнтные гипергеометрические функции (3.4).

4. Для окончательного определения течения и формы свободной поверхности нужно еще найти постоянную $C$. Прежде всего из формулы (3.12) имеем

$$w(0) = \varphi(0, 0) = {}^1/_2\, C\Gamma(-^1/_3), \qquad w'(0) = i\psi_\xi(0, 0) = {}^1/_2\, iC\Gamma(^1/_3) \tag{4.1}$$

Введем вспомогательную функцию

$$P(\xi) = \frac{3}{2C}\int_0^{\xi}\frac{\psi_\xi(0, 0) - \psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx \tag{4.2}$$

Используя равенство (4.1), перепишем (4.2) в виде

$$P(\xi) = P(\infty) - \frac{3\Gamma(^1/_3)}{4\xi} + \frac{3}{2C}\int_{\xi}^{\infty}\frac{\psi_\xi(x, 0)}{x^2}\,dx \tag{4.3}$$

Для функции $\psi_\xi(\xi, 0) = \operatorname{Im} w'(\xi)$ из формул (3.12), (3.13) легко получить как сходящийся, так и асимптотический ряд. Подставляя первый из этих рядов в (4.2), а второй — в (4.3), найдем для $P$ сходящийся и асимптотический (при $\xi \to \infty$) ряды

$$P(\xi) = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k \xi^{6k+1}\left[\frac{\Gamma(4k+{}^5/_3)}{(6k+1)(6k+2)!} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2(4k+2)!\,\xi^2}{(6k+3)(6k+4)!} + \frac{\Gamma(4k+{}^{13}/_3)\,\xi^4}{(6k+5)(6k+6)!}\right]\right\}$$

$$P(\xi) \sim P(\infty) - \frac{3\Gamma({}^1/_3)}{4\xi} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k+1)!}{(2k+1)(4k+1)!\,\xi^{6k+3}} =$$
$$= P(\infty) - \frac{3\Gamma({}^1/_3)}{4\xi} - \frac{3}{4\xi^3} + O(\xi^{-9}) \qquad (\xi \to \infty) \tag{4.4}$$

Сравнивая формулы (2.5), (2.6) и (4.2), (4.3), выразим постоянную $C$ и форму свободной поверхности $f(\xi)$ через функцию $P(\xi)$

$$C = \frac{\varepsilon}{P(\infty)}, \qquad f(\xi) = \varepsilon\left\{-\frac{3\Gamma({}^1/_3)}{4P(\infty)} + \xi\left[1 - \frac{P(\xi)}{P(\infty)}\right]\right\} \tag{4.5}$$

Определение постоянной $C$, которая входит множителем в формулы (3.12), (3.13) для $w$, а также определение функции $f(\xi)$ сводятся (как видно из (4.5)) к вычислению функции $P(\xi)$ и, в частности, $P(\infty)$. Для этого можно воспользоваться рядами (4.4).

Другой путь, использованный в работе, состоит в следующем. Рассмотрим уравнение (2.4) на вещественной оси, полагая в нем $z = \xi$, $w = \varphi + i\psi = C(y_1 + iy_2)$. Отделяя в (2.4) вещественную и мнимую части, получим систему двух уравнений второго порядка для функций $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$

$$y_1'' = ({}^4/_9)\,\xi^2 y_2' - ({}^2/_9)\,\xi y_2 + 1, \qquad y_2'' = ({}^2/_9)\,\xi y_1 - ({}^4/_9)\,\xi^2 y_1'$$

Эта система интегрировалась численно на ЭВМ от $\xi = 0$ до $\xi = 20$ при начальных данных, которые получаются из (3.12)

$$y_1 = {}^1/_2\,\Gamma(-{}^1/_3), \qquad y_1' = y_2 = 0, \quad y_2' = {}^1/_2\,\Gamma({}^1/_3) \qquad \text{при } \xi = 0$$

Функция $P(\xi)$ определялась через $y_2$ квадратурой (4.2)

$$P(\xi) = \frac{3}{2}\int_0^\xi \frac{y_2'(0) - y_2'(x)}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\xi \frac{\Gamma({}^1/_3) - 2y_2'(x)}{x^2}\,dx \tag{4.6}$$

Неопределенность подынтегрального выражения в (4.6) при $x = 0$ легко раскрывается, и при малых $\xi$ из (4.4) имеем

$$P(\xi) = {}^3/_8\,\Gamma({}^5/_3)\,\xi + O(\xi^3)$$

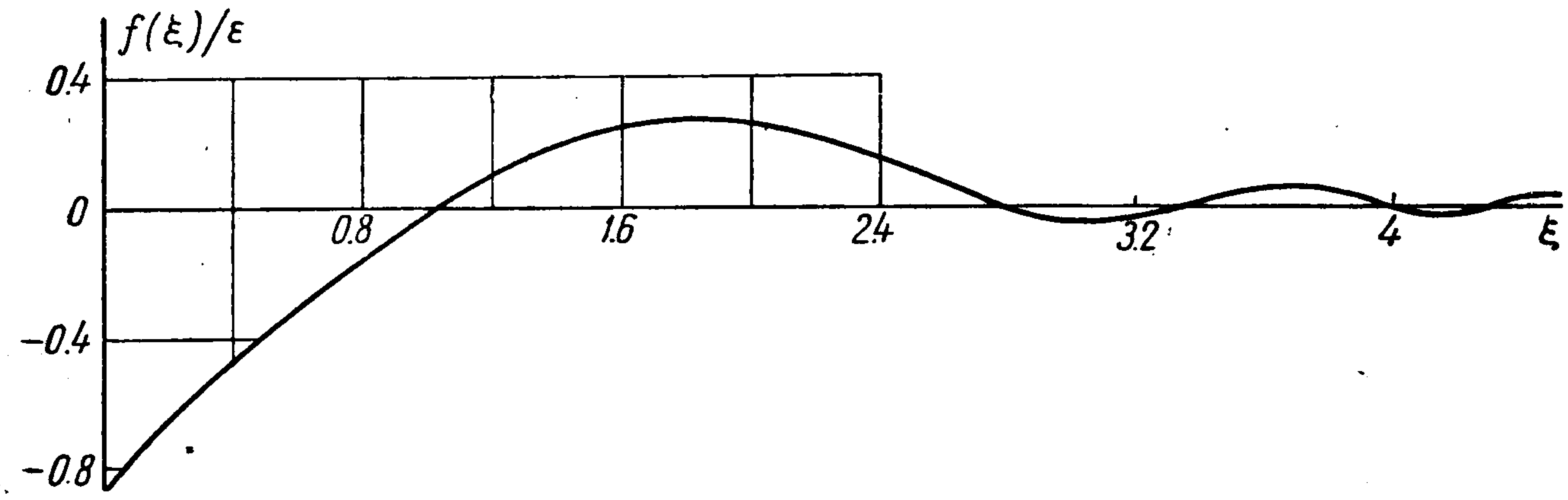
Контроль при определении $P(\xi)$ производился путем вычисления сходящегося ряда (4.4).

Значение $P(\infty)$ вычислялось через $P(\xi)$ при $\xi = 15 \div 20$ при помощи последней из формул (4.4). Функция $f(\xi)$ определялась через $P(\xi)$ по формуле (4.5).

Приведем некоторые результаты вычислений, в которых использовались также равенства (2.1), (4.1), (4.5)

$$P(\infty) = 2.356, \qquad C = \varepsilon / P(\infty) = 0.4244\varepsilon$$
$$f(0) = -{}^3/_4\,\varepsilon\Gamma({}^1/_3) / P(\infty) = -0.8527\varepsilon, \quad f'(0) = \varepsilon$$
$$f''(0) = {}^1/_3\,\varphi(0, 0) = {}^1/_6\,\varepsilon\Gamma(-{}^1/_3) / P(\infty) = -0.2874\varepsilon$$
$$V = |w'(0)| = {}^1/_2\,\varepsilon\Gamma({}^1/_3) / P(\infty) = -{}^2/_3 f(0) = 0.5685\,\varepsilon$$

Здесь $V$ — модуль безразмерной скорости жидкости в начале координат (скорость здесь направлена вдоль оси $\eta$). График функции $\varepsilon^{-1} f(\xi)$ (свободной поверхности жидкости) изображен на фиг. 2. На графике видны колебания, частота которых растет, а амплитуда быстро убывает с ростом $\xi$. Эти колебания соответствуют капиллярным волнам, распространяющимся вдоль свободной поверхности жидкости по автомо-




Фиг. 2

дельному закону. Более короткие волны распространяются с большей скоростью, в согласии с общим свойством капиллярных волн [1]. При $\xi \gg 1$ функция $\varepsilon^{-1} f(\xi)$ выходит на асимптотику, которая следует из (4.4), (4.5)

$$\varepsilon^{-1} f(\xi) \sim {}^3/_4 \, [P(\infty)\, \xi^2]^{-1}$$

и стремится к нулю, оставаясь положительной.

Итак, решение линеаризированной автомодельной задачи при $\alpha = {}^1/_2 \pi$ определено полностью. Напомним, что $\varepsilon = \gamma - {}^1/_2 \pi$, и поэтому $\varepsilon > 0$ для несмачивающей и $\varepsilon < 0$ для смачивающей жидкости. Переход к размерным переменным дается формулами (1.6), например, возвышение жидкости и ее скорость у стенки равны

$$f^\circ(0, t) = \left(\frac{\sigma t^2}{\rho}\right)^{1/3} f(0) = -0.8527 \left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\sigma t^2}{\rho}\right)^{1/3}$$

$$v^\circ = \frac{\partial f^\circ(0, t)}{\partial t} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma}{\rho t}\right)^{1/3} f(0) = -0.5685 \left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{\rho t}\right)^{1/3}$$

Поступила 22 X 1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Higher Transcendental Functions, New York, Mc Graw Hill, 1953, vol. I.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.